Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

М. С. Ермаков

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЫВОДАХ О ПАРАМЕТРЕ СИГНАЛА

§1. Введение

В зоне аппроксимации распределений статистик нормальным распределением нижние границы асимптотически эффективных статистических выводов о значении параметров довольно хорошо изучены. В статистическом оценивании – это локально асимптотически минимаксные границы асимптотической эффективности Гайека–Ле Кама [1–6]. В теории проверки гипотез – это нижняя граница асимптотической эффективности по Питману [4–7]. В зоне вероятностей больших уклонений анализ качества оценок и критериев обычно базируется на асимптотической эффективности по Бахадуру [2, 6–11]. Цель настоящей работы – изучить нижние границы в зоне вероятностей умеренных уклонений для задач статистических выводов о параметре сигнала, наблюдаемого в гауссовском белом шуме. Таким образом, результаты работы в какой-то мере заполняют пробел в изучении асимптотической эффективности между стандартной зоной нормальной аппроксимации и зоной вероятностей больших уклонений.

Надо отметить, что для задач статистических выводов о значении параметра распределения выборки независимых случайных величин данная постановка уже рассматривалась в целом ряде публикаций [12–16]. В настоящей работе мы переносим на задачу статистических выводов о параметре сигнала результаты работ [13,14], где получены наиболее полные результаты. Нижние границы асимптотической эффективности даны для логарифмической и точной асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистических оценок и критериев. Вопросы асимптотической эффективности статистических выводов о параметрах сигнала, как в зоне нормальной аппроксимации, так

Ключевые слова: асимптотическая эффективность, эффективность по Бахадуру, эффективность по Питману, нижняя граница Гайека–Ле Кама.

Исследование поддержано грантами РФФИ 11-01-00577 и 11-01-00769.

и в зоне вероятностей больших уклонений рассматривались в большом числе публикаций (см. [2, 3, 17–20] и библиографию в этих работах).

В настоящее время существует большое количество публикаций, доказывающих асимптотическую эквивалентность различных статистических моделей и модели сигнала в гауссовском белом шуме [4,5,21,22]. Хотя эти результаты и не затрагивают зону вероятностей умеренных уклонений, нижние границы асимптотической эффективности статистических выводов о параметре сигнала в данной зоне позволяют проводить параллель между этими результатами и аналогичными результатами для других моделей статистических выводов.

В доверительном оценивании уровень значимости обычно мал, и чем больше наблюдений, тем обычно меньше берется уровень значимости. В теории проверки гипотез обычно мала вероятность ошибки первого рода. Эти задачи являются яркими примерами применения проблематики теории вероятностей умеренных уклонений в математической статистике, в частности, нижние границы асимптотической эффективности статистического оценивания в зоне вероятностей умеренных уклонений допускают естественную интерпретацию как нижние границы асимптотической эффективности доверительного оценивания [13, 14, 23].

Нижние границы асимптотической эффективности в задачах обнаружения сигнала довольно просто выводятся на основе применения леммы Неймана–Пирсона и приведены для полноты изложения. Для одномерных задач оценивания параметра на них базируется вывод нижних границ асимптотической эффективности статистических оценок в зоне вероятностей умеренных уклонений. Доказательство локально асимптотически минимаксной границы для задач оценивания многомерного параметра сигнала получается модификацией методов работы [14].

Остановимся на обозначениях. Будет удобно обозначать буквами C, c положительные постоянные. Для любого числа $x \in R^1$ условимся обозначать $[x]$ его целую часть. Для любого события A обозначим $\chi(A)$ индикатор события A. Поскольку везде пределы интегрирования одни и те же, условимся их опускать и писать $\int$ вместо $\int\limits_0^1$. Для любой функции $f \in L_2(0,1)$ обозначим квадрат ее L_2-нормы

$$\|f\|^2 = \int f^2(t)\,dt.$$

Обозначим $\Phi(x)$ функцию стандартного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\,dt, \quad x \in R^1.$$

Будем опускать индекс истинного значения параметра θ_0 у символов математического ожидания и вероятности, т.е. писать $\mathbf{E}[\cdot] = \mathbf{E}_{\theta_0}[\cdot]$ и $\mathbf{P}(\cdot) = \mathbf{P}_{\theta_0}(\cdot)$.

§2. Нижние границы асимптотической эффективности

2.1. Нижние границы асимптотической эффективности для логарифмической асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистических оценок и критериев. Пусть наблюдается реализация случайного процесса $Y_\epsilon(t), t \in (0,1), \epsilon > 0$, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_\epsilon(t) = S(t,\theta)\ dt + \epsilon dw(t). \tag{2.1}$$

Здесь сигнал $S \in L_2(0,1)$ и $dw(t)$ – гауссовский белый шум. Параметр θ неизвестен, $\theta \in \Theta$, Θ – открытое множество в R^d.

Предположим, что сигнал $S(t,\theta)$ дифференцируем по θ в $L_2(0,1)$ в точке θ_0, т.е. существует вектор-функция $S_\theta(t,\theta_0)$, такая что

$$\int (S(t,\theta) - S(t,\theta_0) - (\theta-\theta_0)' S_\theta(t,\theta_0))^2\,dt = o(|\theta-\theta_0|^2). \tag{2.2}$$

Здесь $(\theta-\theta_0)'S_\theta(t,\theta_0)$ – скалярное произведение $\theta-\theta_0$ и $S_\theta(t,\theta_0)$.

Информационная матрица Фишера равна

$$I(\theta) = \int S_\theta(t,\theta) S'_\theta(t,\theta)\,dt. \tag{2.3}$$

Сделаем следующее предположение.

A1. В точке $\theta_0 \in \Theta$ имеет место (2.2), и информационная матрица Фишера $I(\theta_0)$ положительно определена.

Для логарифмической асимптотики задачу нахождения нижней границы асимптотически эффективных статистических выводов о значении параметра обычно удается свести к одномерной. В этом разделе нами будет предполагаться, что $d = 1$.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_\epsilon : \theta = \theta_\epsilon := \theta_0 + u_\epsilon$, где $u_\epsilon > 0$, $u_\epsilon \to 0$, $\epsilon^{-1}u_\epsilon \to \infty$ при $\epsilon \to 0$.

Для любого критерия K_ϵ обозначим $\alpha(K_\epsilon)$ и $\beta(K_\epsilon)$ соответственно его вероятности ошибок первого и второго рода.

Зададим тестовую статистику

$$T = I^{-1/2}(\theta_0) \int S_\theta(t,\theta_0)\, dY_\epsilon(t). \qquad (2.4)$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* A1. *Тогда для любого семейства критериев K_ϵ, такого что $\alpha(K_\epsilon) < c < 1$ и $\beta(K_\epsilon) < c < 1$, имеет место*

$$\limsup_{\epsilon\to 0} (\epsilon^{-1} u_\epsilon I^{1/2}(\theta_0))^{-1} (|2\ln\alpha(K_\epsilon)|^{1/2} + |2\ln\beta(K_\epsilon)|^{1/2}) \leqslant 1. \qquad (2.5)$$

Нижняя граница (2.5) *достигается на семействе критериев, порожденных тестовой статистикой T.*

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие* A1. *Тогда для любой последовательности оценок $\widehat{\theta}_\epsilon$ параметра θ имеет место*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\theta=\theta_0,\theta_0+2u_\epsilon} \epsilon^2 u_\epsilon^{-2} I^{-1}(\theta_0) \ln \mathbf{P}_\theta(|\widehat{\theta}_\epsilon - \theta| \geqslant u_\epsilon) \geqslant -\frac{1}{2}. \qquad (2.6)$$

2.2. Нижняя граница эффективности для точной асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистических выводов для одномерного параметра. Зафиксируем $\lambda, 0 < \lambda \leqslant 1$.

Результаты будут доказаны в зонах $u_\epsilon = o(\epsilon^{\frac{2}{2+\lambda}})$ при следующем дополнительном условии.

A2. Имеет место

$$\int (S(t,\theta) - S(t,\theta_0) - (\theta-\theta_0)' S_\theta(t,\theta_0))^2 \, dt = O(|\theta-\theta_0|^{2+\lambda}), \qquad (2.7)$$

$$\int (S(t,\theta) - S(t,\theta_0))^2 dt - (\theta-\theta_0)' I(\theta_0)(\theta-\theta_0) = O(|\theta-\theta_0|^{2+\lambda}). \qquad (2.8)$$

В многомерном случае в задаче проверки гипотез нижняя граница асимптотической эффективности существенно зависит от вида множеств гипотез и альтернатив. Поэтому мы ограничимся случаем одномерного параметра, для которого в большинстве ситуаций задача сводится к нижней границе для проверки простой гипотезы против простой альтернативы. Итак мы рассматриваем ту же самую постановку задачи проверки гипотез, что и в случае логарифмической асимптотики. Мы проверяем гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы

$H_\epsilon : \theta = \theta_\epsilon := \theta_0 + u_\epsilon$. При этом дополнительно предполагается, что $\epsilon^{-2} u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2. *Пусть* $\epsilon^{-1} u_\epsilon \to \infty$, $\epsilon^{-2} u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ *при* $\epsilon \to 0$. *Тогда для любого семейства критериев* K_ϵ, *таких что* $\alpha_\epsilon := \alpha(K_\epsilon) < c < 1$, *имеет место*

$$\beta(K_\epsilon) \geqslant \Phi(x_{\alpha_\epsilon} - \epsilon^{-1} u_\epsilon I^{1/2}(\theta_0))(1 + o(1)), \tag{2.9}$$

где x_{α_ϵ} *задается уравнением* $\alpha_\epsilon = \Phi(x_{\alpha_\epsilon})$.

Нижняя граница (2.9) *достигается на критериях* L_ϵ, *порожденных тестовой статистикой* T.

Если в (2.9) *достигается равенство, для семейства критериев* L_ϵ, $\alpha_\epsilon = \alpha(L_\epsilon)$, *имеет место*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \alpha_\epsilon^{-1} \mathbf{E}_{\theta_0}[|K_\epsilon - L_\epsilon|] = 0, \tag{2.10}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\Phi(x_{\alpha_\epsilon} - \epsilon^{-1} u_\epsilon I^{1/2}(\theta_0)))^{-1} \mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[|K_\epsilon - L_\epsilon|] = 0. \tag{2.11}$$

Замечание. Для $u_\epsilon = \epsilon u, u > 0$ нижняя граница (2.9) переходит в нижнюю границу эффективности по Питману.

Определим статистику

$$T_0 = I^{-1/2}(\theta_0) \int S_\theta(t, \theta_0)\, dw(t).$$

Теорема 2.4. *Пусть* $d = 1$ *и выполнены условия* A1 *и* A2. *Пусть* $\epsilon^{-1} u_\epsilon \to \infty, \epsilon^{-2} u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ *при* $\epsilon \to 0$. *Тогда для любого семейства оценок* $\widehat{\theta}_\epsilon$ *имеет место*

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < C_\epsilon u_\epsilon} \frac{\mathbf{P}_\theta(|\widehat{\theta}_\epsilon - \theta| > u_\epsilon)}{2\Phi(-\epsilon^{-1} I^{1/2}(\theta_0) u_\epsilon)} \geqslant 1 \tag{2.12}$$

для любого семейства $C_\epsilon \to \infty$ *при* $\epsilon \to 0$. *Если в* (2.12) *достигается равенство для* $C_\epsilon \to \infty, \epsilon^{-2} C_\epsilon^{2+\lambda} u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ *при* $\epsilon \to 0$, *то для любой последовательности* $\theta_\epsilon, |\theta_\epsilon - \theta_0| < C_\epsilon u_\epsilon$, *имеет место*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\Phi(-\epsilon^{-1} I^{1/2}(\theta_0) u_\epsilon)\Big)^{-1} \mathbf{E}_{\theta_\epsilon}\Big[|\chi(|\widehat{\theta}_\epsilon - \theta_\epsilon| > u_\epsilon) - \chi(|I^{-1/2}(\theta_0) T_0 - (\theta_\epsilon - \theta_0)| > u_\epsilon)|\Big] = 0. \tag{2.13}$$

Теоремы 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 являются аналогами соответственно теорем 2.2, 2.5, 2.3 и 2.7, доказанных в [13] для задач статистических выводов о значении параметра распределения выборки независимых случайных величин.

2.3. Нижняя граница эффективности для точной асимптотики доверительного оценивания многомерного параметра. В случае многомерного параметра аналог теоремы 2.4 удается доказать при несколько более жестких условиях.

Скажем, что множество $\Omega \subset R^d$ центрально симметрично, если для любого $x \in \Omega$ имеет место $-x \in \Omega$. Обозначим $\partial\Omega$ границу множества Ω.

Сделаем следующие предположения.

A3 Для любого $v \in R^d$ имеет место

$$v'I(\theta)v - v'I(\theta_0)v = O(|v|^2|\theta - \theta_0|^\lambda). \tag{2.14}$$

A4. Множество Ω ограничено, выпукло и центрально симметрично. Граница $\partial\Omega$ является C^2-многообразием. Главные кривизны в каждой точке $\partial\Omega$ отрицательны.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* A1–A3 *для всех* $\theta_0 \in \Theta$. *Пусть множество* Ω *удовлетворяет условию* A4. *Пусть* Θ_0 *– открытое ограниченное множество, такое что* $\partial\Theta_0 \subset \Theta$. *Пусть* $\epsilon^{-1}u_\epsilon \to \infty$, $\epsilon^{-2}u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ *при* $\epsilon \to 0$. *Тогда для любого семейства оценок* $\widehat{\theta}_\epsilon$ *имеет место*

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \inf_{\theta_0\in\Theta_0} \sup_{|\theta-\theta_0|<C_\epsilon u_\epsilon} \frac{\mathbf{P}_\theta(I^{1/2}(\theta_0)(\widehat{\theta}_\epsilon - \theta) \notin u_\epsilon\Omega)}{\mathbf{P}(\zeta \notin \epsilon^{-1}u_\epsilon\Omega)} \geqslant 1, \tag{2.15}$$

где $C_\epsilon \to \infty$ *при* $\epsilon \to 0$. *Здесь* ζ *– гауссовский случайный вектор, имеющий единичную ковариационную матрицу и* $\mathbf{E}[\zeta] = 0$.

Теоремы 2.4 и 2.5 можно рассматривать как нижние границы асимптотически эффективного доверительного оценивания. В доверительном оценивании ковариационная матрица оценки (дисперсия для $d=1$) часто является неизвестной. Тогда доверительное множество строится на основе стьюдентизированной статистики, в которой ковариационная матрица (дисперсия при $d = 1$) заменяется оценкой. Стьюдентизированные статистики широко применяются и в задачах теории проверки гипотез. Для таких постановок нетрудно модифицировать утверждения теорем 2.4 и 2.5. Общий подход к такому варианту постановок задач и их решение продемонстрирован в теореме 2.2 и ее доказательстве в [14]. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, чтобы не перегружать статью.

§3. Доказательство теорем 2.1, 2.2 и 2.3, 2.4

Доказательство теорем 2.1 и 2.3 основано на непосредственном применении леммы Неймана–Пирсона и анализе асимптотического поведения логарифма отношения правдоподобия. Теоремы 2.2 и 2.4 выводятся соответственно из теорем 2.1 и 2.3 полностью аналогично тому, как доказываются аналогичные результаты в [13] (теоремы 2.3 и 2.7). В частности, (2.13) вытекает из (2.10) и (2.11). Поэтому доказательство теорем 2.2 и 2.4 опускается. Напомним, что в [13] рассматривалась задача получения нижних границ асимптотической эффективности параметрических статистических выводов в случае выборки независимых случайных величин.

Рассуждения будут проведены для постановки задачи теоремы 2.3. Доказательство теоремы 2.1 получается сразу же, если в оценках заменить $O(|u_\epsilon|^{2+\lambda})$ на $o(|u_\epsilon|^2)$. Корректность такой замены вытекает из условия A1.

Рассмотрим случай справедливости гипотезы. Логарифм отношения правдоподобия (см. [2,3]) равен

$$\begin{aligned}L(\theta_0+u_\epsilon,\theta_0)&\\ :=\epsilon^{-2}\int(S(t,\theta_\epsilon)-S(t,\theta_0))\,dY_\epsilon(t)-(2\epsilon^2)^{-1}(\|S(t,\theta_\epsilon)\|^2-\|S(t,\theta_0)\|^2)&\\ =\epsilon^{-1}\int(S(t,\theta_\epsilon)-S(t,\theta_0))dw(t)-(2\epsilon^2)^{-1}\|S(t,\theta_\epsilon)-S(t,\theta_0)\|^2.&\end{aligned} \tag{3.1}$$

Следовательно, в качестве тестовой статистики можно взять

$$T_1=\epsilon^{-1}\xi(\theta_\epsilon,\theta_0)=\epsilon^{-1}\int(S(t,\theta_\epsilon)-S(t,\theta_0))\,dY_\epsilon(t). \tag{3.2}$$

Используя A2, легко видеть, что для доказательства асимптотической эффективности критериев L_ϵ достаточно оценить разность стохастических частей T_1 и $(\theta_\epsilon-\theta_0)I^{1/2}(\theta_0)T$, задаваемых статистиками

$$T_{1\epsilon}=\epsilon^{-1}\xi(\theta_\epsilon,\theta_0)=\epsilon^{-1}\int(S(t,\theta_\epsilon)-S(t,\theta_0))\,dw(t)$$

и $I^{1/2}(\theta_0)(\theta_\epsilon-\theta_0)T_0$ соответственно.

Обозначим

$$\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0)=\|S(t,\theta_\epsilon)-S(t,\theta_0)\|^2.$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$\mathbf{E}_{\theta_0}[T_{1\epsilon}] = 0 \tag{3.3}$$

и, в силу (2.8), имеем

$$\mathbf{E}_{\theta_0}[T_{1\epsilon}^2] = \epsilon^{-2}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) = \epsilon^{-2}u_\epsilon^2 I(\theta_0) + O(\epsilon^{-2}u_\epsilon^{2+\lambda}). \tag{3.4}$$

В случае альтернативы получаем аналогично

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[T_{1\epsilon}] &= \epsilon^{-1}\mathbf{E}_{\theta_0}[\xi(\theta_\epsilon,\theta_0)\exp\{\epsilon^{-1}\xi(\theta_\epsilon,\theta_0) - (2\epsilon^2)^{-1}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0)\}] \\ &= \epsilon^{-2}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) = \epsilon^{-2}(u_\epsilon^2 I(\theta_0) + O(u_\epsilon^{2+\lambda}))\end{aligned} \tag{3.5}$$

и

$$\mathbf{Var}_{\theta_\epsilon}[T_{1\epsilon}^2] = \epsilon^{-2}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) = \epsilon^{-2}u_\epsilon^2 I(\theta_0) + O(u_\epsilon^{2+\lambda}). \tag{3.6}$$

Из (3.1)–(3.6) следует нижняя граница (2.9).

Доказательство асимптотической эффективности тестовой статистики T базируется на следующей лемме.

Лемма 3.1. *Пусть даны гауссовские случайные векторы* $\vec{\eta}_\epsilon = (\eta_{1\epsilon},\eta_{2\epsilon})'$, *такие что* $\mathbf{E}[\eta_{1\epsilon}] = 0$, $\mathbf{E}[\eta_{2\epsilon}] = 0$, $\mathbf{E}[\xi_{1\epsilon}^2] = 1$, $\mathbf{E}[\xi_{2\epsilon}^2] = O(|u_\epsilon|^\lambda)$, $\mathbf{E}[\eta_{1\epsilon}\eta_{2\epsilon}] = O(|u_\epsilon|^\lambda)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\eta_{1\epsilon} > \epsilon^{-1}u_\epsilon) = \mathbf{P}(\eta_{1\epsilon} + \eta_{2\epsilon} > \epsilon^{-1}u_\epsilon)(1 + o(1)). \tag{3.7}$$

Доказательство. Обозначим A_ϵ ковариационную матрицу случайного вектора $\vec{\eta}_\epsilon$. Пусть ζ_1, ζ_2 – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Зададим случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1,\zeta_2)$. Обозначим $\vec{\omega}_\epsilon = (\omega_{1\epsilon},\omega_{2\epsilon})' = A_\epsilon^{1/2}\vec{\zeta}$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_{1\epsilon} + \eta_{2\epsilon} > \epsilon^{-1}u_\epsilon) = \mathbf{P}(\omega_{1\epsilon} + \omega_{2\epsilon} > \epsilon^{-1}u_\epsilon). \tag{3.8}$$

Непосредственными вычислениями $A_\epsilon^{1/2}A_\epsilon^{1/2} = A_\epsilon$ проверяется, что элементы матрицы $A_\epsilon^{1/2} = \{a_{\epsilon,ij}\}_{i,j=1}^2$ имеют следующие порядки $a_{\epsilon,22} = O(|u_\epsilon|^{\lambda/2}), a_{\epsilon,12} = O(|u_\epsilon|^{\lambda/2})$. Основываясь на этих соотношениях, используя (3.8), можно непосредственно проверить (3.7).

Остается проверить условия леммы 3.1 для случайных величин

$$\eta_{1\epsilon} = u_\epsilon^{-1}\xi(\theta_\epsilon,\theta_0) \quad \text{и} \quad \eta_{2\epsilon} = u_\epsilon^{-1}(\xi(\theta_\epsilon,\theta_0) - u_\epsilon\tau)$$

в случае справедливости гипотезы и альтернативы. Здесь

$$\tau = \tau_{\theta_0} = \int S_\theta(t,\theta_0)\,dw(t).$$

Рассмотрим случай гипотезы.

Согласно (3.4),

$$\mathbf{E}\eta_{1\epsilon}^2 = I + O(|u_\epsilon|^\lambda). \tag{3.9}$$

Имеем

$$\mathbf{E}[\eta_{1\epsilon}\eta_{2\epsilon}] = u_\epsilon^{-2}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) - u_\epsilon^{-1}\int (S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0))S_\theta(t,\theta_0)\,dt. \tag{3.10}$$

В силу (2.7),

$$\begin{aligned} O(u_\epsilon^{2+\lambda}) &= \|S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0) - u_\epsilon S_\theta(t,\theta_0)\|^2 \\ &= \rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) - 2u_\epsilon\int (S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0))S_\theta(t,\theta_0)\,dt + u_\epsilon^2 I(\theta_0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отсюда, согласно (2.8), получаем

$$u_\epsilon\int (S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0))S_\theta(t,\theta_0)\,dt = u_\epsilon^2 I(\theta_0) + O(|u_\epsilon|^{2+\lambda}). \tag{3.12}$$

Из (2.8),(3.10),(3.12) следует, что

$$\mathbf{E}[\eta_{1\epsilon}\eta_{2\epsilon}] = O(|u_\epsilon|^\lambda). \tag{3.13}$$

Из (3.9), (3.13) вытекает, что для гипотезы условия леммы 3.1 выполнены.

Рассмотрим случай альтернативы. Непосредственными вычислениями, используя (3.12), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\tau] &= \mathbf{E}_{\theta_0}[\tau\exp\{\epsilon^{-1}\xi(\theta_\epsilon,\theta_0) - (2\epsilon^2)^{-1}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0)\}] \\ &= \epsilon^{-1}\int (S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0))S_\theta(t,\theta_0)\,dt \\ &= \epsilon^{-1}u_\epsilon I(\theta_0) + O(\epsilon^{-1}|u_\epsilon|^{1+\lambda}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

и, рассуждая аналогично,

$$\mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\xi(\theta_0,\theta_\epsilon)] = \epsilon^{-1}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) = \epsilon^{-1}u_\epsilon^2 I(\theta_0) + O(\epsilon^{-1}|u_\epsilon|^{2+\lambda}). \tag{3.15}$$

Используя те же самые методы, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\xi^2(\theta_\epsilon,\theta_0)] &= \rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0) + \epsilon^{-2}\rho^4(\theta_\epsilon,\theta_0) \\ &= u_\epsilon^2 I(\theta_0) + \epsilon^{-2}u_\epsilon^4 I^2(\theta_0) + O(|u_\epsilon|^{2+\lambda} + \epsilon^{-2}|u_\epsilon|^{4+\lambda}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} u_\epsilon\mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\xi(\theta_\epsilon,\theta_0)\tau] &= u_\epsilon\int (S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0))S_\theta(t,\theta_0)\,dt(1 + \epsilon^{-2}\rho^2(\theta_\epsilon,\theta_0)) \\ &= u_\epsilon^2 I(\theta_0) + \epsilon^{-2}u_\epsilon^4 I^2(\theta_0) + O(|u_\epsilon|^{2+\lambda} + \epsilon^{-2}|u_\epsilon|^{4+\lambda}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

а также

$$u_\epsilon^2 \mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\tau^2] = u_\epsilon^2 I(\theta_0) + \epsilon^{-2} u_\epsilon^2 \left(\int (S(t,\theta_\epsilon) - S(t,\theta_0)) S_\theta(t,\theta_0)\, dt \right)^2 \\ = u_\epsilon^2 I(\theta_0) + \epsilon^{-2} u_\epsilon^4 I^2(\theta_0) + O(|u_\epsilon|^{2+\lambda} + \epsilon^{-2}|u_\epsilon|^{4+\lambda}). \tag{3.18}$$

Из (3.16)–(3.18) получаем

$$\mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\eta_{2\epsilon}^2] = O(|u_\epsilon|^\lambda + \epsilon^{-2}|u_\epsilon|^{2+\lambda}),$$
$$\mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[\eta_{1\epsilon}\eta_{2\epsilon}] = O(|u_\epsilon|^\lambda + \epsilon^{-2}|u_\epsilon|^{2+\lambda}),$$

что влечет выполнение условий леммы 3.1 в случае альтернативы. □

Доказательство теоремы 2.4 базируется на следующем варианте теоремы 2.3, в котором рассматривается задача проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0 + C_1 u_\epsilon$ против альтернатив $H_{1\epsilon} : \theta = \theta_0 + C_2 u_\epsilon$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2. *Тогда для любого семейства критериев K_ϵ, таких что $\alpha_\epsilon := \alpha(K_\epsilon) < c < 1$, имеет место*

$$\beta(K_\epsilon) \geqslant \Phi(x_{\alpha_\epsilon} - \epsilon^{-1}(C_2 - C_1) u_\epsilon I^{1/2}(\theta_0))(1 + o(1)), \tag{3.19}$$

где x_{α_ϵ} задается уравнением $\alpha_\epsilon = \Phi(x_{\alpha_\epsilon})$.

Нижняя граница (3.19) *достигается на критериях L_ϵ, порожденных тестовыми статистиками T.*

Если в (3.19) *достигается равенство, то для семейства критериев L_ϵ, таких что $\alpha_\epsilon = \alpha(L_\epsilon)$, имеет место*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \alpha_\epsilon^{-1} \mathbf{E}_{\theta_0}[|K_\epsilon - L_\epsilon|] = 0, \tag{3.20}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} (\Phi(x_{\alpha_\epsilon} - \epsilon^{-1}(C_2 - C_1) u_\epsilon I^{1/2}(\theta_0)))^{-1} \mathbf{E}_{\theta_\epsilon}[|K_\epsilon - L_\epsilon|] = 0. \tag{3.21}$$

В остальном доказательство теоремы 2.4 идентично следует доказательству теоремы 2.7 в [13] и опускается.

§4. Доказательство теоремы 2.5

В теореме 2.1 в [14] утверждение, аналогичное теореме 2.5, доказано для доверительного оценивания параметра распределения выборки независимых случайных величин. Доказательство теоремы 2.5 представляет собой переработанный вариант доказательства этой теоремы. Для упрощения обозначений предположим, что $\theta_0 = 0$.

Доказательство разбивается на следующие этапы.

1. Байесовский подход. Используется то, что байесовский риск не превосходит минимаксный, и задача трансформируется в задачу нахождения асимптотики байесовских рисков. Задается равномерное байесовское априорное распределение на решетке Λ_ϵ в кубе $K_{v_\epsilon} = (-v_\epsilon, v_\epsilon)^d$, $v_\epsilon = C_\epsilon u_\epsilon$, $C_\epsilon \to \infty$, $\epsilon^{-2}(C_\epsilon u_\epsilon)^{2+\lambda} \to 0$. Шаг решетки равен $\delta_{1\epsilon} = c_{1\epsilon}\epsilon^2 u_\epsilon^{-1}$, где $c_{1\epsilon} \to 0, c_{1\epsilon}^{-3}\epsilon^{-2}u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Обозначим $l_\epsilon = [v_\epsilon/\delta_{1\epsilon}]$.

2. Куб K_{v_ϵ} разбивается на маленькие кубики

$$\Gamma_{i\epsilon} = x_{\epsilon i} + (-c_{2\epsilon}\epsilon^2 u_\epsilon^{-1}, c_{2\epsilon}\epsilon^2 u_\epsilon^{-1}]^d, \quad 1 \leqslant i \leqslant m_n,$$

где $c_{2\epsilon} \to 0$, $c_{2\epsilon}c_{1\epsilon}^{-1} \to \infty$, $c_{1\epsilon}^{-3}\epsilon^{-2}b_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Используя тот факт, что нормированный апостериорный байесовский риск стремится к константе по вероятности при $\epsilon \to 0$, поведение байесовского апостериорного риска изучается отдельно для каждого события $W_{i\epsilon} : \tau \in \epsilon^{-1}\Gamma_{\epsilon i}$.

3. Чтобы сузить множество, на котором изучается байесовский риск, решетка Λ_ϵ разбивается на подмножества $\Lambda_{ie}, 1 \leqslant i \leqslant m_{2i\epsilon}$. Множества Λ_{ie} представляют собой решетку в объединении конечного числа очень узких параллелепипедов K_{ije}. Задача минимизации байесовского риска решается независимо для каждого множества Λ_{ie}, а затем результаты суммируются и дают общую нижнюю границу байесовского риска

$$\begin{aligned}
&\inf_{\widehat{\theta}_\epsilon} \sup_{\theta \in K_{v_\epsilon}} \mathbf{P}_\theta(\widehat{\theta}_\epsilon - \theta \notin u_\epsilon\Omega) \\
&\geqslant \inf_{\widehat{\theta}_\epsilon}(2l_\epsilon)^{-d}\sum_{i=1}^{m_n}\sum_{\theta\in\Lambda_\epsilon}\mathbf{P}_\theta(\widehat{\theta}_\epsilon - \theta \notin u_\epsilon\Omega, W_{i\epsilon}) \\
&\geqslant (2l_\epsilon)^{-d}\sum_{i=1}^{m_\epsilon}\sum_{e=1}^{m_{2i\epsilon}}\inf_{\widehat{\theta}_\epsilon}\sum_{\theta\in\Lambda_{ie}}\mathbf{P}_\theta(\widehat{\theta}_\epsilon - \theta \notin u_\epsilon\Omega, W_{i\epsilon}).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

4. Чтобы оценить погрешность линейной аппроксимации стохастической части логарифма отношения правдоподобия, доказываются неравенства следующего вида (см. лемму 4.2, а также для сравнения (3.4) и лемму 5.3 в [14]). Для любых $\theta_j, \theta_k \in \Lambda_\epsilon \cap K_{ije}$ и $\kappa > 0$ имеет место

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\epsilon^{-1}|\xi(\theta_j,\theta_k) - (\theta_k-\theta_j)'\tau_{\theta_j} - \rho_\epsilon'\tau_{\theta_j}| > \kappa, W_{i\epsilon}) \\
&\leqslant C\int\limits_{\Gamma_{\epsilon i}} \exp\left\{-\frac{|t|^2}{2\epsilon^2\|S_\theta(t,0)\|^2}\right\}dt\,\exp\left\{-c\kappa^2|\theta_k-\theta_j|^{-2-\lambda}\epsilon^{-2}\right\},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\rho_\epsilon = \rho_\epsilon(\theta_j, \theta_k) = \epsilon^2 \|S_\theta(t,\theta_j)\|^{-2} \int S_\theta(t,\theta_j)(S(t,\theta_k) \\ - S(t,\theta_j) - (\theta_k - \theta_j)' S_\theta(t,\theta_j))\, dt.$$

Так как $\tau \in \epsilon^{-1}\Gamma_{i\epsilon}$, то легко показать, что

$$\rho_\epsilon' \int S_\theta(t,0)dw(t) < \delta_\epsilon \to 0 \tag{4.3}$$

при $\epsilon \to 0$.

5. Оценки, подобные (4.2), (4.3), вместе с применением “chaining” метода позволяют применить к слагаемым правой части (4.1) технику доказательства многомерной локально асимптотически минимаксной нижней границы [2] так, как это было осуществлено в [14].

Построение параллелепипедов K_{ij} для наглядности проведем в случае, когда $x_{i\epsilon}$ является первым ортом e_1 системы координат. Зададим подпространство Π_1, ортогональное e_1. Определим в решетке $\Lambda_\epsilon \cap \Pi_1$ подрешетку $\Lambda_i^1 = \{\theta_{ij}\}_{1 \leqslant j \leqslant m_{1i\epsilon}}$ с шагом $2c_{3\epsilon}\delta_{1\epsilon}$, где $c_{3\epsilon}$ – целое, $c_{3\epsilon}/c_{2\epsilon} \to \infty$, $c_{3\epsilon}\delta_{1\epsilon} = o(\epsilon^2 u_\epsilon^{-1})$, $c_{3\epsilon}^3 c_{1\epsilon}^{-3} \epsilon^{-2} u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Положим

$$K_{ij} = K(\theta_{ij}) = \Big\{x : x = \lambda x_{i\epsilon} + u + \theta_{ij},\ u = \{u_k\}_{k=1}^d,\ u \perp x_{ni}, \\ |u_k| \leqslant c_{3n}\delta_{1n},\ \lambda \in R^1,\ u \in R^d\Big\} \cap K_{v_\epsilon}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_{1i\epsilon}.$$

Определим множество Λ_{ie} в случае самой простой геометрии, когда расстояние от множества $\partial\Omega$ до нуля достигается только в двух точках. Каждое множество Λ_{ie} состоит из множеств $K(\theta_{ij}) \cap \Lambda_\epsilon$, для которых

$$\theta_{ij} \in \Theta_{ie} = \Theta_i(k_1, \dots, k_{d-d_1}) = \{\theta : \theta = \theta_{ij} + (-1)^{t_2} 2k_2 c_{3\epsilon}\delta_{1\epsilon} e_2 \\ + \dots + (-1)^{t_d} 2k_d c_{3\epsilon}\delta_{1\epsilon} e_d;\ t_2, \dots t_d = 0,1\},$$

где $k_2, \dots, k_d$ фиксированы для каждого Λ_{ie} и $0 \leqslant k_2, \dots, k_d < C_{1\epsilon}$, причем $C_{1\epsilon}c_{3\epsilon}c_{1\epsilon} \to \infty, \epsilon^{-2} C_{1\epsilon}^3 c_{3\epsilon}^3 c_{1\epsilon}^3 u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Положим $K_{ie} = \bigcup\limits_{\theta \in \Theta_{ie}} K(\theta)$.

В случае произвольной геометрии $\partial\Omega$ задание множеств Λ_{ie} несколько сложнее, и, более того, индексация становится более громоздкой (см. [14]), однако ход рассуждений практически не изменяется.

Зафиксируем $\delta > 0$. Для всех $\theta \in \Lambda_{ie}$ определим события $A_i(0,\theta,\delta)$: $\epsilon^{-1}(\xi(0,\theta) - \theta'\tau) > \delta$. Положим $A_{ie} = \bigcap_{\theta\in\Theta_{ie}} A_i(0,\theta,\delta)$. Обозначим B_{ie} событие, дополнительное к A_{ie}.

Рассуждая аналогично (3.8) и (3.9) в [14], получаем

$$\begin{aligned}
&\inf_{\widehat{\theta}_\epsilon} \sum_{\theta\in\Lambda_{ie}} \mathbf{P}_\theta(\widehat{\theta}_\epsilon - \theta \notin u_\epsilon\Omega, W_{i\epsilon})\\
&\geqslant \inf_{\widehat{\theta}_\epsilon} \sum_{\theta\in\Lambda_{ie}} \mathbf{E}\Big[\chi(\widehat{\theta}_\epsilon - \theta \notin u_\epsilon\Omega)\exp\{\epsilon^{-1}\tau - (2\epsilon^2)^{-1}\rho^2(\theta_0,\theta_\epsilon)\},\\
&\qquad W_{i\epsilon}, A_i(\theta,0,\kappa)\Big] \qquad\qquad (4.4)\\
&\geqslant \mathbf{E}\Big[\inf_t \sum_{\theta\in\Lambda_{ie}} \chi(t-\theta\notin u_\epsilon\Omega)\exp\left\{\epsilon^{-1}\theta'\tau - (2\epsilon^2)^{-1}\theta' I\theta + o(1)\right\},\\
&\qquad W_{i\epsilon}, A_{ie}\Big] = R_\epsilon
\end{aligned}$$

при достаточно медленном стремлении $\delta = \delta_\epsilon$ к нулю при $\epsilon \to 0$.

Обозначим $\Delta_\epsilon = \exp\{\tau'\tau/2\}$, $y = y_\theta = \epsilon^{-1}\theta - \tau$. Используя $\epsilon^{-2}u_\epsilon\delta_{1\epsilon} \to 0$, $\epsilon^{-2}u_\epsilon^{2+\lambda} \to 0$ при $\epsilon \to 0$, получаем

$$\begin{aligned}
(2l_\epsilon)^{-d}R_\epsilon &\geqslant (2l_\epsilon)^{-d}\mathbf{E}\Bigg[\Delta_\epsilon \inf_t \sum_{\theta\in\Lambda_{ie}} \chi(t-y_\theta-\tau\notin\epsilon^{-1}u_\epsilon\Omega)\exp\left\{-\frac{1}{2}y_\theta' I y_\theta\right\},\\
&\qquad W_{i\epsilon}, A_{ie}\Bigg](1+o(1))\\
&= (2v_\epsilon)^{-d}\mathbf{E}\Bigg[\Delta_\epsilon \inf_t \int\limits_{\epsilon^{-1}K_{ie}-\psi_\epsilon} \chi(t-y\notin\epsilon^{-1}u_\epsilon\Omega)\exp\left\{-\frac{1}{2}y' I y\right\}dy,\\
&\qquad W_{i\epsilon}, A_{ie}\Bigg](1+o(1)) := (2v_\epsilon)^{-d} I_{ie\epsilon}(1+o(1)).
\end{aligned} \qquad (4.5)$$

Для $\kappa \in (0,1)$ обозначим

$$\begin{aligned}
K_{i\kappa}(\theta_{ij}) = \Big\{&x : x = \lambda x_{i\epsilon} + u + \theta_{ij},\ u = \{u_k\}_1^d,\\
&|u_k| \leqslant (c_{3\epsilon} - Cc_{2\epsilon})\delta_{1\epsilon},\ u \perp x_{i\epsilon}, \lambda \in R^1\Big\} \cap K_{(1-\kappa)v_\epsilon},
\end{aligned}$$

$$K_{ie\kappa} = \bigcup_{\theta\in\Theta_{ie}} K_{i\kappa}(\theta).$$

Здесь $u \perp x_{i\epsilon}$ обозначает, что векторы u и $x_{i\epsilon}$ ортогональны.

Если $\tau \in \epsilon^{-1}\Gamma_{i\epsilon}$, то $\epsilon^{-1}K_{ie\kappa} \subset \epsilon^{-1}K_{ie} - \tau$ и, следовательно,

$$I_{ie\epsilon} \geqslant U_{ie\epsilon}\overline{J}_{ie\epsilon}(1 + o(1)), \tag{4.6}$$

где

$$U_{ie\epsilon} = \mathbf{E}\left[\Delta_\epsilon, W_{i\epsilon}, A_{ie}\right],$$

$$\overline{J}_{ie\epsilon} := \inf_t J_{ie\epsilon}(t) := \inf_t \int\limits_{\epsilon^{-1}K_{ie\kappa}} \chi(t - y \notin \epsilon^{-1}u_\epsilon\Omega) \exp\left\{-\frac{1}{2}y'Iy\right\} dy.$$

В силу леммы 3.1 в [14],

$$\overline{J}_{ie\epsilon} = J_{ie\epsilon}(0). \tag{4.7}$$

Имеем

$$\mathbf{E}\left[\Delta_\epsilon, W_{i\epsilon}\right] = \mathrm{mes}(\Gamma_{i\epsilon})(1 + o(1)) \tag{4.8}$$

и для доказательства теоремы 2.5 остается только показать, что

$$\begin{aligned} U_{2ie\epsilon} := \mathbf{E}\left[\Delta_\epsilon, W_{i\epsilon}, B_{ie}\right] = \exp\{\epsilon^{-2}|x_{i\epsilon}|^2/2\}\mathbf{P}(W_{i\epsilon}, B_{ie}) \\ = o(\mathrm{mes}(\Gamma_{i\epsilon})). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Тогда из (4.1) и (4.4)-(4.9) будет следовать утверждение теоремы 2.5.

Таким образом, остается оценить $\mathbf{P}(W_{i\epsilon}, B_{ie})$. Для оценки будем использовать "chaining" метод.

Для простоты символики будем считать, что $l_\epsilon = 2^m$. Зафиксируем $\theta \in \Theta_{ie}$. Зададим множества Ψ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, индуктивно. Положим $\Psi_0 = \{\theta\}$. Зададим множество

$$\Psi_j = \{\theta : \theta = \theta_{j-1} \pm v_\epsilon 2^{-j} x_{i\epsilon}, \theta_{j-1} \in \Psi_{j-1}\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Положим $\Psi_{m+1} = \Lambda_{ie\epsilon} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \Psi_j$. Для каждой точки $\theta_j \in \Psi_j$ условимся обозначать θ_{j-1} ближайшую к ней точку $\theta \in \Psi_{j-1}$, которая лежит между нулем и θ_j.

Имеем

$$\begin{aligned} S(\theta_j, 0) &= \xi(\theta_j, 0) - (\theta_j - \theta)'\tau \\ &= S_1(\theta_j, \theta_{j-1}) + S(\theta_{j-1}, 0) + S_2(\theta_j, \theta_{j-1}), \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$S_1(\theta_j, \theta_{j-1}) = \xi(\theta_j, \theta_{j-1}) - (\theta_j - \theta_{j-1})'\tau_{\theta_{j-1}} \tag{4.11}$$

и
$$S_2(\theta_j, \theta_{j-1}) = (\theta_j - \theta_{j-1})'(\tau_{\theta_{j-1}} - \tau). \tag{4.12}$$
Тогда
$$\mathbf{P}(W_{i\epsilon}, B_{ie}) \leqslant C\left(\sum_{\theta_0\in\Theta_{ie}}\left(V_0(\theta_0) + \sum_{\theta\in\Lambda_{1ile}(\theta_0)}(V_1(\theta)+V_2(\theta))\right)\right), \tag{4.13}$$
где $\Lambda_{1ie}(\theta_0) = \Lambda_{ie}(\theta_0)\setminus\Theta_{ie}$,
$$V_0(\theta_0) = \mathbf{P}(|S(0,\theta_0) > \delta/4, W_{i\epsilon}),$$
$$V_s(\theta_j) = \mathbf{P}(j^2|S_s(\theta_j,\theta_{j-1})| > \delta/4, W_{i\epsilon}), \quad s = 1, 2.$$

Лемма 4.1. *Существует семейство $\gamma_{1\epsilon}, \gamma_{1\epsilon} \to 0$ при $\epsilon \to 0$, такое что для любого семейства $\gamma_{2\epsilon} > \gamma_{1\epsilon}$ имеет место*
$$V_0(\theta) < C\exp\{-C|\theta|^{-2-\lambda}\gamma_{2\epsilon}^2\epsilon^{-2}\}\mathbf{P}(W_{i\epsilon}) \tag{4.14}$$
и для $s = 1, 2$ имеет место
$$V_s(\theta_j) < C\exp\{-C|\theta_j - \theta_{j-1}|^{-2-\lambda}\gamma_{2\epsilon}^2\epsilon^{-2}\}\mathbf{P}(W_{i\epsilon}). \tag{4.15}$$

Подставляя оценки (4.14) и (4.15) в (4.13), получаем (4.9).

Доказательство (4.14) и (4.15) аналогично доказательству (5.6) и (5.7) в [14] и базируется на тех же самых оценках, содержащихся в леммах 5.4–5.8 в [14]. Доказательство этих лемм для постановки данной работы принципиально не отличается от доказательств соответствующих лемм в [14]. Доказательство аналогов лемм 5.4–5.6 из [14] для данной постановки совсем просто и будет опущено. Приведем только формулировки и доказательства аналогов лемм 5.7 и 5.8 из [14].

Обозначим $\overline{h} = \theta_j - \theta_{j-1}, h = \theta_j, h_1 = \theta_{j-1}$.

Лемма 4.2. *Для любого $u \in R^d$*
$$\mathbf{E}[(u'(\tau - \tau_h))^2] = O(|u|^2|h|^\lambda). \tag{4.16}$$

Лемма 4.3. *Пусть $v \perp \overline{h}, v \in R^d$. Тогда*
$$\mathbf{E}[(\overline{h}'(\tau_{h_1} - \tau))(v'\tau)] = O(|v||\overline{h}||h_1|^{\lambda/2}). \tag{4.17}$$
Если $v \parallel \overline{h}$, то
$$\mathbf{E}[(\overline{h}'(\tau_{h_1} - \tau))(v'\tau)] = O(|v||\overline{h}||h_1|^{\lambda}). \tag{4.18}$$

Доказательство леммы 4.2. Используя (2.7), получаем

$$\begin{aligned} J(h,u) &:= \mathbf{E}[(\xi(h,h+u)-\xi(0,u))^2] \\ &\leqslant C(\mathbf{E}[(\xi(\theta_0,h+u)-(h+u)'\tau)^2] \\ &+\mathbf{E}[(\xi(\theta_0,h+u)-u'\tau)^2]+\mathbf{E}[(\xi(\theta_0,h)-h'\tau)^2]) \\ &\leqslant C(|h+u|^{2+\lambda}+|h|^{2+\lambda}+|u|^{2+\lambda}). \end{aligned} \tag{4.19}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(u'(\tau-\tau_h))^2] &\leqslant C(E[(\xi(h,h+u)-u'\tau_h-\xi(0,u)+u'\tau)^2] \\ &+J(h,u))) \leqslant C(\mathbf{E}[(\xi(h,h+u)-u'\tau_h)^2] \\ &+\mathbf{E}[(\xi(0,u))^2-u'\tau)^2]+J(h,u)) \\ &\leqslant C(|h+u|^{2+\lambda}+|h|^{2+\lambda}+|u|^{2+\lambda}). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Выбирая $|u|=C|h|$, получаем (4.16). □

Доказательство леммы 4.3. Применяя неравенство Коши и утверждение леммы 4.2, получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}[(\overline{h}'(\tau_{h_1}-\tau))(v'\tau)]| &\leqslant (\mathbf{E}[((\overline{h}'(\tau_{h_1}-\tau)))^2])^{1/2}(\mathbf{E}[(v'\tau)^2])^{1/2} \\ &= O(|v||\overline{h}||h_1|^{\lambda/2}). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Докажем (4.18). Имеем

$$O(|v|^2|h|^\lambda)=\mathbf{E}[(v'(\tau-\tau_h))^2]=v'I(0)v+v'I(h)v-2\mathbf{E}[(v'\tau)(v'\tau_h)]. \tag{4.22}$$

Отсюда и из (2.8) получаем

$$\mathbf{E}[(v'\tau)(v'\tau_h)]=v'I(0)v+O(|v|^2|h|^\lambda). \tag{4.23}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(\overline{h}'(\tau_{h_1}-\tau))(v'\tau)] &= C(\mathbf{E}[(h'\tau_{h_1})(h\tau)]-\mathbf{E}[(h'\tau)(h\tau)]) \\ &= O(|v||\overline{h}||h_1|^\lambda). \end{aligned} \tag{4.24}$$

□

Литература

1. J. Hajek, *Local asymptotic minimax and admisibility in estimation.* — In: Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. California Univ. Press, Berkeley **1** (1972), pp. 175–194.
2. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическая теория оценивания.* Наука, Москва, 1979.

3. Yu. A. Kutoyants, *Identification of Dynamical System with Small Noise*. Springer, Berlin, 1994.
4. L. Le Cam, *Limits of experiments*. — In: Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. California Univ. Press. Berkeley **1** (1972), pp. 245–261.
5. H. Strasser, *Mathematical Theory of Statistics*. W. de Gruyter, Berlin, 1985.
6. A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*. Cambridge. University Press, 1998.
7. R. E. Blahut, *Hypothesis testing and information theory*. — IEEE Trans. Inform. Theory **20** (1974), 405–415.
8. R. R. Bahadur, *Asymptotic efficiency of tests and estimates*. — Sankhyā **22** (1960), 229–252.
9. J. Bishwal, *Parameter Estimation of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin-Heidelderg, 2008.
10. T. Chiyonobu, *Hypothesis testing for signal detection problem and large deviations*. — Nagoya Math. J. **162** (2003), 187–203.
11. A. Puhalskii, V. Spokoiny, *On large-deviation efficiency in statistical inference*. — Bernoulli **4** (1998), 203–272.
12. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Большие уклонения и проверка статистических гипотез*. — Труды института математики СО РАН, Наука, Новосибирск, 1992.
13. М. С. Ермаков, *Асимптотически эффективные статистические выводы для вероятностей умеренных уклонений*. — Теория вероятн. и ее примен. **48** (2003), 676–700.
14. M. S. Ermakov, *The sharp lower bound of asymptotic efficiency of estimators in the zone of moderate deviation probabilities*. — Electronic J. Statist. **6**, (2012), 2150–2184.
15. M. Radavičius, *From asymptotic efficiency in minimax sense to Bahadur efficiency*. — In: New Trends Probab. Statist. (V. Sazonov, T. Shervashidze Eds.), VSP/Mokslas, Vilnius (1991), pp. 629–635.
16. W. C. M. Kallenberg, *Intermediate efficiency, theory and examples*. — Ann. Statist. **11** (1983), 170–182.
17. М. В. Бурнашев, *Об оценке максимального правдоподобия параметра сигнала в белом гауссовском шуме*. — Пробл. передачи информ. **11** (1975), 55–69.
18. F. Q. Gao, F. J. Zhao, *Moderate deviation and hypothesis testing for signal detection problem*. — Sci. China. Math. **55** (2012), 2273–2284.
19. S. Ihara, Y. Sakuma, *Signal detection in white Gaussian channel*. — In: Proc. Seventh Japan–Russian Symp. Probab. Theory, Math. Stat., World Scientific, Singapore (1996), pp. 147–156.
20. R. S. Liptzer, A. N. Shiriaev, *Statistics of Random Processes*. Springer, Berlin-Heidelderg, 2005.
21. L. D. Brown, A. V. Carter, M. G. Low, C. H. Zhang, *Equivalence theory for density estimation, Poisson processes and Gaussian white noise with drift*. — Ann. Statist. **32** (2004), 2074–2097.
22. G. K. Golubev, M. Nussbaum, H. H. Zhou, *Asymptotic equivalence of spectral density estimation and Gaussian white noise*. — Ann. Statist. **38** (2010), 181–214.
23. J. Wolfowitz, *Asymptotic efficiency of the maximum likelihood estimator*. — Теория вероятн. и ее примен. **10** (1965), 267–281.

Ermakov M. S. On asymptotically efficient statistical inference on a signal parameter.

We consider the problems of confidence estimation and hypothesis testing on a parameter of signal observed in Gaussian white noise. For these problems we point out lower bounds of asymptotic efficiency in the zone of moderate deviation probabilities. These lower bounds are versions of local asymptotic minimax Hajek–Le Cam lower bound in estimation and the lower bound for Pitman efficiency in hypothesis testing. The lower bounds were obtained for both logarithmic and sharp asymptotics of moderate deviation probabilities.

Институт проблем
машиноведения РАН,
Большой пр., В.О., 61
199178 С.-Петербург, Россия
С.Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: erm2512@mail.ru

Поступило 7 октября 2013 г.