Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

$\boxed{\text{Ю. И. Ингстер}}$, **И. А. Суслина**

ОБНАРУЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Введение

Пусть наблюдается функция d переменных $f(t)$, заданная на кубе: $t = (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1]^d$, в гауссовском белом шуме:

$$dX(t) = f(t)dt + \varepsilon dW(t), \quad f \in L_2([0,1]^d),$$

где $W(t)$ является винеровским процессом на $[0,1]^d$.

Рассматривается задача проверки гипотез. Мы будем проверять простую гипотезу $H_0 : f = 0$ против альтернативы H_1. В качестве альтернативы мы будем рассматривать множество неизвестных функций, отделенных от нуля:

$$\|f\| \geqslant r_\varepsilon,$$

для некоторого положительного семейства $r_\varepsilon \to 0$. Кроме того, мы будем предполагать, что функция d переменных $f(t) = f(t_1, \ldots, t_d)$ зависит от меньшего числа переменных k, и эта функция удовлетворяет некоторым регулярным ограничениям.

Здесь и далее все предельные соотношения рассматриваются при $\varepsilon \to 0$, если не указан другой предельный переход.

1.1. Разреженность. Мы предполагаем, что f является функцией "разреженных переменных" в двух следующих смыслах.

Во-первых, пусть задано целое k, $1 \leqslant k \leqslant d$, $u = (j_1, \ldots, j_k) \subset \{1, \ldots, d\}$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant d$ и $t_u = (t_{j_1}, \ldots, t_{j_k})$. Обозначим через $\mathcal{U}_{k,d}$ множество всех подмножеств $u \subset \{1, \ldots, d\}$, содержащих ровно k элементов, то есть

$$\mathcal{U}_{k,d} = \{u : \ u \subset \{1, \ldots, d\}, \ \#(u) = k\}.$$

Будем предполагать, что

$$f(t) = f_u(t_u) \quad \text{для некоторого} \quad u \in \mathcal{U}_{k,d}. \tag{1.1}$$

Ключевые слова: обнаружение разреженного сигнала, минимаксная проверка гипотез, адаптивная минимаксная проверка гипотез, точные границы обнаружения.

Рассмотрим стандартный базис Фурье в пространстве $L_2(0,1)$: $\phi_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, $t \in [0,1]$, $\phi_0(t) \stackrel{\Delta}{=} 1$, и ортогональный базис в

$$L_2([0,1]^d) \,:\, \phi_l(t_1,\ldots,t_d) = \prod_{j=1}^{d} \phi_{l_j}(t_j),\ \ l \in \mathbb{Z}^d.$$

Величины $\theta_l = (f,\phi_l)$ являются коэффициентами Фурье функции f. Пусть $\mathbb{Z}_u$ состоит из таких $l = (l_1,\ldots,l_d) \in \mathbb{Z}^d$, что $l_j = 0$ при $j \notin u$. Тогда (1.1) соответствует

$$f_u(t_u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_u} \theta_l \phi_l(t_u), \quad \psi_l(t_u) = \psi_l(t_{j_1},\ldots,t_{j_k}) \ \text{ для некоторого } \ u \in \mathcal{U}_{k,d}.$$

Во-вторых, рассмотрим ортогональное ANOVA-разложение, то есть представление неизвестной функции f в виде сумм функций от не более чем d переменных:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_u f_u^0(t_u) = \mathrm{const} + \sum_{j=1}^{d} f_j^0(t_j) \\ &+ \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant d} f_{jk}^0(t_j,t_k) + \cdots + f_{12\ldots,d}^0(t_1,\ldots,t_d), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где сумма берется по всем подмножествам $u \subset \{1,\ldots,d\}$ и $t_u = (t_j)_{j \in u}$. Мы предполагаем, что сумма (1.2) состоит только из одного неизвестного элемента, соответствующего $u \in \mathcal{U}_{k,d}$ или $u \in \mathcal{U}_{s,d},\ s \leqslant k$. Формально это означает, что

$$\begin{aligned} &f(t) = f_u^0(t_u) \text{ для некоторого } u \in \mathcal{U}_{k,d} \\ &\text{или для некоторого } \quad u \in \mathcal{U}_{s,d},\ s \leqslant k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Различие между (1.1) и (1.3) заключается в функциях $f_v^0(t_v)$, ортогональных при различных $v \subset u$:

$$f_u(t_u) = \sum_{v \subset u} f_v^0(t_v),$$

где сумма берется по всем подмножествам $v \subset u$.

Пусть $\mathbb{Z}_u$ (как и раньше) состоит из таких $l \in \mathbb{Z}^d$, что $l_j = 0$ при $j \notin u$, и $\widehat{\mathbb{Z}}_u$ состоит из таких $l \in \mathbb{Z}_u$, что $l_j \neq 0\ \forall\, j \in u$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_\emptyset = (\underbrace{0,\ldots,0}_{d})$.

Также положим $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В силу того, что

$$\mathbb{Z}^d = (\widehat{\mathbb{Z}} \cup \{0\})^d = \bigcup_{u \subset \{1,\dots,d\}} \widehat{\mathbb{Z}}_u,$$

и $\phi_l(t) = \phi_l(t_u)$ для $l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u$ (для $u = \varnothing$ положим $\psi_l(t_u) = 1$), разложение (1.2) можно представить в виде

$$f(t) = \sum_{u \subset \{1,\dots,d\}} \sum_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u} \theta_l \phi_l(t_u). \tag{1.4}$$

Согласно (1.3), это соответствует

$$\begin{aligned} f(t) = \sum_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u} \theta_l \phi_l(t_u) \ &\text{для некоторого } u \in \mathcal{U}_{k,d} \\ &\text{или для некоторого } u \in \mathcal{U}_{s,d},\ s \leqslant k. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2. Регулярность. Пусть фиксирован набор положительных коэффициентов $\mathbf{c} = (c_l)_{l \in \mathbb{Z}^d}$. Рассмотрим эллипсоид с коэффициентами $\mathbf{c}$:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{c}} = \{f(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \theta_l \phi_l(t) : \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \theta_l^2 c_l^2 \leqslant 1\}. \tag{1.6}$$

Как и раньше, обозначим $\mathbb{Z}_u = \{l \in \mathbb{Z}^d : l_j \in \mathbb{Z},\ l_j = 0,\ j \notin u\}$, и пусть $\mathbf{c}_u = (c_l)_{l \in \mathbb{Z}_u}$.

Предположение A1. Набор положительных коэффициентов $\mathbf{c}_u$ является инвариантным по отношению к $u \in \mathcal{U}_{k,d}$ при любом $k \leqslant d$, то есть, если $u = \{j_1, \dots, j_k\}$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant d$ и $l \in \mathbb{Z}_u$, то $c_l = c_{l_1,\dots,l_k,0,\dots,0}$. Обозначим через $\mathbf{c}_k$ набор $c_l = c_{l_1,\dots,l_k} = c_{l_1,\dots,l_k,0,\dots,0}$, $l \in \mathbb{Z}^k$. Кроме того, для $u = \{j_1, \dots, j_k\}$ рассмотрим отображение $u : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}_u$: $u(l) = \{l :\ l_j = 0,\ j \notin u;\ l_{j_s} = l_s, s = 1, \dots, k\}$.

Замечание 1.1. Обозначим $N_u(x) = \#\{l \in \mathbb{Z}_u : c_l < x\}$. Можно заменить предположение **A1** следующим:

Предположение A2. $N_u(x) = N_{u_1}(x)\ \forall\ x > 0$ и для $\forall\ u \in \mathcal{U}_{k,d},\ u_1 \in \mathcal{U}_{k,d},\ k = 1, \dots, d$.

Пример 1.1. Соболевские шары. Пусть фиксировано число $\sigma > 0$, и набор $\mathbf{c}$ имеет вид

$$c_l^2 = \left(\sum_{j=1}^d (2\pi l_j)^2 \right)^\sigma, \quad l \in \mathbb{Z}^d.$$

Тогда набор $\mathbf{c}_k$ состоит из

$$c_l^2 = \left(\sum_{j=1}^{k}(2\pi l_j)^2\right)^{\sigma}, \quad l \in \mathbb{Z}^k,$$

и предположение **A1** справедливо.

Если предположение **A1** справедливо, то любая функция $f_u(t_u) \in \mathcal{F}_{\mathbf{c}}$ представима в виде

$$f_u(t_u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_u} \theta_l \phi_l(t_u) : \sum_{l \in \mathbb{Z}_u} \theta_l^2 c_l^2 \leqslant 1, \quad k = \#(u). \tag{1.7}$$

Для функций вида (1.3) будем иметь

$$f_u^0(t_u) = \sum_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u} \theta_l \phi_l(t) : \sum_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u} \theta_l^2 c_l^2 \leqslant 1, \quad k = \#(u). \tag{1.8}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathbf{c},u}, \mathcal{F}_{\mathbf{c},u}^0$ множества функций вида (1.7), (1.8) соответственно. Ясно, что при **A1** эти множества изоморфны для всех u мощности s. Введем также обозначения

$$\mathcal{F}_{\mathbf{c},s} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \mathcal{F}_{\mathbf{c},u}, \quad \mathcal{F}_{\mathbf{c},s}^0 = \bigcup_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \mathcal{F}_{\mathbf{c},u}^0.$$

1.3. Задачи обнаружения. Рассмотрим следующие задачи обнаружения. Пусть семейство $r_\varepsilon = r_{\varepsilon,s} > 0$, $r_{\varepsilon,s} \to 0$ или $r_{\varepsilon,k} > 0$, $1 \leqslant k \leqslant s$, $\max_{1 \leqslant k \leqslant s} r_{\varepsilon,k} \to 0$ задано. Пусть

$$\mathcal{F}(r) = \{f \in \mathcal{F} : \|f\| \geqslant r\},$$

положим

$$\gamma(\mathcal{F}(r)) = \inf_{\psi}(\alpha(\psi) + \sup_{f \in \mathcal{F}(r)} \beta(\psi, f)) = \inf_{\psi} \gamma(\psi, \mathcal{F}(r)).$$

Здесь для теста ψ

$$\alpha(\psi) = E_{\varepsilon,0}\psi, \quad \beta(\psi, f) = E_{\varepsilon,f}(1-\psi),$$
$$\gamma(\psi, \mathcal{F}) = \alpha(\psi) + \sup_{f \in \mathcal{F}} \beta(\psi, f),$$

и формально положим, что супремум по пустому множеству равен нулю: $\beta(\psi, \varnothing) = 0$. Конечно, это влечет $\gamma(\varnothing) = 0$. Рассмотрим следующие альтернативы

$$H_1 : f \in \mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s}), \quad H_1^0 : f \in \mathcal{F}_{\mathbf{c},s}^0(r_{\varepsilon,s}). \tag{1.9}$$

Нас также будет интересовать задача адаптации по $k = 1, \dots, s$. Пусть задано семейство $r_\varepsilon = \{r_{\varepsilon,k},\ 1 \leqslant k \leqslant s\},\ r_{\varepsilon,k} > 0$,. Положим

$$\mathcal{F}^+_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon) = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \mathcal{F}_{\mathbf{c},k}(r_{\varepsilon,k}), \quad \mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon) = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant s} \mathcal{F}^0_{\mathbf{c},k}(r_{\varepsilon,k}),$$

и рассмотрим альтернативы

$$H^+_1 : f \in \mathcal{F}^+_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon), \quad H^{0+}_1 : f \in \mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon). \tag{1.10}$$

Ясно, что

$$\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s}) \subset \mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s}), \quad \mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon) \subset \mathcal{F}^+_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon), \tag{1.11}$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{c},u}(r_{\varepsilon,s}) \subset \mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s}), \quad \forall\ u \in \mathcal{U}_{s,d}, \tag{1.12}$$

откуда

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \leqslant \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})), \quad \sup_{u\in\mathcal{U}_{s,d}} \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\mathbf{c},u}(r_{\varepsilon,s})) \leqslant \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \tag{1.13}$$

и

$$\max_{k\leqslant s} \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},k}(r_{\varepsilon,k})) \leqslant \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \leqslant \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}^+_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)), \quad \forall\ \ k \leqslant s. \tag{1.14}$$

Будем предполагать, что $d = d_\varepsilon \to \infty$. Число $s \in \mathbb{N}$ может быть фиксированным или $s = s_\varepsilon \to \infty,\ s = o(d)$.

1.4. Критические радиусы: определения. Мы назовем семейство $r^{0*}_{\varepsilon,s}$ критическими радиусами для альтернативы H^0_1, если $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 1$, когда $r_{\varepsilon,s}/r^{0*}_{\varepsilon,s} \to 0$, и $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, когда $r_{\varepsilon,s}/r^{0*}_{\varepsilon,s} \to \infty$.

Будем говорить, что это семейство является точными критическими радиусами, если $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 1$, когда $\limsup r_{\varepsilon,s}/r^{0*}_{\varepsilon,s} < 1$, и $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, когда $\liminf r_{\varepsilon,s}/r^{0*}_{\varepsilon,s} > 1$.

Назовем набор семейств $r^{0*}_\varepsilon = \{r^{0*}_{\varepsilon,k},\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$ адаптивными критическими радиусами для альтернативы H^{0+}_1, если $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 1$, когда $\min_k r_{\varepsilon,k}/r^{0*}_{\varepsilon,k} \to 0$, и $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 0$, когда $\min_k r_{\varepsilon,k}/r^{0*}_{\varepsilon,k} \to \infty$.

Назовем набор семейств $r^{0*}_\varepsilon = \{r^{0*}_{\varepsilon,k},\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$ точными адаптивными критическими радиусами для альтернативы H^{0+}_1, если $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 1$, когда $\limsup \min_k r_{\varepsilon,k}/r^{0*}_{\varepsilon,k} < 1$, и $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 0$, когда $\liminf \min_k r_{\varepsilon,k}/r^{0*}_{\varepsilon,k} > 1$.

Будем использовать аналогичные определения и для альтернатив H_1, H^+_1.

§2. Предыдущие результаты

2.1. Считающая функция. Зададим семейство счетных множеств $\mathcal{L}_\varepsilon$ и набор положительных коэффициентов $c_\varepsilon = (c_{l,\varepsilon})_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon}$. Рассмотрим следующую модель:

$$x = \theta + \varepsilon\eta,\ x = (x_l)_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon},\ \theta = (\theta_l)_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon},\ \eta = (\eta_l)_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon},\ \eta_l \sim \mathcal{N}(0,1),$$

то есть, $(\eta_l)_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon}$ – независимые гауссовские случайные величины с параметрами (0, 1). При заданных $r_\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0$ будем проверять простую основную гипотезу $H_0 : \theta = 0$ против альтернативы

$$H_1 : \theta \in \Theta_\varepsilon(r_\varepsilon) = \Big\{\theta : \sum_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon} c_l^2\theta_l^2 \leqslant 1,\ \sum_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon} \theta_l^2 \geqslant r_\varepsilon^2\Big\}. \tag{2.1}$$

Ниже мы будем рассматривать $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathbb{Z}_u$ или $\mathcal{L}_\varepsilon = \widehat{\mathbb{Z}}_u$, $u \subset \{1,\dots,d\}$, $d = d_\varepsilon$, $\#(u) = s_\varepsilon$ при фиксированном $s_\varepsilon = s$ или $s_\varepsilon \to \infty$, $s_\varepsilon = o(d_\varepsilon)$. Обозначим

$$c_{\varepsilon,0} = \inf_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon} c_l, \tag{2.2}$$

и заметим, что $\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon) = \varnothing$ при $r_\varepsilon > 1/c_{\varepsilon,0}$. Таким образом, далее нас будет интересовать только случай $r_\varepsilon \in (0, 1/c_{0,\varepsilon})$, так как $\gamma(\varnothing) = 0$.

Введем в рассмотрение считающую функцию $N_\varepsilon(x)$:

$$N_\varepsilon(x) = \#\{l \in \mathcal{L}_\varepsilon : c_l < x\}, \quad x > 0. \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что $N_\varepsilon(x) < \infty$ для любого $x > 0$ и $N_\varepsilon(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Заметим, что $N_\varepsilon(x) = 0$ при $x \leqslant c_{\varepsilon,0}$.

Функция $N_\varepsilon(x)$ непрерывна слева и не убывает по $x \geqslant 0$. Это функциональное семейство определяет критические радиусы и точную асимптотику в задаче обнаружения, приведенной выше. А именно, пусть

$$r_\varepsilon^* = T_\varepsilon^{-1}, \tag{2.4}$$

где T_ε определяется соотношениями

$$\varepsilon^4 T_\varepsilon^4 N_\varepsilon(T_\varepsilon) \asymp 1. \tag{2.5}$$

Точнее, для константы $B > 0$ положим $T_\varepsilon = \sup\{x :\ \varepsilon^4 x^4 N_\varepsilon(x) \leqslant B\}$. Заметим, что если $T_\varepsilon = c_{\varepsilon,0}$, то $\gamma(\Theta_\varepsilon(r)) = 0$ для любого $r > r_\varepsilon^*$.

Также будем говорить, что функция $N_\varepsilon(x)$ является *медленно меняющейся* относительно семейства $x_\varepsilon \to \infty$, если $N_\varepsilon(bx_\varepsilon)/N_\varepsilon(x_\varepsilon) \to 1$ для любого $b > 0$. Будем говорить, что функция $N_\varepsilon(x)$ является *быстро меняющейся* относительно семейства $x_\varepsilon \to \infty$, если $N_\varepsilon(bx_\varepsilon)\varepsilon^4 x_\varepsilon^4 \to 0$ для любого $b \in (0,1)$ и $N_\varepsilon(bx_\varepsilon)\varepsilon^4 x_\varepsilon^4 \to \infty$ для любого $b > 1$.

Рассмотрим статистики и тесты при $T > c_{\varepsilon,0}$

$$S_T = \frac{1}{\sqrt{2N_\varepsilon(T)}} \sum_{c_l<T} ((x_l/\varepsilon)^2 - 1), \quad \psi_{T,H} = \mathbb{1}_{S_T>H}. \qquad (2.6)$$

Тогда из [6, предложения 2.2 и 2.3] для альтернативы (2.1) следует

Предложение 2.1. *Пусть* $T_\varepsilon, r_\varepsilon^*$ *определяются соотношениями* (2.4), (2.5).

(i) *Пусть* $r_\varepsilon^* \to 0$. *Тогда семейство* r_ε^* *является семейством критических радиусов, то есть, если* $r_\varepsilon/r_\varepsilon^* \to 0$, *то* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) \to 1$, *и если* $r_\varepsilon/r_\varepsilon^* \to \infty$, *то* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) \to 0$. *В последнем случае тесты* $\psi_{T_\varepsilon,H}$, *описанные в* (2.6), *для некоторых* $H \to \infty$ *и* $T \asymp T_\varepsilon$ *являются состоятельными, то есть* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon), \psi_{T_\varepsilon,H}) = \alpha(\psi_{T_\varepsilon,H}) + \beta(\psi_{T_\varepsilon,H}, \Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) \to 0$.

(ii) *Пусть функция* $N_\varepsilon(x)$ *является медленно меняющейся относительно семейства* T_ε. *Положим* $\tilde{a}_\varepsilon(r_\varepsilon) = (r_\varepsilon/\varepsilon)^2/\sqrt{2N_\varepsilon(T_\varepsilon)}$. *Тогда* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) = 2\Phi(-\tilde{a}_\varepsilon(r_\varepsilon)/2) + o(1)$, *и тест, описанный в* (2.6) *с* $H = \tilde{a}_\varepsilon(r_\varepsilon)/2$, $T = T_\varepsilon$, *является асимптотически минимаксным, то есть* $\gamma(\psi_{T_\varepsilon,H}, \Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) \leqslant \gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) + o(1)$.

(iii) *Пусть* $N_\varepsilon(x)$ *быстро меняется относительно* T_ε. *Тогда критические радиусы* r_ε^* *являются точными, то есть, если* $\liminf r_\varepsilon/r_\varepsilon^* < 1$, *то* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) \to 1$, *и если* $B = \limsup r_\varepsilon/r_\varepsilon^* > 1$, *то* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) \to 0$, *при этом состоятельными являются тесты* $\psi_{T_\varepsilon,H}$ *при некоторых* $H \to \infty$ *и* $T = bT_\varepsilon$ *с* $b \in (B^{-1}, 1)$.

Замечание 2.1. Важным моментом в пункте (iii) является то, что соотношение $N_\varepsilon(T)T^4\varepsilon^4 \sim B$ так определяет $T = T_\varepsilon(B)$, что $T_\varepsilon(B_1) \sim T_\varepsilon(B_2)$ для любых $B_1 > 0, B_2 > 0$ в случае быстро меняющейся $N_\varepsilon(T_\varepsilon)$.

Чтобы получить точные асимптотики в более общем случае, нужно рассмотреть экстремальную задачу

$$a_\varepsilon^2(r_\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon^4} \inf_{\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)} \sum_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon} \theta_l^4. \qquad (2.7)$$

Заметим, что решение экстремальной задачи (2.7) имеет вид

$$(\theta_l^*)^2 = \theta_0^2(1 - (c_l/T)^2)_+,$$

где θ_0 и T определяются из соотношений

$$\theta_0^2 \sum_{c_l<T} (1 - (c_l/T)^2) = r_\varepsilon^2,\ \theta_0^2 \sum_{c_l<T} c_l^2(1 - (c_l/T)^2) = 1,\ T \geqslant r_\varepsilon^{-1} \to \infty.$$

Положим

$$w_l = (\theta_l^*)^2\Big(2\sum_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon}(\theta_l^*)^4\Big)^{-1/2}; \quad \sum_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon} w_l^2 = 1/2,$$

и рассмотрим статистики и тесты

$$S_w = \sum_{l\in\mathcal{L}_\varepsilon} w_l((x_l/\varepsilon)^2-1), \quad \psi_{w,H} = \mathbb{1}_{S_w>H}.$$

Тогда из [3] следует (сравните с [5,6]).

Предложение 2.2.

(i) *Если* $a_\varepsilon(r_\varepsilon)\to 0$, *то* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon))\to 1$, *если* $a_\varepsilon(r_\varepsilon)\to\infty$, *то* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon))\to 0$, *при этом состоятельными являются тесты* $\psi_{w,H}$ *при некотором* $H\to\infty$.

(ii) *Пусть* $\sup_l w_l = o(1)$. *Тогда* $\gamma(\Theta_\varepsilon(r_\varepsilon)) = 2\Phi(-a_\varepsilon(r_\varepsilon)/2)+o(1)$, *это соотношение достигается на тестах* $\psi_{w,H}$ *при некотором* H, *таком что* $\limsup H/a_\varepsilon(r_\varepsilon)<1$.

Отметим, что критические радиусы определяются из соотношения

$$a_\varepsilon(r_\varepsilon^*)\asymp 1. \tag{2.8}$$

2.2. Пример: соболевские шары. Пусть

$$c_l^2 = \Big(\sum_{j=1}^s(2\pi l_j)^2\Big)^\sigma, \ \sigma>0, \ l\in\mathbb{Z}^s \quad \text{или} \quad l\in\widehat{\mathbb{Z}}^s.$$

Пусть $H = T^{2/\sigma}/(2\pi)^2$. Тогда считающая функция, определенная соотношением (2.3), имеет вид

$$N_s(T) = \#\Big\{l\in\mathbb{Z}^s : \sum_{j=1}^s l_j^2 < H\Big\} \quad \text{или} \quad N_s^0(T) = \#\Big\{l\in\widehat{\mathbb{Z}}^s : \sum_{j=1}^s l_j^2 < H\Big\}.$$

Заметим, что в этом случае

$$c_{0,s}\stackrel{\Delta}{=}\inf_{l\in\mathbb{Z}_s} c_l = 0, \qquad c_{0,s}^0\stackrel{\Delta}{=}\inf_{l\in\widehat{\mathbb{Z}}_s} c_l = (2\pi)^\sigma s^{\sigma/2}. \tag{2.9}$$

Обозначим через $a_{\varepsilon,s}(r_\varepsilon)$, $a_{\varepsilon,s}^0(r_\varepsilon)$ решения соответствующих экстремальных задач вида (2.7) и через $r_{\varepsilon,s}^*$, $r_{\varepsilon,s}^{*0}$ критические радиусы при тестировании H_0 против $H_1:\ \theta\in\Theta_{\varepsilon,s}(r_\varepsilon)$ или $H_1^0:\ \theta\in\Theta_{\varepsilon,s}^0(r_\varepsilon)$, где $\Theta_{\varepsilon,s}$, $\Theta_{\varepsilon,s}^0$ (см. (2.1)) соответствуют $\mathcal{L}_\varepsilon=\mathbb{Z}^s$ или $\mathcal{L}_\varepsilon=\widehat{\mathbb{Z}}^s$.

Используя методы и результаты работ [5,6], мы получим следующие утверждения.

(i) Пусть $s > 0$ фиксировано. Тогда, если $T \to \infty$, имеем

$$N_s(T) \sim N_s^0(T) \sim H^s B_s, \tag{2.10}$$

где B_s есть объем единичного шара в $\mathbb{R}^s$ и

$$a_{\varepsilon,s}(r_\varepsilon) \sim a_{\varepsilon,s}^0(r_\varepsilon) \sim d(s,\sigma) r_\varepsilon^{2+s/2\sigma} \varepsilon^{-2}. \tag{2.11}$$

(ii) Пусть $s \to \infty,\ T \to \infty,\ H/s \to \infty$. Тогда $N_s(T)$, $N_s^0(T)$ быстро меняются относительно T и

$$\log(N_s(T)) = sG(s,H) + o(s), \quad \log(N_s^0(T)) = sG(s,H) + o(s),$$

где

$$G(s,H) = \frac{1}{2}\log(2\pi e H/s),$$

что дает точные критические радиусы для $s \to \infty,\ s = o(\log(\varepsilon^{-1}))$ (см. [5], теорема 7(2))

$$r_{\varepsilon,s}^* \sim r_{\varepsilon,s}^{*0} \sim C(\sigma) s^{-\sigma/2} \varepsilon^{4\sigma/(4\sigma+s)}. \tag{2.12}$$

(iii) Пусть $s \to \infty,\ T \to \infty, H/s \geqslant b > 0$ и $s/\log(\varepsilon^{-1}) > b > 0$. Ситуации различны для $N_s(T), r_{\varepsilon,s}^*$ и для $N_s^0(T), r_{\varepsilon,s}^{*0}$. А именно, рассмотрим $N_s(T)$ и $r_{\varepsilon,s}^*$. Функция $N_s(T)$ является быстро меняющейся функцией аргумента T. Пусть $H/s \to c \in (0,\infty)$. Тогда

$$\log(N_s(T)) = sHf_1(c) + o(s),$$

откуда следует вид точных критических радиусов при $s \to \infty,\ s \sim c\log(\varepsilon^{-1})$:

$$r_{\varepsilon,s}^* \sim g_1(c)(\log(\varepsilon^{-1}))^{-\sigma/2} \sim g_2(c) s^{-\sigma/2}. \tag{2.13}$$

Здесь $f_1(c)$, $g_1(c)$, $g_2(c)$ – положительные непрерывные функции аргумента $c > 0$.

Если $s \to \infty,\ T \to \infty,\ H/s \to 0$, то

$$\log(N_s(T)) = H\log(2es/H)(1+o(1)) \sim H\log(s/H), \tag{2.14}$$

что влечет вид точных критических радиусов при $s/\log(\varepsilon^{-1}) \to \infty$, $\log(s) = o(\log(\varepsilon^{-1}))$ (см. теорему 8 в работе [5])

$$r_{\varepsilon,s}^* \sim \left(\frac{\log(s) - \log\log(\varepsilon^{-1})}{16\pi^2\log(\varepsilon^{-1})}\right)^{\sigma/2}. \tag{2.15}$$

Если $\log(s) \geqslant b\log(\varepsilon^{-1})),\ b > 0$, то критические радиусы $r_{\varepsilon,s}^*$ отделены от нуля.

Рассмотрим теперь $N_s^0(T)$. Заметим, что $N_s^0(T) = 0$ при $H \leqslant s$, что соответствует тому, что $T < T_0 \overset{\Delta}{=} (2\pi)^\sigma s^{\sigma/2}$ и $N_s^0(T_0+0) = 2^s$. Таким образом, $\Theta_\varepsilon^0(r_\varepsilon) = \varnothing$ при $r_\varepsilon > r_{s,0} \overset{\Delta}{=} T_0^{-1}$. Функция $N_s^0(T)$ является быстро меняющейся относительно T, такого что $T > BT_0$ для некоторого $B > 1$, и мы имеем точные критические радиусы

$$r_{\varepsilon,s}^{*0} = g_0(c)s^{-\sigma/2}, \quad \text{если} \quad s \sim c\log(\varepsilon^{-1}) \quad \text{при} \quad c \leqslant c_0 \overset{\Delta}{=} 4/\log(2). \tag{2.16}$$

Если $s > c_0\log(\varepsilon^{-1})$, то $\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon^0(r_\varepsilon)) \to 1$ для любого $r_\varepsilon \leqslant r_{s,0}$, то есть, успешное обнаружение невозможно. Это означает, что величины $r_{s,0} = g_0(c)s^{-\sigma/2}$ являются точными критическими радиусами при $s \geqslant c_0\log(\varepsilon^{-1})$.

§3. Основные результаты

Пусть $N_s(x)$, $N_s^0(x)$ определяются соотношением (2.3), и $a_{\varepsilon,s}(r_{\varepsilon,s})$, $a_{\varepsilon,s}^0(r_{\varepsilon,s})$ суть значения экстремальных проблем (2.7) с $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathbb{Z}^s$, $\mathcal{L}_\varepsilon = \widehat{\mathbb{Z}}^s$, а $r_\varepsilon = r_{\varepsilon,s}$ соответственно (в предположении **A1** эти величины зависят только от $s = \#(u)$). Введем обозначения

$$L(s,d) = \sqrt{2\log\binom{d}{s}}, \quad \lambda(s,d) = \sqrt{L(s,d)}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon\lambda(s,d). \tag{3.1}$$

Заметим, что

$$\binom{d}{s} \sim \frac{d^s}{s!}, \quad L^2(s,d) \sim 2s\log(d/s) \quad \text{при } d \to \infty,\ s \to \infty,\ s = o(d).$$

Рассмотрим статистики

$$S_{u,w_{s,d}^*} = \sum_{l\in\mathbb{Z}_u} w_l((x_l/\varepsilon)^2 - 1), \quad S_{u,w_{s,d}^{0*}}^0 = \sum_{l\in\widehat{\mathbb{Z}}_u} w_l((x_l/\varepsilon)^2 - 1),$$

и

$$S_{s,w_{s,d}^*} = \max_{u\in\mathcal{U}_{s,d}} S_{u,w_{s,d}^*}, \quad S_{s,w_{s,d}^{0*}}^0 = \max_{u\in\mathcal{U}_{s,d}} S_{u,w_{s,d}^{0*}}^0, \tag{3.2}$$

где $w_{s,d}^* = w(r_{\varepsilon,s,d}^*)$ и $w_{s,d}^{0*} = w(r_{\varepsilon,s,d}^{0*})$ соответствуют решению (экстремальной последовательности) для (2.7) с $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathbb{Z}^s$ и $\mathcal{L}_\varepsilon = \widehat{\mathbb{Z}}^s$ и с величинами $r_{\varepsilon,s,d}^*$, $r_{\varepsilon,s,d}^{0*}$, определяемыми соотношениями

$$a_{\varepsilon,s}(r_{\varepsilon,s,d}^*) \sim L(s,d), \quad a_{\varepsilon,s}(r_{\varepsilon,s,d}^{0*}) \sim L(s,d). \tag{3.3}$$

Критические радиусы (3.3) соответствуют критическим радиусам (2.8) при замене ε на $\tilde{\varepsilon}$ из (3.1).

Отметим, что

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \leqslant c^{-1}_{\varepsilon,0,s}, \quad r^{*0}_{\varepsilon,s,d} \leqslant (c^0_{\varepsilon,0,s})^{-1},$$

где величины $c_{\varepsilon,0,s}$, и $c^0_{\varepsilon,0,s}$ определяются соотношением (2.2) при $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathbb{Z}^s$ и $\mathcal{L}_\varepsilon = \widehat{\mathbb{Z}}^s$ соответственно.

Пусть

$$T_{\varepsilon,s,d} = 1/r^*_{\varepsilon,s,d}, \quad T^0_{\varepsilon,s,d} = 1/r^{0*}_{\varepsilon,s,d}. \tag{3.4}$$

Будем предполагать, что

$$r^{0*}_{\varepsilon,s,d} \to 0. \tag{3.5}$$

Положим

$$r^{**}_{\varepsilon,s,d} = \varepsilon L(s,d). \tag{3.6}$$

Пусть функции $N^0_s(T^0_{\varepsilon,s,d})$ и $N_s(T_{\varepsilon,s,d})$ являются быстро меняющимися относительно $T^0_{\varepsilon,s,d}, T_{\varepsilon,s,d}$, определяемых соотношениями

$$\varepsilon^4 (T^0_{\varepsilon,s,d})^4 N^0_s(T^0_{\varepsilon,s,d}) \sim L(s,d), \quad \varepsilon^4 T^4_{\varepsilon,s,d} N_s(T_{\varepsilon,s,d}) \sim L(s,d), \tag{3.7}$$

Обратим внимание на то, что эти соотношения (и величины) соответствуют (2.5) при замене ε величиной $\tilde{\varepsilon}$ из (3.1). Пусть $r^*_{\varepsilon,s,d}$, $r^{0*}_{\varepsilon,s,d}$ получены из (3.4).

В этих условиях рассмотрим статистики

$$S_{u,T} = \frac{1}{\sqrt{2N_s(T)}} \sum_{l\in\mathbb{Z}_u: c_l<T} ((x_l/\varepsilon)^2 - 1), \tag{3.8}$$

$$S^0_{u,T} = \frac{1}{\sqrt{2N^0_s(T)}} \sum_{l\in\widehat{\mathbb{Z}}_u: c_l<T} ((x_l/\varepsilon)^2 - 1), \tag{3.9}$$

$$S_{s,d,T} = \max_{u\in\mathcal{U}_{s,d}} S_{u,T}, \quad S^0_{s,d,T} = \max_{u\in\mathcal{U}_{s,d}} S^0_{u,T}.$$

Рассмотрим в качестве альтернативы H^0_1. Во-первых, пусть d не слишком велико, а именно

$$L^5(s,d) = o(N^0_s(T^0_{\varepsilon,s,d})).$$

Это условие эквивалентно следующему:

$$r^{0*}_{\varepsilon,s,d} \gg r^{**}_{\varepsilon,s,d}. \tag{3.10}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.5), (3.10). *Тогда*

(i) $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 1$, *если* $\limsup a^0_{\varepsilon,s}(r_{\varepsilon,s})/L(s,d) < 1$.

(ii) $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, *если* $\liminf a^0_{\varepsilon,s}(r_{\varepsilon,s})/L(s,d) > 1$, *при этом состоятельными являются тесты* $\mathbb{1}_{S^0_{s,w^{0*}_{s,d}} > (1+\delta)L(s,d)}$, *для некоторого малого* $\delta > 0$, *где статистики* $S^0_{s,w^{0*}_{s,d}}$ *определены в* (3.2).

(iii) *Пусть* $N^0_s(x)$ *быстро меняется относительно* $T^0_{\varepsilon,s,d}$. *Тогда* $r^{0*}_{\varepsilon,s,d}$ *являются точными критическими радиусами, и верхние границы обеспечиваются тестами* $\mathbb{1}_{S^0_{s,d,T^0_{\varepsilon,s,d}} > (1+\delta)L(s,d)}$ *при некотором малом* $\delta > 0$.

Доказательство базируется на методах [2]. Для нахождения нижних границ (i) рассмотрим априорные распределения

$$\pi_{s,d} = \frac{1}{\#(\mathcal{U}_{s,d})} \sum_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \pi_u,$$

где π_u есть априорное распределение в пространстве коэффициентов Фурье вида

$$\pi_u = \prod_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u} \frac{1}{2}(\delta_{\theta^*_l} + \delta_{-\theta^*_l}).$$

Затем изучается математическое ожидание квадрата усеченного байесовского отношения правдоподобия

$$\frac{dP_{\pi_{s,d}}}{dP_0} = \frac{1}{\#(\mathcal{U}_{s,d})} \sum_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \frac{dP_{\pi_u}}{dP_0},$$

$$\frac{dP_{\pi_u}}{dP_0} = \prod_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u : c_l < T^0_{\varepsilon,s,d}} e^{-(\theta^*_l/\varepsilon)^2/2} \cosh(x_l \theta^*_l / \varepsilon^2).$$

Используется тот факт, что слагаемые в сумме ортогональны. Основным инструментом является лемма 7.4 в [2]. Нижние границы утверждения (iii) получаются аналогично. При этом мы должны использовать π_u следующего вида:

$$\pi_u = \prod_{l \in \widehat{\mathbb{Z}}_u : c_l < T^0_{\varepsilon,s,d}} \frac{1}{2}(\delta_v + \delta_{-v}), \quad v = r^{0*}_{\varepsilon,s,d} \Big/ \sqrt{N^0_s(T^0_{\varepsilon,s,d})},$$

и усечение не требуется.

Для доказательства верхних границ (i) и (ii) нужно изучить поведение тестов $\psi^0_{\varepsilon,s,d} = \mathbb{1}_{S^0_{s,w^{0*}_{s,d}} > (1+\delta)L(s,d)}$. Для оценки ошибки первого рода нужно использовать неравенство

$$\alpha(\psi^0_{\varepsilon,s,d}) \leqslant \sum_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} P_0\left(S^0_{u,w^{0*}_{s,d}} > (1+\delta)L(s,d)\right),$$

где слагаемые оцениваются при помощи неравенств гауссовского типа для вероятностей больших уклонений: для любого $\delta > 0$ и такого $T \to \infty$, что $T \max_l w^0_l = o(1)$ (достаточно $T^2 = o(N^0_s(T^0_{\varepsilon,s,d}))$),

$$P_0(S^0_{u,w^{0*}_{s,d}} > T) \leqslant \exp(-T^2/2(1+\delta)), \tag{3.11}$$

см. [2, предложение 7.1] (условия предложения выполнены при (3.10)). Изучение ошибки второго рода базируется на оценках математического ожидания статистики

$$\inf_{\theta \in \Theta^0_{\varepsilon,u}(r_\varepsilon)} E_{\varepsilon,\theta}(S_{u,w^{0*}_{s,d}}) \geqslant a_\varepsilon(r_\varepsilon).$$

см. [2, 4.7]. Верхние границы (iii) получаются аналогично. □

Из теоремы 3.1 следует, что $r^{0*}_{\varepsilon,s,d}$ являются точными критическими радиусами в рассматриваемой задаче при условии, что (3.10) выполнено. Напомним, что эти критические радиусы соответствуют критическим радиусам $r^{0*}_{\varepsilon,s}$, определенным соотношениями (2.4), (2.5) для фиксированного (известного) u с увеличением ε в λ раз.

Рассмотрим теперь случай достаточно больших d, а именно

$$N^0_s(T^0_{\varepsilon,s,d}) = O(L^5(s,d)),$$

что эквивалентно

$$r^{0*}_{\varepsilon,s,d} = O(r^{**}_{\varepsilon,s,d}). \tag{3.12}$$

Теорема 3.2.
(i) *Пусть* $r^{**}_{\varepsilon,s,d} c^0_{0,s} < 1$. *Тогда* $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 1$, *если* $\limsup r_{\varepsilon,s}/r^{**}_{\varepsilon,s,d} < 1$.
(ii) *Предположим* (3.12). *Тогда существует такая константа* $A \geqslant 1$, *что* $\gamma(\mathcal{F}^0_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, *если* $\liminf r_{\varepsilon,s}/r^{**}_{\varepsilon,s,d} > A$, *при этом состоятельными являются тесты* $\mathbb{1}_{S^0_{s,w^*} > (1+\delta)L(s,d)}$ *при некотором* $\delta > 0$, *где* $w^* = w(r^{**}_{\varepsilon,s,d})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1, но несколько проще, сравните с [4]. Для доказательства нижних границ рассмотрим априорные распределения

$$\pi_{s,d} = \frac{1}{\#(\mathcal{U}_{s,d})} \sum_{u\in\mathcal{U}_{s,d}} \delta_{\theta_u},$$

где $\theta_u \in \Theta_u^0(r_\varepsilon)$, то есть $L_\varepsilon = \widehat{Z_u}$ в (2.1). Для доказательства верхних границ используются негауссовские неравенства для вероятностей больших уклонений (см. [4, лемма 4.1]).

Из теоремы 3.2 следует, что $r^{**}_{\varepsilon,s,d}$ являются критическими радиусами в рассматриваемой задаче при условии (3.12) и $r^{**}_{\varepsilon,s,s}c^0_{0,s} < 1$.

Комбинируя теоремы 3.1, 3.2, мы получаем критические радиусы

$$r^{sep0}_{\varepsilon,s,d} = \max\left(r^{0*}_{\varepsilon,s,d},\ \min(r^{**}_{\varepsilon,s,d}, (c^0_{0,s})^{-1})\right).$$

Рассмотрим теперь в качестве альтернативы H_1^{0+}. Пусть $w_k^{0*} = w(r^{0*}_{\varepsilon,k,d})$, где величина $r^{0*}_{\varepsilon,k,d}$ определяется из соотношения: $a^0_{\varepsilon,k}(r^{0*}_{\varepsilon,k,d}) \sim L(k,d)$. Аналогично (3.4), положим $T^0_{\varepsilon,k,d} = 1/r^{0*}_{\varepsilon,k,d}$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\min_{1\leqslant k\leqslant s} r^{0*}_{\varepsilon,k,d}/r^{**}_{\varepsilon,k,d} \to \infty$. *Тогда*

(i) $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 1$, *если* $\limsup \min_{1\leqslant k\leqslant s} a^0_{\varepsilon,k}(r_{\varepsilon,k})/L(k,d) < 1$.

(ii) $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 0$, *если* $\liminf \min_{1\leqslant k\leqslant s} a^0_{\varepsilon,k}(r_{\varepsilon,k})/L(k,d) > 1$, *при этом состоятельными являются тесты*

$$\psi_\varepsilon = \mathbb{1}_{\max_{1\leqslant k\leqslant s} S^0_{k,w_k^{0*}}/L(k,d) > (1+\delta)}$$

при некотором $\delta > 0$.

(iii) *Пусть функция* $N_s^0(x)$ *быстро меняется относительно* $T^0_{\varepsilon,s,d}$. *Тогда* $\gamma(\mathcal{F}^{0+}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, *если* $\liminf \min_{1\leqslant k\leqslant s} r_{\varepsilon,k}/r^{0*}_{\varepsilon,k,d} > 1$, *при этом состоятельными являются тесты* $\mathbb{1}_{S^0_{s,d,T^0_{\varepsilon,s,d}} > (1+\delta)L(s,d)}$, *для некоторого малого* $\delta > 0$.

Доказательство. Нижние границы следуют из теоремы 3.1. Для получения верхних границ достаточно изучить поведение ошибки первого рода тестов ψ_ε. Имеем

$$\alpha(\psi_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{s} \sum_{u\in\mathcal{U}_{k,d}} P_0(S^0_{k,w_k^{0*}} > L(k,d)(1+\delta)).$$

Используя аналогичные (3.11) неравенства гауссовского типа для вероятностей больших уклонений, имеем для некоторых $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$:

$$\alpha(\psi_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{s} \binom{d}{k}^{-\delta_1} \leqslant \sum_{k=1}^{s} \exp(-\delta_2 k \log(d/k)) \to 0, \quad \text{если } s = o(d).$$

Рассмотрим теперь альтернативу H_1. В этом случае мы даем только верхние границы. Предположим сначала, что

$$L^5(s,d) = o(N_s(T_{\varepsilon,s,d})),$$

что эквивалентно

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \gg r^{**}_{\varepsilon,s,d}. \tag{3.13}$$

Теорема 3.4. *Пусть выполнено* (3.13). *Тогда* $\gamma(\mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, *если* $\liminf a_\varepsilon(r_\varepsilon, s)/L(s,d) > 1$, *при этом состоятельными являются тесты* $\mathbb{1}_{S_{s,w^*_{s,d}} > (1+\delta)L(s,d)}$, *для некоторого малого* $\delta > 0$. *Пусть* $N_s(x)$ *является быстро меняющейся функцией относительно* $T_{\varepsilon,s,d}$. *Тогда* $\gamma(\mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, *если* $\liminf r_{\varepsilon,s}/r^*_{\varepsilon,s,d} > 1$, *состоятельны тесты* $\mathbb{1}_{S_{s,d,T_{\varepsilon,s,d}} > (1+\delta)L(s,d)}$, *для некоторого малого* $\delta > 0$.

Доказательство аналогично доказательству верхних границ теоремы 3.1.

Рассмотрим теперь случай достаточно больших d, а именно

$$N_s(T_{\varepsilon,s,d}) = O(L^5(s,d)),$$

что эквивалентно

$$r^*_{\varepsilon,s,d} = O(r^{**}_{\varepsilon,s,d}). \tag{3.14}$$

Теорема 3.5. *Предположим* (3.14). *Тогда существует такая постоянная* $A > 0$, *что* $\gamma(\mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 0$, *если* $\liminf r_{\varepsilon,s}/r^{**}_{\varepsilon,s,d} > A$, *при этом состоятельными являются тесты* $\mathbb{1}_{S_{s,w^*} > BL(s,d)}$, *для некоторого* $B > 0$, *где* $w^* = w(r^{**}_{\varepsilon,s,d})$.

Доказательство аналогично доказательству верхних границ теоремы 3.2.

Комбинируя теоремы 3.4 и 3.5, мы получаем различимость для $r_{\varepsilon,s} \gg r^{sep}_{\varepsilon,s,d}$, где

$$r^{sep}_{\varepsilon,s,d} = \max(r^*_{\varepsilon,s,d},\ r^{**}_{\varepsilon,s,d}).$$

Наконец рассмотрим альтернативу H_1^+. Пусть $w_k^* = w(r^*_{\varepsilon,k,d})$, где $r^*_{\varepsilon,k,d}$ находится из соотношения: $a_{\varepsilon,k}(r^*_{\varepsilon,k,d}) \sim L(k,d)$. Положим $T_{\varepsilon,k,d} = 1/r^*_{\varepsilon,k,d}$.

Теорема 3.6. *Пусть* $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant s} r^*_{\varepsilon,k,d}/r^{**}_{\varepsilon,k,d} \to \infty$. *Тогда* $\gamma(\mathcal{F}^+_{\mathbf{c},s}(r_\varepsilon)) \to 0$, *если* $\liminf \min_{1\leqslant k\leqslant s} a_\varepsilon(r_{\varepsilon,k})/L(k,d) > 1$, *при этом состоятельными являются тесты* $\mathbb{1}_{\max_{1\leqslant k\leqslant s} S_{k,w^*_{k,d}}/L(k,d)>(1+\delta)}$ *при некотором* $\delta > 0$.

Доказательство аналогично доказательству верхних границ теоремы 3.3.

Замечание 3.1. Мы не приводим здесь общие нижние границы для альтернатив H_1, H_1^+. Часто эти нижние границы следуют из нижних границ для альтернатив H_1^0, H_1^{0+}, вложений (1.11), (1.12) и неравенств (1.13), (1.14). В частности, если $a_{\varepsilon,s}(r_\varepsilon) \sim a^0_{\varepsilon,s}(r_\varepsilon)$ при $r_\varepsilon \asymp r^{0*}_{\varepsilon,s}$, то эти нижние границы являются точными. Это следует из $N^0_s(x) \sim N_s(x)$, $x \to \infty$. Мы будем это использовать для соболевских шаров. Некоторые дополнительные нижние границы для соболевских шаров будут приведены в разделе 4.3.

§4. Применение результатов к соболевским шарам

Напомним $\lambda(s,d) = \sqrt{L(s,d)}$, $\tilde\varepsilon = \varepsilon\lambda(s,d)$, $r^{**}_{\varepsilon,s,d} = \varepsilon L(s,d)$. Из (2.11), (2.12), (2.13), (2.16) и (3.3) следует, что

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \sim r^{*0}_{\varepsilon,s,d} \sim C(s,\sigma)\tilde\varepsilon^{4\sigma/(4\sigma+s)} \text{ при фиксированном } s; \tag{4.1}$$

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \sim r^{*0}_{\varepsilon,s,d} \sim C(\sigma)s^{-\sigma/2}\tilde\varepsilon^{4\sigma/(4\sigma+s)} \text{ при } s \to \infty,\ s = o(\log(\tilde\varepsilon^{-1})). \tag{4.2}$$

Эти критические радиусы соответствуют критическим радиусам $r^*_{\varepsilon,s}, r^{0*}_{\varepsilon,s}$ в форме (2.12), увеличенным в $\lambda^{4\sigma/(4\sigma+s)}(s,d)$ раз. Имеем также

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \asymp r^{*0}_{\varepsilon,s,d} \asymp s^{-\sigma/2} \quad \text{при} \quad s \asymp \log(\tilde\varepsilon^{-1}),$$

и

$$r^{*0}_{\varepsilon,s,d} = g_0 s^{-\sigma/2} \stackrel{\Delta}{=} r_{s,0} \quad \text{при} \quad s \geqslant c_0\log(\tilde\varepsilon^{-1}), \tag{4.3}$$

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \sim \left(\frac{\log(s) - \log\log(\tilde\varepsilon^{-1})}{16\pi^2\log(\tilde\varepsilon^{-1})}\right)^{\sigma/2} \tag{4.4}$$

$$\text{при } s \gg \log(\tilde\varepsilon^{-1}),\ \log(s) = o(\log(\tilde\varepsilon^{-1})).$$

Рассмотрим альтернативу H_1^0. Напомним что, если $r > r_{s,0}$, то $\Theta^0_{\varepsilon,s,d}(r) = \varnothing$ и $\gamma(\Theta^0_{\varepsilon,s,d}(r)) = 0$. Кроме того, если $r_\varepsilon < \min(r^{**}_{\varepsilon,s,d}, r_{s,0})$, то $\gamma(\Theta^0_{\varepsilon,s,d}(r_\varepsilon)) \to 1$. Следовательно, нас интересует случай

$$r^{**}_{\varepsilon,s,d} < r_{s,0},$$

что эквивалентно

$$s^{\sigma/2}\lambda^2(s,d) < g_0\varepsilon^{-1}, \tag{4.5}$$

поскольку в противном случае $r_{s,0}$ являются точными критическими радиусами. При (4.5) получаем точные критические радиусы из теорем 3.1–3.3. В частности, при фиксированном s имеем:

$$r^{sep}_{sharp} = \begin{cases} r^{0*}_{\varepsilon,s,d} & \text{при} \quad \varepsilon^{-s/(2\sigma+s)} \gg L(s,d), \\ r^{**}_{\varepsilon,s,d} & \text{при} \quad \varepsilon^{-s/(2\sigma+s)} = O(L(s,d)). \end{cases}$$

Соответствующие критические радиусы можно получить и для H_1^{0+}.

Для H_1, имеем различимость из теорем 3.4, 3.5, при $r_{\varepsilon,s} \gg r^{sep}_{\varepsilon,s,d} = \max(r^*_{\varepsilon,s,d}, r^{**}_{\varepsilon,s,d})$. Кроме того, у нас есть условие различимости $\liminf r_{\varepsilon,s}/r^*_{\varepsilon,s,d} > 1$ для случая $r^*_{\varepsilon,s,d} \gg r^{**}_{\varepsilon,s,d}$.

Ниже мы покажем, что эти радиусы являются для H_1 точными. Соответствующие критические радиусы мы получим и для H_1^+, по крайней мере, при $s \ll \log(\tilde{\varepsilon}^{-1})$.

4.1. Фиксированное s. Пусть $s \geqslant 1$ фиксировано. Предположения (3.5) и (4.5) справедливы, если выполнено

$$r^{**}_{\varepsilon,s,d} \asymp \tilde{\varepsilon}\sqrt[4]{\log(d)} \asymp \varepsilon\sqrt{\log(d)} \to 0 \quad (\text{при фиксированном } s). \tag{4.6}$$

Также (3.10) выполнено, если справедливо соотношение

$$\varepsilon^2(\log(d))^{1+2\sigma/s} = o(1), \tag{4.7}$$

которое влечет (4.6). Заметим, что (3.12) справедливо при

$$\liminf \varepsilon^2(\log(d))^{1+2\sigma/s} > 0. \tag{4.8}$$

Учитывая замечание 3.1, мы получаем из теоремы 3.1 следующие результаты для соболевских шаров. При выполнении (4.7) семейство

$$r^*_{\varepsilon,s,d} = c(s,\sigma)(\varepsilon^4\log(d))^{\sigma/(4\sigma+s)} \tag{4.9}$$

является семейством точных критических радиусов для альтернатив H_1^0 и H_1. Если (4.7) не выполняется, то мы получаем критические радиусы

$$r^{sep}_{\varepsilon,s,d} = \max(r^*_{\varepsilon,s,d}, \varepsilon\sqrt{\log(d)}) \tag{4.10}$$

для H_1^0 и для H_1.

Для H^{0+} и для H^+ семейство $\{r^*_{\varepsilon,k,d},\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$, определенное в (4.9), является семейством точных адаптивных критических радиусов при выполнении условия

$$\max_{1\leqslant k\leqslant s} \varepsilon^2(\log(d))^{1+2\sigma/k} = \varepsilon^2(\log(d))^{1+2\sigma} = o(1). \qquad (4.11)$$

Если (4.11) не выполнено, тогда семейство $\{r^{sep}_{\varepsilon,k,d},\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$, определенное в (4.10), также является семейством адаптивных критических радиусов для H^{0+} и для H^+.

Таким образом, для нас нет разницы при тестировании H_0 против альтернатив H_1^0 и H_1. Кроме того, мы не теряем в порядке при адаптации по k.

4.2. Случай $s \to \infty,\ \log\log(d) = o(s)$. Пусть

$$s \to \infty, \quad \log\log(d) = o(s), \quad s = o(d). \qquad (4.12)$$

Напоминая, что $\tilde\varepsilon = \varepsilon\lambda(s,d), \lambda^4(s,d) \sim 2s\log(d/s)$, замечаем, что в условиях (4.12)

$$\log(\tilde\varepsilon^{-1})/s = \log(\varepsilon^{-1})/s + o(1), \quad \lambda^{4\sigma/(4\sigma+s)}(s,d) \to 1. \qquad (4.13)$$

Мы должны предполагать, что

$$\log(s) = o(\log(\varepsilon^{-1})), \quad \text{для} \quad H_1,\ H_1^+, \qquad (4.14)$$

так как успешное обнаружение невозможно без этого предположения даже при известном u (см. [5, теорема 8(2)]).

Пусть $s = o(\log(\tilde\varepsilon^{-1}))$ (это то же самое, что $s = o(\log(\varepsilon^{-1}))$, в силу (4.13)). Тогда из (4.2), (4.13) получим

$$r^*_{\varepsilon,s,d} \sim r^{0*}_{\varepsilon,s,d} \sim r^*_{\varepsilon,s},$$

где $r^*_{\varepsilon,s}$ определяется соотношением (2.12). Таковы точные критические радиусы в случаях H_1^0, H_1.

Если $s \asymp \log(\varepsilon^{-1})$, то $r^*_{\varepsilon,s,d} \asymp r^{0*}_{\varepsilon,s,d} \asymp s^{-\sigma/2} \to 0$. Пусть

$$s \gg \log(\varepsilon^{-1}). \qquad (4.15)$$

Тогда $r^{0*}_{\varepsilon,s,d} = g_0 s^{-\sigma/2}$, и это критические радиусы для H_1^0. Для H_1 введем более сильное предположение, чем (4.12):

$$s \to \infty, \quad \log\log(d) = o(\log(s)), \quad s = o(d). \qquad (4.16)$$

При выполнении (4.14), (4.15), (4.16) имеем

$$\log(\tilde\varepsilon^{-1}) \sim \log(\varepsilon^{-1}), \quad \log\log(\tilde\varepsilon^{-1}) = \log\log(\varepsilon^{-1}) + o(1),$$

из чего следует, что $r^*_{\varepsilon,s,d} \sim r^*_{\varepsilon,s}$ имеют вид (2.15), и справедливо соотношение $r^*_{\varepsilon,s,d} \to 0$. Это означает, что $r^*_{\varepsilon,s}$ вида (2.15) являются точными критическими радиусами для H_1 при выполнении условий (4.15), (4.16).

Аналогичные результаты справедливы также для H_1^{0+}, H_1^{+}.

4.3. Альтернатива H_1 при $\log(s) = O(\log\log(d))$, $s \gg \log(\tilde\varepsilon^{-1})$: нижние границы.

Предложение 4.1. *Рассмотрим альтернативу H_1 для соболевских шаров при $\log(s) = O(\log\log(d))$, $s \gg \log(\tilde\varepsilon^{-1})$, $\log(s) = o(\log(\tilde\varepsilon^{-1}))$. Пусть $r^*_{\varepsilon,s,d}$ определяются выражением (2.15) с заменой ε на $\tilde\varepsilon$. Если $\limsup r_{\varepsilon,s}/r^*_{\varepsilon,s,d} < 1$, то $\gamma(\mathcal{F}_{\mathbf{c},s}(r_{\varepsilon,s})) \to 1$.*

Предложение 4.1 в комбинации с верхними границами из теоремы 3.4 означает, что величины $r^*_{\varepsilon,s,d}$, определенные выражением (2.15) с заменой ε на $\tilde\varepsilon$, являются точными критическими радиусами в рассматриваемом случае.

§5. Приложение: доказательство предложения 4.1

Пусть целочисленное семейство $H(T) = H_\varepsilon(T)$ определено соотношением $H(T) = [T^{2/\sigma}(2\pi)^{-2}]$, где $T = r^{-1}_{\varepsilon,s}$. Для $u \in \mathcal{U}_{s,d}$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_u(H) \subset \mathbb{Z}_u$:

$$\mathcal{M}_u(H) = \Big\{ l \in \mathbb{Z}_u : l_j \in \{0, \pm 1\}, \sum_{j=1}^d |l_j| = H,\ l_j = 0 \text{ при } j \notin u \Big\}.$$

Имеем для $H > s:\ \#(\mathcal{M}_u(H)) = 0$. Если $H \leqslant s$, то

$$\begin{gathered} \#(\mathcal{M}_u(H)) = 2^H \binom{s}{H} \triangleq M_s(H), \\ \mathcal{M}_{u_1}(H) \cap \mathcal{M}_{u_2}(H) = \mathcal{M}_{u_1 \cap u_2}(H). \end{gathered} \tag{5.1}$$

Пусть $k = \#(u_1 \cap u_2)$. Если $k \geqslant H$, то

$$\#(\mathcal{M}_{u_1 \cap u_2}(H)) = 2^H \binom{k}{H} = M_k(H), \tag{5.2}$$

а при $k < H$ имеем $M_k(H) = 0$. Также $c_l^2 = (2\pi)^{2\sigma} H^\sigma \leqslant T^2$ для любого $l \in \mathcal{M}_u(H)$.

Введем вероятностную меру

$$\pi = \frac{1}{D} \sum_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \pi_u, \quad D = \binom{d}{s},$$

где $\pi_u(d\theta) = \prod_{l \in \mathbb{Z}_u} \pi_l(d\theta_l)$ – заданная на пространстве коэффициентов Фурье вероятностная мера следующего вида

$$\pi_l = \begin{cases} \delta_0, & l \notin \mathcal{M}_u(H), \\ (\delta_{-v} + \delta_v)/2, & l \in \mathcal{M}_u(H), \end{cases} \quad v = v_\varepsilon = \frac{r_{\varepsilon,s}}{\sqrt{M_s(H)}},$$

которая соответствует случайной функции $f(t) = v \sum_{l \in \mathcal{M}_u(H)} \xi_l \psi_l(t)$ с независимыми одинаково распределенными случайными величинами Радемахера ξ_l. Поскольку с π_u-вероятностью 1

$$\sum_l \theta_l^2 = v^2 M_s(H) = r_{\varepsilon,s}^2, \quad \sum_l c_l^2 \theta_l^2 = (2\pi)^{2\sigma} H^\sigma v^2 M_s(H) \leqslant T^2 r_{\varepsilon,s}^2 = 1,$$

получаем, что $\pi_u(\mathcal{F}_{\mathbf{c},u}) = 1$.

Введем величины

$$a_\varepsilon^2(H) = \frac{v^4 M_s(H)}{2\varepsilon^4} = \frac{r_{\varepsilon,s}^4}{2\varepsilon^4 M_s(H)} \asymp (\varepsilon^4 H^{2\sigma} M_s(H))^{-1}.$$

Заметим, что при $\limsup r_{\varepsilon,s}/r^*_{\varepsilon,s,d} < 1$ имеем

$$a_\varepsilon^2(H) = o(L^2(s,d)).$$

Действительно, обозначим $H^* = H(T_{\varepsilon,s,d})$, $T_{\varepsilon,s,d} = 1/r^*_{\varepsilon,s,d}$. Так как $\log(M_s(H)) \sim H \log(s/H)$, когда $H \to \infty$, $H = o(s)$ и $s \gg \log(\tilde{\varepsilon}^{-1})$, можно видеть, что соотношение $a_\varepsilon^2(H^*) \asymp L^2(s,d)$ означает, что $H^* \sim 4\log(\tilde{\varepsilon}^{-1})/\log(s/\log(\tilde{\varepsilon}^{-1}))$, что соответствует $r_{\varepsilon,s} \sim r^*_{\varepsilon,s,d}$. Соотношению $\limsup r_{\varepsilon,s}/r^*_{\varepsilon,s,d} < 1$ соответствует $\liminf H/H^* > 1$. Функция $f_\varepsilon(H) = \varepsilon^4 H^{2\sigma} M_s(H)$ возрастает и быстро меняется относительно $H \to \infty$, $H = o(s)$, из чего и следует рассматриваемое соотношение.

Отношение правдоподобия имеет вид

$$\frac{dP_\pi}{dP_0} = \frac{1}{D} \sum_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \frac{dP_{\pi_u}}{dP_0}, \quad \frac{dP_{\pi_u}}{dP_0}(x) = \prod_{l \in \mathcal{M}_u(H)} \exp(-v^2/2\varepsilon^2) \cosh(v x_l/\varepsilon^2).$$

Ясно, что $E_0(\frac{dP_\pi}{dP_0}) = 1$. Достаточно проверить, что

$$\Delta = E_0 \left(\frac{dP_\pi}{dP_0} \right)^2 \to 1.$$

Имеем

$$\Delta = \frac{1}{D^2} \sum_{u_1 \in \mathcal{U}_{s,d}, u_2 \in \mathcal{U}_{s,d}} E_0 \left(\frac{dP_{\pi_{u_1}}}{dP_0} \frac{dP_{\pi_{u_2}}}{dP_0} \right),$$

и, поскольку

$$E_0(\exp(-v^2/2\varepsilon^2) \cosh(vx_l/\varepsilon^2))^2 = \cosh(v^2/\varepsilon^2) \leqslant \exp(v^4/2\varepsilon^4),$$

получаем

$$E_0 \left(\frac{dP_{\pi_{u_1}}}{dP_0} \frac{dP_{\pi_{u_2}}}{dP_0} \right) = E_0(\prod_{l \in \mathcal{M}_{u_1}(H) \cup \mathcal{M}_{u_2}(H)} \exp(-v^2/2\varepsilon^2) \cosh(vx_l/\varepsilon^2))$$
$$\leqslant \exp \left(v^4 \#(\mathcal{M}_{u_1}(H) \cap \mathcal{M}_{u_2}(H))/2\varepsilon^4 \right).$$

Используя (5.1), (5.2), получаем

$$\Delta \leqslant \Delta_1 \triangleq \frac{1}{D^2} \sum_{u_1 \in \mathcal{U}_{s,d}, u_2 \in \mathcal{U}_{s,d}} \exp \left(v^4 M_{\#(u_1 \cap u_2)}(H))/2\varepsilon^4 \right).$$

В силу симметрии, можно зафиксировать $u_0 = \{1, \cdots, s\} \subset \{1, \cdots d\}$ и

$$\Delta_1 = \frac{1}{D} \sum_{u \in \mathcal{U}_{s,d}} \exp \left(v^4 M_{\#(u_0 \cap u)}(H))/2\varepsilon^4 \right) = \sum_{k=0}^{s} P_{s,d}(k) \exp(v^4 M_k(H)/2\varepsilon^4),$$

где $P_{s,d}(k) = \binom{s}{k}\binom{d-s}{s-k}/D$ являются вероятностями гипергеометрического распределения $\mathcal{HG}_{d,s,s}$. Таким образом,

$$\Delta \leqslant E_{\mathcal{HG}} \left(\exp(v^4 M_k(H)/2\varepsilon^4) \right), \quad k \sim \mathcal{HG}_{d,s,s}.$$

В силу предельной связи гипергеометрического распределения $\mathcal{HG}_{d,s,s}$ и биномиального распределения $B(s,p)$ с $p = s/d$, получаем

$$\Delta \leqslant E_B \left(\exp(v^4 M_k(H)/2\varepsilon^4) \right) (1 + o(1)), \quad k \sim B(s,p).$$

Оценим биномиальные математические ожидания. Сначала заметим, что при $k \geqslant H$

$$v^4 M_k(H)/2\varepsilon^4 = a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s), \quad S_H(k,s) = \binom{k}{H} \Big/ \binom{s}{H}.$$

При $k < H$ справедливо равенство $v^4 M_k(H)/2\varepsilon^4 = 0$. Так как $S_H(r-1, r) = (1 - H/r) \leqslant \exp(-H/r),\ H < r$, мы имеем

$$S_H(k,s) \leqslant \exp\Big(-H \sum_{r=k+1}^{s} r^{-1}\Big).$$

Заметим, что

$$\log((s+1)/(k+1)) = \int_{k+1}^{s+1} \frac{dr}{r} < \sum_{r=k+1}^{s} r^{-1} < \int_{k}^{s} \frac{dr}{r} = \log(s/k),$$

что при $s \geqslant k \to \infty$ влечет

$$S_H(k,s) \leqslant (k/s)^{H+o(H)}.$$

Возьмем $k = k_0 = \max(H-1, [s/C])$, где $\log(C) = (\log(d/s))^{1/2}$. Если $k_0 \geqslant H$, то для любого $H \leqslant k \leqslant k_0$ из предположений относительно s и d при $H \to \infty$ получим

$$a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s) \leqslant a_\varepsilon^2(H) S_H(k_0,s) = o\Big(s\log(d/s) C^{-H+o(H)}\Big) \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$E_B\left(\exp(a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s)) \mathbb{1}_{k \leqslant k_0}\right) \leqslant 1 + o(1).$$

Достаточно показать, что

$$\begin{aligned}\Delta_2 &\stackrel{\Delta}{=} E_B\left(\exp(a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s)) \mathbb{1}_{k > k_0}\right)\\ &= \sum_{k=k_0+1}^{s} P_{s,p}(k) \exp(a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s)) = o(1),\end{aligned}$$

где $P_{s,p}(k) = \binom{s}{k} p^k (1-p)^{s-k}$ – биномиальные вероятности. Заметим, что $\log(C) = o(\log(p^{-1}))$. Из леммы 5.3 в [1] следует, что

$$\log(P_{s,p}(k)) \leqslant k\log(p)(1+o(1)), \quad k > s/C.$$

Поэтому

$$P_{s,p}(k) \exp(a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s)) \leqslant \exp(A(k)),$$

где для некоторого $\delta_\varepsilon = o(1),\ \delta_\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} A(k) &\leqslant a_\varepsilon^2(H) S_H(k,s) - k\log(d/s)(1+o(1))\\ &= k\log(d/s)\left(\delta_\varepsilon s S_H(k,s)/k - (1+o(1))\right)\\ &\leqslant -k\log(d/s)(1+o(1)),\end{aligned}$$

поскольку $S_H(k,s) \leqslant (k/s)^{H+o(H)}$. Таким образом, мы получаем

$$\Delta_2 \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{s} (s/d)^{k+o(k)} \to 0.$$

Предложение 4.1 отсюда следует. $\square$

Литература

1. C. Butucea, Yu. I. Ingster, *Detection of a sparse submatrix of a high-dimensional noisy matrix.* Bernoulli (2012).
2. G. Gayraud, Yu. I. Ingster, *Detection of sparse additive variable functions.* — Electronic J. Statist. **6** (2012), 1409–1448.
3. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-Fit Testing under Gaussian Model.*— Lect. Notes Statist. **169** (2003).
4. Yu. I. Ingster, O. Lepski, *On multichannel signal detection.* — Math. Methods Statist. **12** (2003), 247–275.
5. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *On estimation and detection of smooth function of many variables.* — Math. Methods Statist. **14** (2005), 299–331.
6. Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина, *Оценивание и проверка гипотез для функций из тензорных произведений пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 180–218.

Ingster Yu.I., Suslina I. A. Detection of a sparse-variable function.

We observe an unknown d-variable function $f = f(t),\ t = (t_1, \dots, t_d) \in [0,\,1]^d,\ f \in L_2([0,\,1]^d)$ in Gaussian white noise of level $\varepsilon > 0$. We test the null hypothesis $H_0:\ \ f = 0$ against the alternative H_1. Under the alternative, we suppose that unknown function is bounded away from zero:

$$\|f\| \geqslant r_\varepsilon,$$

for some positive family $r_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$. Moreover, we assume that unknown d-variable f is a function of a smaller number of variables s (“sparse variable” function), and this function satisfies some regularity constraints. We also consider the problem of adaptation in $k = 1, \dots, s$. We assume that $d = d_\varepsilon \to \infty$. The integer $s \in \mathbb{N}$ could be fixed or $s = s_\varepsilon \to \infty,\ s = o(d)$. We study the minimax error probabilities and obtain the minimax separation rates that provide distinguishability in the problems. Then, we apply the

results obtained for the case of the alternatives from the Sobolev balls with the remote L_2-ball.

Ст.-Петербургский Национальный
исследовательский Университет
информационных технологий,
механики и оптики,
Кронверкский проспект, дом 49,
197101 Санкт-Петербург
E-mail: isuslina@mail.ru

Поступило 22 октября 2013 г.