Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

**В. М. Корчевский**

# ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С КОНЕЧНЫМИ МОМЕНТАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## §1. Введение

На протяжении всей работы мы будем рассматривать последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ с конечными моментами второго порядка. Введем следующие обозначения: $S_{a,n} = \sum\limits_{i=a+1}^{a+n} X_i$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, $S_n = S_{0,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $n \geqslant 1$. Для $x > 0$ положим $\log x = \log_2 (x \vee 2)$. На протяжении всей работы $C, C_1, C_2$ – некоторые положительные постоянные.

Классическая теорема Меньшова–Радемахера утверждает, что если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность ортогональных случайных величин и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n^2 \log^2 n < \infty, \tag{1}$$

то

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ сходится п.н.}; \tag{2}$$

если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность ортогональных случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}X_n^2}{a_n^2} \log^2 n < \infty, \tag{3}$$

---

*Ключевые слова*: усиленный закон больших чисел, последовательности зависимых случайных величин, сходимость рядов почти наверное, ортогональные случайные величины.

Работа выполнена при поддержке Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга.

то
$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \ \text{ п.н.} \tag{4}$$
Отдельно отметим случай $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$: если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность ортогональных случайных величин и
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}X_n^2}{n^2} \log^2 n < \infty, \tag{5}$$
то
$$\frac{S_n}{n} \to 0 \ \text{ п.н.} \tag{6}$$

В. В. Петровым в работе [6] найдены другие достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям ортогональных случайных величин.

Прежде, чем сформулировать теорему Петрова, введем некоторые обозначения. Следуя [4], будем использовать обозначение $\Psi_c$ для множества функций $\psi(x)$, таких что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором $x_0$ и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится. Значение $x_0$ не предполагается одним и тем же для различных функций $\psi$. Если в этом определении заменим слово "сходится" словом "расходится", то мы получим определение класса функций $\Psi_d$. Примерами функций класса $\Psi_c$ являются функции $x^\delta$ и $(\log x)^{1+\delta}$ при любом $\delta > 0$. Функции $\log x$ и $\log\log x$ принадлежат классу $\Psi_d$.

**Теорема А** (Петров). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность ортогональных случайных величин. Если*
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2 = O\biggl(\frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n}\biggr) \quad \text{для некоторой функции} \ \ \psi \in \Psi_c, \tag{7}$$
*то имеет место соотношение* (6).

Цель настоящей работы – обобщение теорем Меньшова–Радемахера и Петрова на широкие классы зависимых случайных величин, включающие в себя класс ортогональных случайных величин.

Другие результаты, обобщающие теорему Меньшова–Радемахера, можно найти в работах [8] и [10].

В настоящей работе мы устанавливаем связь между условиями (5) и (7). Кроме того, мы показываем, что условие (7) в теореме А является в некотором смысле оптимальным.

## §2. Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям* (1) *и*

$$\mathbf{E}S_{a,n}^2 \leqslant C \sum_{i=a+1}^{a+n} \mathbf{E}X_i^2 \quad \text{для } n \geqslant 1 \text{ и всех достаточно больших } a. \tag{8}$$

*Тогда имеет место соотношение* (2).

**Теорема 2.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность случайных величин. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$1 < q \leqslant \frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \quad \text{для всех достаточно больших } n, \tag{9}$$

*где* $q$ *и* $Q$ *– некоторые постоянные. Если выполнены условия* (3) *и* (8), *то имеет место соотношение* (4).

Теорема 2 обобщает основной результат работы [3], соответствующий случаю $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$.

**Замечание 1.** Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{E}X_iX_j \leqslant 0 \quad \text{для всех } i \neq j, \tag{10}$$

то они удовлетворяют условию (8).

Приведем два следствия теоремы 1.

**Следствие 1.** *Если* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям* (1) *и* (10), *то имеет место соотношение* (2).

**Следствие 2.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию* (10), $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел. Если выполнено* (3), *то имеет место соотношение* (4).

Для того чтобы доказать следствие 2, заметим, что если последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (10), то этому же условию удовлетворяет последовательность случайных величин $\{X_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку выполнено условие (3), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/a_n$ сходится п.н. в силу следствия 1. Применение леммы Кронекера приводит к соотношению (4).

**Замечание 2.** Следствие 2 показывает, что если в теореме 2 условие (8) заменить более ограничительным условием (10), то условие (9) может быть опущено.

**Теорема 3.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность случайных величин. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \quad \text{для всех достаточно больших } n, \tag{11}$$

*где* $Q$ *– некоторая постоянная. Если выполнены условия*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}S_{a,k}^2 + \mathbf{E}S_{a+k,m}^2 \leqslant \mathbf{E}S_{a,k+m} \ &\text{для } \ 1 \leqslant k < k+m \\ &\text{и всех достаточно больших } a,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathbf{E}S_n^2 = O\biggl(\frac{a_n^2}{\psi(n)\log^2 n}\biggr) \quad \text{для некоторой функции } \ \psi \in \Psi_c, \tag{13}$$

*то имеет место соотношение* (4).

**Следствие 3.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (11). *Если выполнены условия* (13) *и*

$$\mathbf{E}X_iX_j \geqslant 0 \ \text{для всех достаточно больших } \ i \ \text{и} \ j,$$

*то имеет место соотношение* (4).

**Следствие 4.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность ортогональных случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (11). *Если выполнено* (13), *то имеет место соотношение* (4).

Положив в следствии 4 $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$, мы приходим к теореме A.

Следующие две теоремы устанавливают связь между условиями (5) и (7).

**Теорема 4.** *Пусть* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\biggl(\frac{n^2}{\psi(n)g(n)}\biggr) \ \text{для некоторой функции } \ \psi \in \Psi_c, \tag{14}$$

*где $g(n)$ – некоторая функция, такая что*

$$g(n) \ \text{ положительна и не убывает в области } \ n > N \tag{15}$$

*для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} g(n) < \infty. \tag{16}$$

Прежде чем формулировать теорему 5, напомним стандартное обозначение: для двух последовательностей неотрицательных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ пишут $x_n \asymp y_n$, когда существуют положительные постоянные $C_1$ и $C_2$, такие что $C_1 x_n \leqslant y_n \leqslant C_2 x_n$ для всех достаточно больших $n$.

**Теорема 5.** *Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (16) с функцией $g(n)$, удовлетворяющей условию*

$$\frac{g(n)}{n} \ \text{ положительна и не возрастает в области } \ n > N \tag{17}$$

*для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Если существует неубывающая функция $\psi_0(x)$, такая что*

$$\psi_0(n) \asymp \frac{n^2}{(\sum_{k=1}^{n} b_k) g(n)} \quad (n \to \infty), \tag{18}$$

*то $\psi_0(x)$ принадлежит классу $\Psi_c$ и*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\biggl(\frac{n^2}{\psi_0(n) g(n)}\biggr). \tag{19}$$

**Замечание 3.** Функции $g(n) \equiv 1$ и $g(n) = \log^2 n$ для всех $n \geqslant 1$ удовлетворяют условиям (15) и (17). Таким образом, теоремы 4 и 5 в случае $g(n) = \log^2 n$ для всех $n \geqslant 1$ устанавливают связь между условиями (5) и (7).

**Замечание 4.** Теоремы 4 и 5 обобщают теоремы 1 и 2 работы [2], доказанные в предположении $g(n) \equiv 1$.

В качестве приложения теоремы 5 мы покажем, что в теореме A условие (7) нельзя заменить более слабым условием

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E} X_k^2 = O\biggl(\frac{n^2}{\psi(n) \log^2 n}\biggr) \ \text{ для некоторой функции } \ \psi \in \Psi_d. \tag{20}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$h(x)=\frac{x^2}{\psi(x)\log^2 x} \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi\in\Psi_d. \tag{21}$$

**Теорема 6.** *Для любой функции $\psi\in\Psi_d$, такой что*

$$h(n) \quad \textit{строго возрастает в области} \quad n>N \tag{22}$$

*и*

$$h^2(n)\geqslant h(n-1)h(n+1) \quad \textit{для всех} \quad n>N \tag{23}$$

*при некотором $N\in\mathbb{N}$ (здесь $h(x)$ – функция, определенная соотношением (21)) существует последовательность ортогональных случайных величин, удовлетворяющая условию (20), для которой*

$$\limsup\frac{|S_n|}{n}=\infty \quad \textit{п.н.} \tag{24}$$

**Замечание 5.** Условие (23) может быть заменено условием

$$\log h(x) \quad \text{выпукла вверх в области} \quad x>x_0 \tag{25}$$

для некоторого $x_0>0$. Очевидно, что (23) следует из (25) (достаточно прологарифмировать неравенство (23)).

Примерами функций из класса $\Psi_d$, удовлетворяющих условиям (22) и (25), являются функции $\log x$ и $\log x\log\log x$. Полагая в теореме 6 $\psi(x)=\log x\log\log x$, получим следующий результат:

**Следствие 5.** *Существует последовательность ортогональных случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что*

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k^2=O\biggl(\frac{n^2}{(\log n)^3\log\log n}\biggr) \tag{26}$$

*и выполнено соотношение (24).*

Интересно сравнить следствие 5 со следующим результатом, являющимся следствием теоремы A.

**Теорема B.** *Если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность ортогональных случайных величин, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k^2=O\biggl(\frac{n^2}{(\log n)^{3+\delta}}\biggr) \quad \textit{для некоторого} \quad \delta>0,$$

*то имеет место соотношение (6).*

Заметим, что из теоремы 6 также следует, что в теореме 3 условие (13) не может быть заменено ни условием

$$\mathbf{E}S_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)\log^{2-\delta} n}\right) \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c,$$

ни даже условием

$$\mathbf{E}S_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)(\log n)^2(\log\log n)^{-\delta}}\right) \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c \tag{27}$$

и некоторого $\delta > 0$.

Действительно, в силу следствия 5 существует последовательность ортогональных случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (26), для которой выполнено (24). Но тогда эта последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (3) (в силу ортогональности) и условию (27) с $a_n = n$ для всех $n$ и функцией $\psi(x) = \log x(\log\log x)^{1+\delta}$, принадлежащей классу $\Psi_c$.

## §3. Доказательства

В доказательствах теорем 1–3 ключевую роль играет следующее максимальное неравенство Серфлинга [9]:

**Лемма 1.** *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность случайных величин с конечными моментами второго порядка. Обозначим через $F_{a,n}$ функцию распределения случайного вектора $(X_{a+1}, \dots, X_{a+n})$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Пусть $g(F_{a,n})$ – некоторый функционал на $\{F_{a,n} : \ a \geqslant 0, n \geqslant 1\}$, такой что*

$$g(F_{a,k}) + g(F_{a+k,m}) \leqslant g(F_{a,k+m}) \quad \text{для всех} \quad a \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k < k+m. \tag{28}$$

*Если выполнено условие*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=a+1}^{a+n} X_i\right)^2 \leqslant g(F_{a,n}) \quad \text{для всех} \quad a \geqslant 0, \quad n \geqslant 1, \tag{29}$$

*то*

$$\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=a+1}^{a+j} X_i\right|\right)^2 \leqslant (\log(2n))^2 g(F_{a,n}) \quad \text{для всех} \quad a \geqslant 0, \quad n \geqslant 1.$$

Это неравенство является обобщением классического неравенства Меньшова–Радемахера (см., например, [1]).

**Доказательство теоремы 1.** Не ограничивая общности, будем считать, что условие (8) выполнено для всех $a \geqslant 0$. Из (1) и (8) следует, что для $m > n$

$$\mathbf{E}(S_m - S_n)^2 = \mathbf{E}S_{n,m-n}^2 \leqslant C \sum_{i=n+1}^{m} \mathbf{E}X_i^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Таким образом, $S_n$ является последовательностью Коши в $L_2$. В силу полноты $L_2$, существует случайная величина $S$, определенная на том же вероятностном пространстве, что и исходная последовательность, такая что $\mathbf{E}S^2 < \infty$ и $\mathbf{E}(S_n - S)^2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Имеем

$$\mathbf{E}(S - S_{2^n})^2 = \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(S_m - S_{2^n})^2 \leqslant \lim_{m\to\infty} C \sum_{i=2^n+1}^{m} \mathbf{E}X_i^2 = C \sum_{i=2^n+1}^{\infty} \mathbf{E}X_i^2.$$

Отсюда, учитывая (1), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|S - S_{2^n}| > \varepsilon) &\leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(S - S_{2^n})^2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^n+1}^{\infty} \mathbf{E}X_i^2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(2^n)} \sum_{i=2^n+1}^{\infty} \mathbf{E}X_i^2 \log^2 i \\ &\leqslant C_1\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(2^n)} = C_1\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (30) и леммы Бореля–Кантелли следует, что

$$S_{2^n} \to S \quad \text{п.н.}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| = 0 \quad \text{п.н.} \tag{31}$$

Положим

$$g(F_{a,n}) = C \sum_{i=a+1}^{a+n} \mathbf{E}X_i^2, \quad a \geqslant 0, \quad n \geqslant 1,$$

где $C$ – постоянная из условия (8). Тогда $g(F_{a,n})$ удовлетворяет условиям (28) и (29) и, в силу леммы 1, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\Big(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k-S_{2^n}|>\varepsilon\Big) &\leqslant \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k-S_{2^n}|)^2\\ &= \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\sum_{i=2^n+1}^{2^n+k}X_i\right|\right)^2\\ &\leqslant C\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\log^2(2\cdot 2^n)\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}\mathbf{E}X_i^2\\ &\leqslant C_1\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}\mathbf{E}X_i^2\log^2 i\\ &= C_1\varepsilon^{-2}\sum_{i=3}^{\infty}\mathbf{E}X_i^2\log^2 i<\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, в силу леммы Бореля–Кантелли (31) выполнено. Теорема доказана. □

**Доказательство теоремы 2.** Не ограничивая общности, будем считать, что условие (8) выполнено для всех $a \geqslant 0$, а условие (9) – для всех $n \geqslant 1$. В силу неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$, учитывая (3) и (9), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right|>\varepsilon\right) &\leqslant \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}S_{2^n}^2}{a_{2^n}^2}\\ &\leqslant C\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2^n}\mathbf{E}X_i^2}{a_{2^n}^2}\\ &\leqslant C\varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}X_i^2\sum_{n=[\log i]+1}^{\infty}\frac{1}{a_{2^n}^2}\\ &\leqslant C\varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}X_i^2\frac{1}{a_i^2}<\infty.\end{aligned}$$

Применение леммы Бореля–Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{32}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = 0 \ \text{ п.н.}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| &= \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k - S_{2^n} + S_{2^n}}{a_k}\right| \\ &= \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\frac{a_{2^n}}{a_k} + \frac{S_{2^n,k-2^n}}{a_{2^{n+1}}}\frac{a_{2^{n+1}}}{a_k}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| + \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right|\frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}}. \end{aligned} \tag{33}$$

Первое слагаемое в правой части (33) сходится к нулю п.н. и, учитывая (9), нам достаточно доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| = 0 \ \text{ п.н.} \tag{34}$$

Положим

$$g(F_{a,n}) = C\sum_{i=a+1}^{a+n}\mathbf{E}X_i^2, \quad a\geqslant 0, \quad n\geqslant 1,$$

где $C$ – постоянная из условия (8). Тогда $g(F_{a,n})$ удовлетворяет условиям (28) и (29). Таким образом, в силу леммы 1 и условия (3) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| > \varepsilon\right) &\leqslant \varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\Bigl(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|S_{2^n,k}|\Bigr)^2}{a_{2^{n+1}}^2} \\ &\leqslant C\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2(2\cdot 2^n)\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}\mathbf{E}X_i^2}{a_{2^{n+1}}^2} \\ &\leqslant C_1\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}\mathbf{E}X_i^2\log^2 i}{a_{2^{n+1}}^2} \\ &\leqslant C_1\varepsilon^{-2}\sum_{i=3}^{\infty}\mathbf{E}X_i^2\log^2 i\,\frac{1}{a_i^2} < \infty. \end{aligned} \tag{35}$$

Из соотношения (35) и леммы Бореля–Кантелли следует (34). Теорема доказана. □

**Доказательство теоремы 3.** Не ограничивая общности, будем считать, что условие (3) выполнено для всех $a \geqslant 0$. В силу условия (13) и неравенства Чебышева, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} S_{2^n}^2}{a_{2^n}^2} \leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2^n}^2}{a_{2^n}^2 \psi(2^n) \log^2(2^n)} < \infty,$$

Применение леммы Бореля–Кантелли приводит к соотношению (32). Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2, приходим к выводу, что нам достаточно доказать соотношение (34).

Положим

$$g(F_{a,n}) = \mathbf{E} S_{a,n}^2, \quad a \geqslant 0, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда $g(F_{a,n})$ удовлетворяет условиям (28) и (29). Таким образом, в силу леммы 1 и условий (3) и (13) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| > \varepsilon\right) &\leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\Big(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2^n} |S_{2^n,k}|\Big)^2}{a_{2^{n+1}}^2} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(2\cdot 2^n)\mathbf{E} S_{2^n,2^n}^2}{a_{2^{n+1}}^2} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(2^{n+1})(\mathbf{E} S_{2^n}^2 + \mathbf{E} S_{2^n,2^n}^2)}{a_{2^{n+1}}^2} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(2^{n+1})\mathbf{E} S_{2^{n+1}}^2}{a_{2^{n+1}}^2} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\psi(2^n)}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

В силу леммы 1 из [7] ряд $\sum 1/\psi(b^n)$ сходится для любого $b > 1$, если $\psi(x) \in \Psi_c$. Поэтому ряд в правой части (36) сходится. Таким образом, в силу леммы Бореля–Кантелли, (34) выполнено. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4 опирается на следующий результат, полученный в работе [2]:

**Лемма 2.** *Если последовательность положительных чисел* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \quad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c,$$

*то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} < \infty.$$

**Доказательство теоремы 4.** В силу условия (15), для достаточно больших $n$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k g(k) \leqslant C \sum_{k=1}^{n} b_k g(n).$$

Отсюда, с учетом (14), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k g(k) = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right).$$

Таким образом, (16) выполнено в силу леммы 2. Теорема доказана. $\square$

**Доказательство теоремы 5.** Если существует неубывающая функция $\psi_0(x)$, удовлетворяющая условию (18), то (19) очевидно выполнено, и нам нужно только показать, что

$$\psi_0 \in \Psi_c. \tag{37}$$

Пусть условие (17) выполнено при всех $n \geqslant N_0$ для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(n) = \frac{n^2}{(\sum_{k=1}^{n} b_k) g(n)}, \quad n \geqslant N_0. \tag{38}$$

Для того чтобы доказать (37), учитывая (18) и (38), нам достаточно показать, что

$$f(n) \to \infty \quad (n \to \infty) \tag{39}$$

и

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n f(n)} < \infty. \tag{40}$$

Соотношение (39) следует из (16), (38) и леммы Кронекера, и нам остается только доказать (40). В силу (16) и (17), имеем

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{nf(n)}=\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_kg(n)}{n^3}\leqslant C_1+C\sum_{k=N_0}^{\infty}b_k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{g(n)}{n^3}$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{k=N_0}^{\infty}b_k\frac{g(k)}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\leqslant C_1+C_2\sum_{k=N_0}^{\infty}b_k\frac{g(k)}{k}\cdot\frac{1}{k}<\infty.$$

Таким образом, (40) выполнено. Теорема доказана. □

**Доказательство теоремы 6.** Пусть $\psi(x)$ – функция из класса $\Psi_d$, удовлетворяющая условиям (22) и (23) при всех $n\geqslant N_0$ для некоторого $N_0\in\mathbb{N}$. Введем в рассмотрение числовую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданную равенствами

$$b_1=b_2=\ldots=b_{N_0}=\frac{N_0}{\psi(N_0)\log^2 N_0},$$

$$b_n=\frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n}-\frac{(n-1)^2}{\psi(n-1)\log^2(n-1)}\quad\text{для}\quad n\geqslant N_0+1.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n}\quad\text{для всех}\quad n\geqslant N_0. \tag{41}$$

Покажем, что

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\log^2 n=\infty. \tag{42}$$

Предположим противное, то есть ряд из (42) сходится. Учитывая (41) и применяя теорему 5 с $\psi_0(x)\equiv\psi(x)$ и $g(n)=\log^2 n$ для всех $n\geqslant 1$, приходим к заключению, что $\psi\in\Psi_c$. Полученное противоречие доказывает (42).

Заметим, что последовательность $\{h(n)/n^2\}$ не возрастает, начиная с номера $N_0$, поэтому

$$\frac{h(n+1)}{h(n)}\leqslant\frac{(n+1)^2}{n^2}\quad\text{для всех}\quad n\geqslant N_0. \tag{43}$$

Покажем, что последовательность $\{b_n/n^2\}$ не возрастает начиная с номера $N_0+1$. Предположим противное, то есть найдется номер $N \geqslant N_0+1$, такой что $b_{N+1}/(N+1)^2 > b_N/N^2$. Но тогда

$$\begin{aligned} 1 < \frac{b_{N+1}/(N+1)^2}{b_N/N^2} &= \frac{(h(N+1)-h(N))/(N+1)^2}{(h(N)-h(N-1))/N^2} \\ &= \frac{h(N+1)-h(N)}{h(N)-h(N-1)} \cdot \frac{N^2}{(N+1)^2} \\ &= \frac{h(N+1)(1-\frac{h(N)}{h(N+1)})}{h(N)(1-\frac{h(N-1)}{h(N)})} \cdot \frac{N^2}{(N+1)^2} \\ &\leqslant \frac{1-\frac{h(N)}{h(N+1)}}{1-\frac{h(N-1)}{h(N)}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Последнее неравенство в (44) выполнено в силу (43). Из (44) следует, что

$$h^2(N) < h(N-1)h(N+1).$$

Это противоречит условию (23). Таким образом, доказано, что последовательность $\{b_n/n^2\}$ не возрастает начиная с номера $N_0+1$, и, следовательно, по теореме 2 работы [5] существует последовательность ортогональных случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что $\mathbf{E}X_n^2 = b_n$ и выполнено соотношение (24). Из (41) следует, что (20) также выполнено. Теорема доказана. □

## Литература


1. Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы.* ИЛ, М., 1956.
2. В. М. Корчевский, *Об условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 4 (2010), 32–35.
3. В. М. Корчевский, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности случайных величин без предположения о независимости.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 4 (2011), 38–41.
4. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
5. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности ортогональных случайных величин.* — Вестн. ЛГУ **7** (1975), 52–57.
6. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для ортогональных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 103–106.
7. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **53**, No. 2 (2008), 379–382.

8. П. А. Яськов, *Об одном обобщении теоремы Меньшова–Радемахера.* — Матем. заметки **86**, Вып. 6 (2009), 925–937.
9. R. J. Serfling, *Moment inequalities for the maximum cumulative sum.* — Ann. Math. Statist. **41**, No. 4 (1970), 1227–1234.
10. S. H. Sung, *Maximal inequalities for dependent random variables and applications.* — J. Inequalities Appl. (2008), Article ID 598319.

Korchevsky V. M. On the strong law of large numbers for sequences of dependent random variables with finite second moments.

New sufficient conditions of a.s. convergence of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ and new sufficient conditions for the applicability of the strong law of large numbers are established for a sequence of dependent random variables $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ with finite second moments. These results are generalizations of the well known theorems on a.s. convergence of the series of orthogonal random variables and on the strong law of large numbers for orthogonal random variables (Men'shov–Rademacher and Petrov's theorems). It is shown that some of the results obtained are optimal.

С.-Петербургский
государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Большая Морская, д. 67, 190000,
Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: valery_ko@list.ru

Поступило 28 октября 2013 г.