Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ σ

§1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geqslant 0$, а σ – комплексный параметр, удовлетворяющий условию $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$. Для уравнения (1) мы рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Решение этой задачи есть

$$u(t, x) = \frac{1}{\sigma^d (2\pi t)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x + y)\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\, dy, \tag{3}$$

что легко проверяется непосредственно. В случае, когда σ – вещественное число, решение задачи (1), (2) (при $d = 1, 2, 3$) имеет простой физический смысл – оно описывает эволюцию распределения температуры. Именно, если φ – распределение температуры в пространстве в нулевой момент времени, то $u(t, \cdot)$ есть распределение температуры в момент времени t. Другой интересный случай – это случай $\sigma^2 = i$, тогда уравнение (1) принимает вид

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\Delta u. \tag{4}$$

Ключевые слова: предельная теорема, уравнение Шрёдингера, мера Фейнмана, случайное блуждание, эволюционное уравнение.

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00577а и НШ-1216.2012.1 и Программы фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы математики”. Работа второго автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-01-00457а и НШ-357.2012.1. Работа третьего автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-01-00215а и НШ-357.2012.1.

Уравнение (4) появляется в квантовой механике и носит название уравнения Шрёдингера для свободной частицы в координатном представлении (здесь используется система единиц, в которой постоянная Планка $h = 1$ и масса частицы $m = 1$). Для каждого $t \geqslant 0$ неизвестная функция $u(t, \cdot)$ имеет смысл волновой функции свободной квантовой частицы. В соответствии с формализмом квантовой механики (подробнее см. [1]), волновая функция ψ есть квадратично суммируемая комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию $\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Функция $|\psi(x)|^2$ является плотностью вероятностного распределения, а $\int\limits_A |\psi(x)|^2 dx$ физически интерпретируется как вероятность нахождения частицы в области A.

Таким образом, параметр σ в уравнении (1) связывает между собой уравнения теплопроводности и Шрёдингера.

Далее, в случае, когда σ – вещественное число, фундаментальное решение задачи Коши (1), (2)

$$p(t, y) = \frac{1}{\sigma^d (2\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}$$

представляет собой вероятностное (нормальное) распределение, а само решение задачи Коши имеет простой вероятностный смысл, именно, представляется в виде математического ожидания функционала от винеровского процесса

$$u(t, x) = \mathbf{E}\, \varphi\big(x + \sigma w(t)\big) = \mathbf{E}\, \varphi(x + \sigma\sqrt{t}\xi), \tag{5}$$

где $w(t)$ – d-мерный стандартный винеровский процесс, а ξ – стандартный d-мерный гауссовский вектор.

Если $\operatorname{Im}\sigma \neq 0$, то (3) не есть интеграл от функции $\varphi(x+y)$ по вероятностной мере, а (5), вообще говоря, не имеет смысла. Тем не менее, вероятностную трактовку можно сохранить, если предположить, что функция φ аналитически продолжается с $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{C}^d$ до целой функции своего аргумента, а в формуле (5) мы понимаем подстановку комплексной величины в функцию вещественного аргумента как подстановку в аналитическое продолжение функции. Поясним на простом одномерном примере основную идею предлагаемого подхода.

Рассмотрим для комплексного σ, $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, интеграл

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy, \tag{6}$$

который получается, если положить в (3) $x = 0,\ t = 1$. Данный интеграл для невещественного σ не имеет явного вероятностного смысла, так как не является математическим ожиданием вида $\mathbf{E}\varphi(\xi)$ ни для какой случайной величины ξ.

Предположим теперь дополнительно, что функция φ ограничена на $\mathbb{R}$ и одновременно продолжается до целой аналитической функции экспоненциального типа. Тогда, поворачивая контур интегрирования, мы получаем

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(y)\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\sigma y)\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Последнее выражение представляет собой математическое ожидание

$$\mathbf{E}\,\psi(\eta),$$

где η – стандартная нормальная случайная величина, а ψ – функция, которая представляет собой сужение на прямую σt, $t \in \mathbb{R}$, аналитического продолжения функции φ.

Таким образом, мы представили (6) в виде математического ожидания, но уже от другой функции. Для примера, если мы возьмем $\varphi(y) = \sin y$ и возьмем $\sigma = e^{i\frac{\pi}{4}}$ то, как легко сосчитать,

$$\psi(y) = \sin\frac{y}{\sqrt{2}}\cosh\frac{y}{\sqrt{2}} + i\cos\frac{y}{\sqrt{2}}\sinh\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Итак, для вышеуказанного класса функций φ мы имеем

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(y)\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,dy = \mathbf{E}\,\psi(\eta), \tag{7}$$

что позволяет дать вероятностную трактовку интегралу (6). Аналогичный подход применим и к интегралу (3), с той только разницей, что ψ будет функцией, представляющей собой сужение на прямую $x + \sigma t,\ t \in \mathbb{R}$ аналитического продолжения функции φ.

Таким образом, для невещественных σ вероятностное представление (5) решения задачи Коши (1), (2) имеет место, но для очень узкого класса функций φ. В настоящей работе мы покажем, что для гладких функций φ решение задачи (1), (2) может быть получено в виде предела вероятностных представлений. Для этого произвольную гладкую функцию нужно аппроксимировать последовательностью целых аналитических функций. Кроме того, мы покажем, что в данном случае

справедлив аналог центральной предельной теоремы, именно, мы можем аппроксимировать решение задачи (1), (2) приближая начальное данное φ целой аналитической функцией, и одновременно аппроксимируя входящую в (5) гауссовскую случайную величину последовательностью нормированных сумм независимых случайных величин. Так же как в работе [8], мы будем рассматривать суммы случайного числа случайных величин. Такая схема суммирования имеет в данном случае некоторые преимущества, хотя для обычной схемы суммирования (когда число слагаемых неслучайно) полученные результаты также справедливы. При этом мы будем доказывать не поточечную сходимость допредельной функции к решению задачи Коши, а будем строить оценки в различных функциональных классах.

Отметим еще, что в случае $\sigma^2 = i$ в качестве заменителя математического ожидания в представлении (5) обычно используется интеграл по так называемой мере Фейнмана, которая является комплекснозначной конечно-аддитивной функцией множества и не продолжается до меры в функциональном пространстве (подробнее см. [2]). Следует отметить, что данный подход не является в обычном смысле вероятностным, так как в нем отсутствует само понятие вероятностного пространства. Обзор публикаций, посвященных различным подходам к построению интеграла Фейнмана можно найти в [3, 5, 6]. Мы в настоящей работе используем вероятностный подход работ [7, 8].

§2. Основные обозначения

Через $\|\cdot\|$ мы будем обозначать евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^d$. Встречающиеся в выкладках константы обычно обозначаются буквой C, одна и та же буква может обозначать разные константы.

Через $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ мы будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbb{R}^d$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ мы выберем норму (эквивалентную стандартной)

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 + \|p\|^{2k})|\widehat{\psi}(p)|^2\, dp,$$

где через $\widehat{\psi}$ обозначено прямое преобразование Фурье функции ψ, которое в данной работе определяется как

$$\widehat{\psi}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(p,x)}\psi(x)\,dx.$$

Соответственно, в обратном преобразовании Фурье появляется множитель $1/(2\pi)^d$, именно

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(p,x)}\widehat{\psi}(p)\,dp.$$

§3. Вероятностные решения и их аппроксимации.

Пусть σ – комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta u. \tag{8}$$

Здесь $u = u(t,x), t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d$. Если σ вещественно, то уравнение (8) является уравнением теплопроводности, а случай, когда $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$, соответствует уравнению Шрёдингера.

Для уравнения (8) мы рассматриваем задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{9}$$

причем всегда будем предполагать, что функция φ принадлежит какому-нибудь пространству $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Для $t \geqslant 0$ через P^t обозначим операторную экспоненту $e^{\frac{t\sigma^2}{2}\Delta}$. По определению оператор P^t отображает функцию φ в решение $u(t,\cdot)$ задачи Коши (8), (9). Семейство операторов P^t образует полугруппу, то есть $P^{t+s} = P^tP^s$ для всех $t,s \geqslant 0$.

В силу (3) имеем

$$P^t\varphi(x) = \frac{1}{\sigma^d(2\pi t)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\,e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\,dy. \tag{10}$$

Теперь мы хотим с помощью поворота контура интегрирования записать решение (10) задачи (8), (9) в виде математического ожидания некоторой случайной величины. Минимальное требование для этого на функцию φ состоит в том, что она должна продолжаться на все $\mathbb{C}^d$ до целой функции. Кроме того, функция φ должна удовлетворять определенным условиям на рост. Эти условия зависят от величины σ. Рассмотрим сначала более простой случай $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$, *а функция* φ *продолжается на* $\mathbb{C}^d$ *до целой аналитической функции достаточно медленного роста, именно*

$$\sup_{\|z\|\leqslant r} |\varphi(z)| = e^{\psi(r)},$$

где $\psi(r) = o(r^2)$ *при* $r \to \infty$. *Тогда*

$$\frac{1}{\sigma^d(2\pi t)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+\sigma\sqrt{t}y)\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\, dy = \mathbf{E}\,\varphi(x+\sigma\sqrt{t}\xi),$$

где ξ *– стандартный* d*-мерный гауссовский вектор.*

Это утверждение доказывается с помощью последовательных покоординатных поворотов контуров интегрирования. Условие $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$ обеспечивает быстрое убывание функции $e^{-\frac{|z|^2}{2\sigma^2 t}}$ на множестве $|z| = R$ при $R \to \infty$.

Пусть теперь φ не обязательно продолжается до целой функции, так что выражение $\mathbf{E}\,\varphi(x+\sigma\sqrt{t}\xi)$ формально не определено и, соответственно, решение (10) задачи Коши в данном случае не имеет вероятностного представления. Однако это решение можно попытаться представить в виде предела вероятностных решений, аппроксимируя φ целыми функциями. Ограничимся аппроксимациями в норме L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$, *то для любого* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *оператор*

$$P^t\varphi(x) = \frac{1}{\sigma^d(2\pi t)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\, dy$$

непрерывен, как оператор из L_p *в* L_p, *более того*

$$\sup_{t\geqslant 0} \|P^t\varphi\|_p \leqslant C(\sigma)\|\varphi\|_p.$$

Доказательство. Оператор P^t есть оператор свертки, именно $P^t\varphi = f * \varphi$, где $f(y) = \frac{1}{\sigma^d(2\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}$.

Воспользуемся неравенством Юнга (см. [4, IX.4]).

$$\|f * \varphi\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|\varphi\|_p.$$

Теперь для завершения доказательства остается заметить, что L_1-норма функции f не зависит от t. □

Для аппроксимации решений задачи Коши вероятностными решениями мы используем аппроксимацию в L_p начального данного φ целыми функциями φ_M экспоненциального типа M. Для удобства читателей напомним, что функция ψ является целой функцией экспоненциального типа $M = (M_1, \ldots, M_d)$, $M_j > 0$, если для нее выполнены следующие свойства:

1. $\psi(z)$ есть целая аналитическая функция $z \in \mathbb{C}^d$,

2. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$, такое что для всех $z \in \mathbb{C}^d$ справедливо неравенство

$$|\psi(z)| \leqslant C_\varepsilon \exp\Big(\sum_{j=1}^{d}(M_j + \varepsilon)|z_j|\Big).$$

Условимся обозначать $\mathcal{E}_{Mp}$ класс всех целых функций экспоненциального типа M, сужение которых на множество $\operatorname{Im} z_j = 0$ принадлежит $L_p(\mathbb{R}^d)$. Теория таких функций изложена в [9], см. также [10].

Рассмотрим класс $\mathcal{F}_p^\gamma$ функций φ на $\mathbb{R}^d$, допускающих аппроксимацию в L_p целыми функциями $\varphi_M \in \mathcal{E}_{Mp}$, так что

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{F}_p^\gamma} \inf_{\varphi_M} \|\varphi - \varphi_M\|_p \leqslant \gamma(M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Для разных классов гладких функций функция $\gamma(M)$ известна (см. [9]). В силу теоремы 2, для каждого $\varphi \in \mathcal{F}_p^\gamma$ мы имеем

$$\sup_{t \geqslant 0} \|P^t\varphi - P^t\varphi_M\|_p \leqslant C(\sigma)\|\varphi - \varphi_M\|_p \leqslant C(\sigma)\,\gamma(M).$$

Таким образом, для $\operatorname{Re}\sigma^2 > 0$ мы можем аппроксимировать точное решение задачи Коши (8), (9) последовательностью вероятностных решений.

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$. В этом случае для аппроксимации решений задачи Коши вероятностными решениями мы будем использовать класс функций ψ экспоненциального сферического типа $M > 0$ (см. [9]), то есть таких аналитических в $\mathbb{C}^d$ функций, которые для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяют неравенству

$$|\psi(z)| \leqslant C_\varepsilon \exp\Big((M + \varepsilon)\|z\|\Big), \quad z \in \mathbb{C}^d. \tag{11}$$

Оператор P^t при $\operatorname{Re}\sigma^2=0$ является унитарным оператором в L_2, но не является непрерывным оператором в L_p ни при каком $p\neq 2$. Поэтому аналог теоремы 2 справедлив только при $p=2$. Здесь нам понадобится еще одно обозначение. Множество функций экспоненциального сферического типа M, сужения которых на множество $\operatorname{Im} z_j = 0$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}^d)$, условимся обозначать $\mathcal{SE}_{M2}$. Ниже нами будет использована классическая теорема Пэли–Винера–Планшереля–Полиа–Шварца ([4, 9, 10]): преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ функции $\psi\in\mathcal{SE}_{M2}$ имеет носитель, содержащийся в шаре $O_M=\{p\in\mathbb{R}^d, \|p\|\leqslant M\}$ и, соответственно, функция ψ допускает представление

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{O_M} e^{-i(p,x)}\,\widehat{\psi}(p)\,dp. \tag{12}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$, *а функция* φ *принадлежит классу* $\mathcal{SE}_{M2}$. *Тогда*

$$\frac{1}{\sigma^d(2\pi t)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(x+y)\,e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\,dy$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(x+\sigma\sqrt{t}y)\,e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\,dy=\mathbf{E}\,\varphi(x+\sigma\sqrt{t}\xi),$$

где ξ *– стандартный* d*-мерный гауссовский вектор.*

В силу представления (12) достаточно доказать утверждение теоремы для функции $\varphi(x)=e^{-i(p,x)}$ при фиксированном $p\in\mathbb{R}^d$. В этом случае интеграл по $\mathbb{R}^d$ распадается в произведение одномерных интегралов, возможность поворота контура интегрирования в которых следует из леммы Жордана.

Отметим также, что для $\varphi\in L_2$ величина

$$\inf_{\varphi_M\in\mathcal{SE}_{M2}}\|\varphi-\varphi_M\|_2$$

реализуется на функции

$$\varphi_M(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\|p\|\leqslant M} e^{-i(p,x)}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp.$$

§4. Теорема о сходимости в соболевских классах.

В этом параграфе мы докажем аналог центральной предельной теоремы. Именно, мы покажем, что сходимость к решению задачи Коши (8), (9) сохранится, если мы будем не только аппроксимировать начальное данное целой функцией, но и одновременно будем заменять нормальную случайную величину какой-то ее аппроксимацией. В силу центральной предельной теоремы естественно в качестве такой аппроксимации выбрать нормированную сумму независимых случайных величин.

Для доказательства теоремы о сходимости в данном случае удобнее использовать другое представление решения задачи Коши (8), (9). Именно, если в уравнении (8) сделать преобразование Фурье по пространственной переменной x, то для оператора P^t мы получим выражение

$$P^t\varphi(x) = u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}\, e^{-i(p,x)}\, dp\,, \tag{13}$$

то есть Фурье-образ $\widehat{P^t}$ оператора P^t есть оператор умножения на функцию $e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}$. Отметим, что из условия $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$ следует, что

$$|e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}| \leqslant 1. \tag{14}$$

Далее в вероятностном представлении решения задачи Коши мы заменим нормальную случайную величину (со значениями в $\mathbb{R}^d$) ее аппроксимацией случайным блужданием. Опишем подробнее это случайное блуждание.

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных $\mathbb{R}^d$-значных случайных величин с симметричным распределением $\mathcal{P}$ каждая. Мы будем предполагать, что случайные величины имеют единичную матрицу ковариаций и конечный экспоненциальный момент, то есть для некоторого $\gamma > 0$

$$\mathbf{E}\, e^{\gamma\|\xi\|} < \infty. \tag{15}$$

Далее, пусть $\eta(t), t \in [0,\infty)$, – независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с параметром единица. Мы рассмотрим случайное блуждание в $\mathbb{C}^d$, порожденное последовательностью $\{\xi_j\}$ и процессом $\eta(t)$. В нулевой момент времени частица стартует из нуля, в момент первого скачка пуассоновского процесса смещается на

величину $\sigma\xi_1$, в момент второго скачка смещается на $\sigma\xi_2$ и так далее. Блуждание прекращается после случайного числа $\eta(nT)$ шагов. Далее, как обычно, траектория случайного блуждания сжимается по пространственной и временной переменным. Именно, для каждого натурального n мы рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t), t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{16}$$

Следующим шагом с помощью приведенного случайного блуждания мы построим последовательность полугрупп операторов, аппроксимирующую полугруппу P^t. Для этого для каждой (комплекснозначной) функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и числа $M > 0$ определим функцию φ_M, полагая

$$\varphi_M(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\|p\| \leqslant M} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-i(p,x)}\, dp, \tag{17}$$

где, как обычно, $\widehat{\varphi}$ обозначает преобразование Фурье функции φ. Отметим, что при всех $M > 0$ функция φ_M (как функция $x \in \mathbb{C}^d$) принадлежит классу $\mathcal{SE}_{M2}$. Далее число M мы будем выбирать в зависимости от n, $M = M(n)$.

Для натуральных n определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для комплекснозначной $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $x \in \mathbb{R}^d$

$$P_n^t \varphi(x) = \mathbf{E}\, \varphi_M\big(x + \zeta_n(t)\big). \tag{18}$$

Нетрудно показать, что функция $u_n(t,x) = P_n^t\, \varphi(x)$ решает задачу Коши $u_n(0,x) = \varphi_M(x)$ для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \mathcal{A}_n u_n,$$

где оператор $\mathcal{A}_n$ действует на функцию $\psi \in \mathcal{SE}_{M2}$ как

$$\mathcal{A}_n \psi(x) = n \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\psi\Big(x + \frac{\sigma y}{\sqrt{n}}\Big) - \psi(x) \right) d\mathcal{P}(y).$$

Ясно, что для больших значений n оператор $\mathcal{A}_n$ в определенном смысле близок к оператору $\frac{\sigma^2}{2}\Delta$. В следующем утверждении мы покажем, что при надлежащем выборе $M = M(n)$ решения соответствующих эволюционных уравнений также близки между собой.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in W_2^{2l+4}(\mathbb{R}^d)$, $l \geqslant 0$, $M(n) = n^{1/4}$. *Тогда*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{W_2^{2l}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\,\frac{\|\varphi\|_{W_2^{2l+4}(\mathbb{R}^d)}}{n},$$

где $C = C(l,d,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем, что для каждого $p \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{E}\, e^{-i(p,\zeta_n(t))} = e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}\, d\mathcal{P}(y) - 1\right)}. \tag{19}$$

Из (17), (18) и (19) следует, что

$$P_n^t\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\|p\|\leqslant M} \widehat{\varphi}(p) e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}\, d\mathcal{P}(y) - 1\right)} e^{-i(p,x)}\, dp. \tag{20}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
&\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|^2_{W_2^{2l}} \\
&\leqslant C \int\limits_{\|p\|\leqslant M} (1+\|p\|^{4l})|\widehat{\varphi}(p)|^2 \left| e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}\, d\mathcal{P}(y) - 1\right)} - e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} \right|^2 dp \\
&\qquad + C \int\limits_{\|p\|>M} (1+\|p\|^{4l})|\widehat{\varphi}(p)|^2 |e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}|^2 dp = A_1 + A_2,
\end{aligned} \tag{21}$$

где через A_1 и A_2 обозначены, соответственно, первый и второй интеграл в правой части (21).

Оценим сначала слагаемое A_2. Используя (14), получим

$$\begin{aligned}
A_2 &\leqslant C \int\limits_{\|p\|>M} (1+\|p\|^{4l})|\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \\
&\leqslant \frac{C}{M^8} \int\limits_{\|p\|>M} (1+\|p\|^{4l+8})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\
&\leqslant C\frac{\|\varphi\|^2_{W_2^{2l+4}}}{M^8} = C\frac{\|\varphi\|^2_{W_2^{2l+4}}}{n^2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Теперь оценим слагаемое A_1. Заметим прежде всего, что интегрирование в A_1 ведется по множеству $\|p\| \leqslant M$, и значит в области интегрирования справедливо неравенство

$$\frac{\|p\|}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{M}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^{1/4}}. \tag{23}$$

Напомним, что по условию случайная величина ξ_1 имеет единичную матрицу ковариаций, поэтому, снова используя (14), получим

$$\begin{aligned}
&\left| e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1\right)} - e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} \right| \\
&\leqslant \left| e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1 + \frac{\sigma^2\|p\|^2}{2n}\right)} - 1 \right| \\
&= \left| e^{nt\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y)} - 1 \right|.
\end{aligned} \tag{24}$$

Представим теперь интеграл, стоящий в показателе экспоненты в правой части (24), в виде суммы двух интегралов – по области $\|y\| \leqslant n^{1/4}$ и по дополнительной области $\|y\| > n^{1/4}$, после чего воспользуемся элементарным неравенством

$$|ab - 1| \leqslant |a - 1| \cdot |b| + |b - 1|.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\left| e^{nt\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y)} - 1 \right| \\
&\leqslant \left| e^{nt\int\limits_{\|y\|\leqslant n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y)} - 1 \right| \\
&\times \left| e^{nt\int\limits_{\|y\|>n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y)} \right| \\
&+ \left| e^{nt\int\limits_{\|y\|>n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y)} - 1 \right|.
\end{aligned} \tag{25}$$

Интеграл

$$\int\limits_{\|y\|>n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y)$$

легко оценивается. Именно, из условия (15) и (23) следует, что для любого $N > 0$ найдется $C > 0$, такая что

$$\left| \int\limits_{\|y\|>n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y) \right| \leqslant Cn^{-N}. \tag{26}$$

Оценим теперь интеграл

$$\int\limits_{\|y\|\leqslant n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y).$$

Так как по условию случайная величина ξ_1 имеет симметричное распределение, то

$$\int\limits_{\|y\|\leqslant n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right) d\mathcal{P}(y) \tag{27}$$

$$= \int\limits_{\|y\|\leqslant n^{1/4}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n} - \frac{i\sigma^3(p,y)^3}{6n^{3/2}}\right) d\mathcal{P}(y).$$

В области $\|y\| \leqslant n^{1/4}$ в силу (23) справедливо неравенство

$$\left| e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n} - \frac{i\sigma^3(p,y)^3}{6n^{3/2}} \right| \leqslant C\frac{\|p\|^4\|y\|^4}{n^2}. \tag{28}$$

Теперь, комбинируя (24), (26) и (28), получаем оценку

$$\left| e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1\right)} - e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} \right| \leqslant C\frac{\|p\|^4}{n}. \tag{29}$$

Далее, используя (29), получаем

$$A_1 = C \int\limits_{\|p\|\leqslant M} (1+\|p\|^{4l})|\widehat{\varphi}(p)|^2 \left| e^{nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y)-1\right)} - e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} \right|^2 dp$$
$$\leqslant \frac{C}{n^2} \int\limits_{\|p\|\leqslant M} (1+\|p\|^{4l+8})|\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \leqslant \frac{C}{n^2}\|\varphi\|^2_{W_2^{2l+4}}.$$

Наконец, из последней оценки, (21) и (22) следует утверждение теоремы. □

Литература

1. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков*. Изд-во Ленинградского университета, Ленинград, 1980.
2. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах*. Наука, М., 1983.
3. Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов*. Мир, М., 1984.
4. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т. 2*. Мир, М., 1978.
5. S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, S. Mazzucchi, *Mathematical Theory of Feynman. Path Integrals*. 2nd ed., LNP 523, Springer, 2008.
6. В. П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана*. Наука, М., 1976.
7. S. Albeverio, N. Smorodina, M. Faddeev, *The probabilistic representation of the exponent of a class of pseudo-differential operators*. — J. Global Stoch. Anal. **1**, No. 2 (2011), 123–148.
8. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 111–141.
9. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. Наука, М., 1977.
10. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*. Мир, М., 1974.

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. A limit theorem on convergence of random walk functionals to a solution of the Cauchy problem for the equation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\sigma^2}{2}\Delta u$ with complex σ.

The paper is devoted to some problems associated with a probabilistic representation and a probabilistic approximation of the Cauchy problem

solution for the family of equations $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta u$ with a complex parameter σ such that $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$. The above family includes as a particular case both the heat equation (when $\operatorname{Im}\sigma = 0$) and the Schrödinger equation (when $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$).

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
и Санкт-Петербургский
государственный университет,
Математико–механический факультет
Университетский пр., 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504, С.Петербург, Россия
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu
mmfaddeev@gmail.com

Поступило 30 сентября 2013 г.