Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

Ю. С. Елисеева[1,2], Ф. Гётце[4], А. Ю. Зайцев[1,3,4]

ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ПРОБЛЕМЕ ЛИТТЛВУДА–ОФФОРДА

§1. Введение

Эта статья представляет собой расширенный и доработанный вариант препринта [6].

Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общим распределением $F = \mathcal{L}(X)$. Функция концентрации Леви случайной величины X определяется равенством

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}} F\{[x, x+\lambda]\}, \quad \lambda > 0.$$

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$. В статье рассматривается вопрос о поведении функции концентрации случайной величины $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$ в зависимости от арифметической структуры коэффициентов a_k. Оценки функций концентрации такого типа играют важную роль в изучении распределений собственных чисел случайных матриц (см., например, [20, 23–27]). Авторы упомянутых выше работ называют этот вопрос проблемой Литтлвуда–Оффорда (см. также [8, 14, 17]).

Пусть далее F_a – распределение суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$, а G – распределение симметризованной случайной величины $\widetilde{X} = X_1 - X_2$. Обозначим

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int\limits_{|x| \leqslant \tau} x^2\, G\{dx\} + \int\limits_{|x| > \tau} G\{dx\} = \mathbf{E} \min\left\{\widetilde{X}^2/\tau^2, 1\right\}, \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Ключевые слова: функции концентрации, неравенства, проблема Литтлвуда–Оффорда, суммы независимых случайных величин.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00242 и 13-01-00256;
[2]Работа поддержана проектом НИР СПбГУ 6.38.672.2013;
[3]Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-12104 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”;
[4]Работа поддержана SFB 701 Билефельдского университета.

Одной и той же буквой c мы будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными даже в пределах одной формулы. Запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leqslant cB$. Будем также писать $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$. Для

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

мы будем обозначать $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ и $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$.

Простейшие свойства функций концентрации хорошо изучены (см., например, [2, 15, 21]). В частности, очевидно, что

$$Q(F, \mu) \leqslant (1 + \lfloor \mu/\lambda \rfloor)\, Q(F, \lambda)$$

для любых $\mu, \lambda > 0$, где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x. Следовательно,

$$Q(F, c\lambda) \asymp Q(F, \lambda) \tag{2}$$

и

$$\text{если } Q(F, \lambda) \ll K, \quad \text{то} \quad Q(F, \mu) \ll K(1 + \mu/\lambda). \tag{3}$$

Вопрос об оценивании функций концентрации взвешенных сумм S_a при различных ограничениях на вектор $a \in \mathbf{R}^n$ и на распределения слагаемых был рассмотрен в работах [11, 20, 23–27]. Ю. С. Елисеева и А. Ю. Зайцев получили в работе [5] (см. также [4]) некоторые уточнения результатов [11, 24]. В данной статье мы сформулируем и докажем аналогичные уточнения результатов работы Р. Вершинина [27].

Отметим, что связь между скоростью убывания функции концентрации суммы и арифметической структурой носителей распределений независимых случайных величин была выявлена для произвольных распределений слагаемых в работе Т. Арака [1], см. также [2, 28], задолго до появления работ [20, 23–27], в которых аналогичная связь была обнаружена в частном случае слагаемых с распределениями, возникающими при рассмотрении проблемы Литтлвуда–Оффорда. Авторы настоящей работы собираются посвятить обсуждению связи между результатами упомянутых выше работ отдельную публикацию.

Обозначим $\log_+(x) = \max\{0, \log x\}$. Приведем формулировку результата Р. Вершинина [27].

Предложение 1. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины и $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\|a\| = 1$. Предположим, что существуют положительные числа τ, p, K, L, D, такие что $Q(\mathcal{L}(X), \tau) \leqslant 1 - p$, $\mathbf{E}\,|X| \leqslant K$ и*

$$\|\, ta - m\| \geqslant L\sqrt{\log_+(t/L)} \quad \textit{для всех } m \in \mathbf{Z}^n \quad \textit{при} \quad t \in (0, D]. \tag{4}$$

Если $L^2 \geqslant 1/p$, *то*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \leqslant \frac{C\,L}{D}, \tag{5}$$

где величина C *зависит только от* τ, p *и* K.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия предложения* 1. *Тогда для любого* $\varepsilon \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$Q(F_a, \varepsilon) \ll C\,L\Big(\varepsilon + \frac{1}{D}\Big). \tag{6}$$

Ясно, что если

$$0 < D \leqslant D(a) = D_L(a) = \inf\Big\{t > 0 : \operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) < L\sqrt{\log_+(t/L)}\Big\}, \tag{7}$$

где

$$\operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) = \min_{m \in \mathbf{Z}^n} \|\, ta - m\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} |\, ta_k - m_k|^2\Big)^{1/2},$$

то условие (4) выполняется. В работе [27] величина $D(a)$ названа наименьшим общим знаменателем вектора $a \in \mathbf{R}^n$ (в работах [23,24] приведены аналогичные определения).

Заметим, что при $|\,t| \leqslant 1/2\,\|a\|_\infty$ мы имеем

$$\big(\operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n)\big)^2 = \sum_{k=1}^{n} |\, ta_k|^2 = \|a\|^2 t^2 = t^2, \tag{8}$$

так что $D(a) > L$ по определению. Кроме того, из равенства (8) следует, что $D(a) \geqslant 1/2\,\|a\|_\infty$ (см. [27, лемма 6.2]).

Заметим также, что именно утверждение следствия 1 при $D = D(a)$ фигурирует в качестве соответствующего результата в работе [27]. Формулировка предложения 1 представляется более естественной, так как она проще утверждения следствия 1, причем последнее легко выводится из нее при помощи соотношений (3) и (7). Минимальное L, для которого выполняются условия предложения 1, зависит от a и D, и, вообще говоря, может оказаться существенно больше, чем $p^{-1/2}$.

Покажем, что в формулировке предложения 1 условие (4) можно без ущерба для результата заменить следующим:

$$\|\, ta - m\| \geqslant f_L(t) \quad \text{при всех} \quad m \in \mathbf{Z}^n \quad \text{и} \quad t \in \Big[\frac{1}{2\,\|a\|_\infty}, D\Big], \tag{9}$$

где

$$f_L(t) = \begin{cases} t/6 & \text{при } \ 0 < t < eL, \\ L\sqrt{\log(t/L)} & \text{при } \ t \geqslant eL. \end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что равенство (8) подтверждает естественность предположения $t \geqslant 1/2\,\|a\|_\infty$ в условии (9). При $0 < t < 1/2\,\|a\|_\infty$ неравенство (9) выполняется автоматически.

Формально условие (9) может быть более ограничительным по сравнению с условием (4). Однако, если условие (4) выполнено, а условие (9) – нет, то неравенство (5) все равно справедливо по тривиальным причинам.

Действительно, если $t \geqslant eL$, то выполнение условия (9) для такого t следует из условия (4). Если $0 < t < eL$ и существует $m \in \mathbf{Z}^n$, такое что $\|\,ta - m\| < t/6$, то, обозначая $k = \lfloor eL/t \rfloor + 1$, мы имеем $tk \geqslant eL$ и

$$\|\,tka - km\| < tk/6 \leqslant 2eL/6 < L \leqslant L\sqrt{\log_+(tk/L)}.$$

Так как $km \in \mathbf{Z}^n$, то $D \leqslant D(a) \leqslant tk < 6L$ и требуемое неравенство (5) следует из $Q(F_a, 1/D) \leqslant 1$.

Заметим, что возможна ситуация, при которой условие (9) выполнено, а условие (4) – нет, при некоторых t из интервала $L < t < eL$. Тогда оценки функций концентрации из предложения 1 и следствия 1 все равно справедливы. Это следует из теоремы 1 настоящей работы.

Сказанное выше может служить обоснованием того, что альтернативный наименьший общий знаменатель $D^*(a)$ разумно определять по формуле

$$D^*(a) = D^*_L(a) = \inf\Big\{t > 0 : \operatorname{dist}(ta, \mathbf{Z}^n) < f_L(t\|a\|)\Big\}. \tag{11}$$

Это определение будет ниже использоваться и для случая $\|a\| \neq 1$. Очевидно, что

$$D^*(\lambda a) = D^*(a)/\lambda \ \text{ для любого } \ \lambda > 0, \tag{12}$$

причем из равенства (8) также следует, что $D^*(a) \geqslant 1/2\,\|a\|_\infty$.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\|a\| = 1$. Предположим, что выполнено условие* (9). *Если $L^2 \geqslant 1/M(1)$, где величина*

$M(1)$ определяется формулой (1), *то*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{D\sqrt{M(1)}}\,. \tag{13}$$

Сформулируем теперь аналогичное теореме 1 утверждение для произвольного a, не предполагая, что $\|a\| = 1$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *без предположения* $\|a\| = 1$ *и с заменой условия* (9) *на условие*

$$\|\, ta - m\| \geqslant f_L(t\|a\|) \quad \textit{при всех } m \in \mathbf{Z}^n \textit{ и } \; t \in \Big[\frac{1}{2\,\|a\|_\infty}, D\Big]. \tag{14}$$

Если $L^2 \geqslant 1/M(1)$, *то*

$$Q\Big(F_a, \frac{1}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(1)}}. \tag{15}$$

Доказательства теоремы 1 и следствия 2 аналогичны доказательствам основных результатов работы [5]. Они в некотором смысле более естественны, чем доказательства в работе [27], так как они не содержат излишних предположений, таких как, например, $\mathbf{E}\,|X| \leqslant K$. Это достигается за счет использования соотношения (46). Приведенные ниже доказательства отличаются от рассуждений, проводимых в работах [11, 24, 27] использованием методов, разработанных Эссееном [10] (см. также доказательство леммы 4, гл. II в [21]).

Применяя следствие 2 к случайным величинам X_k/τ, $\tau > 0$, мы получим следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$, $\tau > 0$. *Тогда в условиях следствия* 2 *с заменой условия* $L^2 \geqslant 1/M(1)$ *на условие* $L^2 \geqslant 1/M(\tau)$, *справедливо неравенство*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{1}{D}\Big) = Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{\|a\| D\sqrt{M(\tau)}}. \tag{16}$$

В частности, если $\|a\| = 1$, *то*

$$Q\Big(F_a, \frac{\tau}{D}\Big) \ll \frac{1}{D\sqrt{M(\tau)}}. \tag{17}$$

Для доказательства следствия 3 достаточно воспользоваться следствием 2 и соотношением (1).

Очевидно, что $M(\tau) \gg 1 - Q(G,\tau) \geqslant 1 - Q(F,\tau) \geqslant p$ в условиях предложения 1. Заметим, что величина $M(\tau)$ может быть существенно больше, чем p. Например, p может равняться нулю, в то время как $M(\tau) > 0$ для любого невырожденного распределения $F = \mathcal{L}(X)$. Сравнивая оценки (5) и (17), мы видим, что множитель L заменен на множитель $1/\sqrt{M(\tau)} \leqslant L$, который может быть существенно меньше, чем L в условиях следствия 3. Кроме того, в формулировке предложения 1 присутствует излишнее предположение $\mathbf{E}\,|X| \leqslant K$. Наконец, зависимость констант от распределения $\mathcal{L}(X)$ выписана явно, в неравенствах (13) и (15)–(17) соответствующие константы являются абсолютными, в отличие от неравенств (5) и (6), в которых величина C неявным образом зависит от τ, p и K. Уточнение следствия 1 приведено ниже в теореме 2.

Напомним хорошо известное неравенство Колмогорова–Рогозина (см. [2, 15, 21, 22]).

Предложение 2. *Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые случайные величины с распределениями $W_k = \mathcal{L}(Y_k)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – положительные числа, такие что $\lambda_k \leqslant \lambda$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$Q\Big(\mathcal{L}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big), \lambda\Big) \ll \lambda \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left(1 - Q(W_k, \lambda_k)\right)\Big)^{-1/2}. \tag{18}$$

Эссеен [10] (см. [21, теорема 3, гл. III]) показал, что справедливо следующее утверждение, уточняющее предложение 2.

Предложение 3. *В условиях предложения 2 мы имеем*

$$Q\Big(\mathcal{L}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big), \lambda\Big) \ll \lambda \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\, M_k(\lambda_k)\Big)^{-1/2}, \tag{19}$$

где $M_k(\tau) = \mathbf{E}\, \min\big\{\widetilde{Y}_k^2/\tau^2, 1\big\}$.

Дальнейшие уточнения неравенств (18) и (19) можно найти в работах [1–3, 12, 13, 16, 18, 19, 29].

Ясно, что теорема 1 соотносится с предложением 1 аналогично тому, как неравенство Эссеена (19) соотносится с неравенством Колмогорова–Рогозина (18). При этом зависимость величины C от τ, p и K в неравенствах (5) и (6) не выписана в явном виде.

Если мы рассмотрим случай $D = 1/2\,\|a\|_\infty$, то ограничения на арифметическую структуру вектора a отсутствуют, и следствие 3 дает оценку

$$Q(F_a,\, \|a\|_\infty\,\tau) \ll \frac{\|a\|_\infty}{\|a\|\sqrt{M(\tau)}}. \tag{20}$$

Этот результат следует из неравенства Эссеена (19) для суммы неодинаково распределенных случайных величин $Y_k = a_k X_k$ при $\lambda_k = a_k\,\tau$, $\lambda = \|a\|_\infty\,\tau$. При $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n^{-1/2}$ неравенство (20) превращается в хорошо известный частный случай предложения 3:

$$Q\,(F^{*n}, \tau) \ll \frac{1}{\sqrt{n\,M(\tau)}}. \tag{21}$$

Из неравенства (21) следует и неравенство Колмогорова–Рогозина для независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$Q(F^{*n}, \tau) \ll \frac{1}{\sqrt{n\,(1 - Q(F, \tau))}}.$$

Неравенство (20) не может дать оценку лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$, так как правая часть неравенства (20) не меньше, чем $n^{-1/2}$. Сформулированные выше результаты наиболее интересны, если D существенно больше, чем $1/2\,\|a\|_\infty$. В этом случае можно ожидать оценки, которые значительно лучше по порядку, чем $O(n^{-1/2})$. Именно такие оценки функций концентрации $Q(F_a, \lambda)$ возникают при изучении распределений собственных чисел случайных матриц.

При $0 < D < 1/2\,\|a\|_\infty$ в условиях следствия 3 выполняется неравенство

$$Q\left(F_a, \frac{\tau}{D}\right) \ll \frac{1}{\|a\|D\sqrt{M(\tau)}}. \tag{22}$$

В этом случае оно следует из (3) и (20).

В условиях следствия 3 существует много возможностей выбрать фиксированное $\varepsilon > 0$ в виде $\varepsilon = \tau/D$ для применения неравенства (16). Поэтому для фиксированного $\varepsilon = \tau/D$ мы можем минимизировать правую часть неравенства (16), выбирая оптимальные τ и D. Это возможно, и оптимальная оценка содержится в следующей теореме 2.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия следствия* 2 *при* $D \leqslant D^*(a)$ *за исключением условия* $L^2 \geqslant 1/M(1)$. *Пусть* $L^2 > 1/P$, *где*

$$P = \mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0) = \lim_{\tau \to 0} M(\tau).$$

Тогда существует τ_0, *такое что* $L^2 = 1/M(\tau_0)$. *При этом оценка*

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{\|a\| D^*(a) \sqrt{M(\varepsilon\, D^*(a))}} \tag{23}$$

справедлива для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \tau_0/D^*(a)$. *Кроме того, при* $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ *выполняется неравенство*

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon L}{\varepsilon_0\, \|a\| D^*(a)}. \tag{24}$$

В утверждении теоремы 2 величина ε может быть произвольно мала. Устремляя ε к нулю, при $L^2 > 1/P$ получаем

$$Q(F_a, 0) \ll \frac{1}{\|a\| D^*(a) \sqrt{P}}. \tag{25}$$

При применении неравенств (23)–(25) следует иметь в виду, что, согласно (12), $\|a\| D^*(a) = D^*(a/\|a\|)$.

Теорема 2 легко выводится из следствия 3. В самом деле, обозначая $\varepsilon = \tau/D$, можно переписать неравенство (16) следующим образом:

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{\|a\| D \sqrt{M(\varepsilon\, D)}}. \tag{26}$$

Неравенство (26) выполняется, если $L^2 \geqslant 1/M(\varepsilon\, D)$ и $0 < D \leqslant D^*(a)$. Если $L^2 \geqslant 1/M(\varepsilon\, D^*(a))$, то выбор $D = D^*(a)$ в неравенстве (26) оптимален, так как

$$D^2 M(\varepsilon\, D) = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\varepsilon^2, D^2\big\}$$

растет с ростом D. По той же причине, если $L^2 < 1/M(\varepsilon\, D^*(a))$, то оптимальным выбором D в неравенстве (26) является решение $D_0(\varepsilon)$ уравнения $L^2 = 1/M(\varepsilon\, D)$. Это решение существует и единственно, если $L^2 > 1/P$, так как функция $M(\tau)$ непрерывна и строго убывает, если $M(\tau) < P$. Кроме того, ясно, что $M(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. В таком случае неравенство (26) превращается в

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{L}{\|a\| D_0(\varepsilon)}. \tag{27}$$

Далее, выбирая τ_0 как решение уравнения $L^2 = 1/M(\tau)$, мы видим, что неравенство (23) справедливо при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \tau_0/D^*(a)$. Ясно, что $D_0(\varepsilon_0) = D^*(a)$. Вдобавок при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ мы имеем

$$M(\varepsilon\, D_0(\varepsilon)) = M(\varepsilon_0\, D_0(\varepsilon_0)) = L^{-2}$$

и, следовательно, $\varepsilon\, D_0(\varepsilon) = \varepsilon_0\, D_0(\varepsilon_0)$. Поэтому при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ неравенство (24) выполняется. Правая часть неравенства с $\|a\| = 1$ допускает также представления

$$\frac{\varepsilon L}{\varepsilon_0\, D^*(a)} = \frac{L}{D_0(\varepsilon)} = \frac{1}{D_0(\varepsilon)\sqrt{M(\varepsilon\, D_0(\varepsilon))}}.$$

Очевидно, что неравенство (24) может быть получено из (26) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ с помощью (3). С другой стороны, применяя при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ неравенство (3) к неравенству (23), мы получим оценку

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} Q\big(F_a, \varepsilon_1\big) \ll \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1\, \|a\| D^*(a)\sqrt{M(\varepsilon_1\, D^*(a))}}. \tag{28}$$

Однако неравенство (28) слабее, чем неравенство (23), так как, очевидно,

$$\varepsilon^2 M(\varepsilon\, \mu) = \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\mu^2, \varepsilon^2\big\} \geqslant \mathbf{E} \min\big\{\widetilde{X}^2/\mu^2, \varepsilon_1^2\big\} = \varepsilon_1^2\, M(\varepsilon_1\, \mu) \tag{29}$$

для любого $\mu > 0$.

Теорема 2 существенно уточняет следствие 1. В частности, в отличие от неравенства (6) следствия 1, при малом ε правая часть неравенства (23) в теореме 2 может убывать при убывании ε. Кроме того, мы только что показали, что применение неравенства (3) может приводить к потере точности оценки. Напомним, что именно при помощи неравенства (3) следствие 1 может быть выведено из предложения 1.

Рассмотрим простой пример. Пусть X – случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с вероятностями

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} = p > 0. \tag{30}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\widetilde{X} = \pm 1\} = p(1-p), \quad \mathbf{P}\{\widetilde{X} = 0\} = 1 - 2\,p(1-p), \tag{31}$$

и функция $M(\tau)$ имеет вид

$$M(\tau) = \begin{cases} 2\,p(1-p) & \text{при } \ 0 < \tau < 1, \\ 2\,p(1-p)/\tau^2 & \text{при } \tau \geqslant 1. \end{cases} \tag{32}$$

Предположим для простоты, что $\|a\| = 1$. Если $L^2 > 1/2\,p(1-p)$, то $\tau_0 = L\sqrt{2\,p(1-p)}$ и при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0 = L\sqrt{2\,p(1-p)}/D^*(a)$ мы имеем

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}. \tag{33}$$

Аналогичная оценка следует из неравенства (23) теоремы 2 при $1/D^*(a) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. При $0 < \varepsilon \leqslant 1/D^*(a)$ из неравенства (23) получаем оценку

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \frac{1}{D^*(a)\sqrt{p(1-p)}}. \tag{34}$$

Таким образом,

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \ll \min\left\{\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\Big(\varepsilon + \frac{1}{D^*(a)}\Big),\, 1\right\} \quad \text{при всех } \varepsilon \geqslant 0. \tag{35}$$

Неравенство (35) не может быть существенно усилено. Рассмотрим, например,

$$a = (s^{-1/2}, \ldots, s^{-1/2}, 0, \ldots, 0) \tag{36}$$

с первыми $s \leqslant n$ кординатами, равными $s^{-1/2}$, и последними $n - s$ координатами, равными нулю. В этом случае $D^*(a) \asymp s^{1/2}$, случайная величина $s^{1/2}S_a$ имеет биномиальное распределение с параметрами s и p и хорошо известно, что

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \gg \min\left\{\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\Big(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{s}}\Big),\, 1\right\} \quad \text{при всех } \varepsilon \geqslant 0. \tag{37}$$

Сравнивая оценки (35) и (37), мы видим, что теорема 2 обеспечивает оптимальный порядок $Q\big(F_a, \varepsilon\big)$ при всех возможных значениях ε. Более того, соответствующая константа оптимальным образом зависит от p.

Может показаться, что последний пример сводится к тривиальному случаю $n = s$. Это не совсем так. Ясно, что величина $Q\big(F_a, 1\big)$ не может намного измениться при малом изменении вектора a, определенного в (36), когда последние $n - s$ координат вектора малы по абсолютной величине, но не равны нулю. При этом степень малости последних $n-s$ координат можно подобрать таким образом, чтобы неравенства (35) и (37) при $\varepsilon \gg s^{-1}$ и $D^*(a) \asymp s^{1/2}$ оставались верны.

Для полноты приведем краткое доказательство неравенства (37). Легко видеть, что $\mathbf{D}\,S_a = p(1-p)$. Следовательно, по неравенству

Чебышева,

$$\mathbf{P}\big\{|S_a - \mathbf{E}\,S_a| < 2\sqrt{p(1-p)}\big\} \geqslant 3/4. \tag{38}$$

Случайная величина S_a принимает значения, кратные $s^{-1/2}$. Поэтому если $s\,p(1-p) \leqslant 1$, то из неравенства (38) следует, что $Q\big(F_a, 0\big) \asymp 1$ и неравенство (37) справед ливо.

Пусть теперь $s\,p(1-p) > 1$. Если $0 < \varepsilon \leqslant 4\sqrt{p(1-p)}$, то, используя (3) и (38), мы получаем

$$3/4 \leqslant Q\big(F_a, 4\sqrt{p(1-p)}\big) \ll \varepsilon^{-1}\sqrt{p(1-p)}\,Q\big(F_a, \varepsilon\big) \tag{39}$$

и, следовательно,

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \gg \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}. \tag{40}$$

Ясно, что из (2), (3) и (40) следует, что $Q(F_a, \varepsilon) \asymp 1$ при $\varepsilon \geqslant 4\sqrt{p(1-p)}$. Применяя неравенство (40) при $\varepsilon = s^{-1/2}$ и используя решетчатую структуру носителя распределения F_a, мы получаем

$$Q\big(F_a, \varepsilon\big) \geqslant Q\big(F_a, 0\big) \gg \frac{1}{\sqrt{s\,p(1-p)}} \tag{41}$$

при $0 \leqslant \varepsilon < s^{-1/2}$. Таким образом из неравенств (2), (3), (40) и (41) следует, что выполняется неравенство (37).

Результаты данной работы сформулированы при фиксированном L. Ясно, что при их применении следует стараться выбрать оптимальное L, удовлетворяющее условиям и минимизирующее правые части неравенств, в которых оцениваются функции концентрации. Напомним, что наименьший общий знаменатель $D^*(a)$ зависит от L.

Величину $\tau_0 = \varepsilon_0\,D^*(a)$, которая является решением уравнения $L^2 = 1/M(\tau)$, можно интерпретировать как величину, зависящую от L и от распределения $\mathcal{L}(X)$. Кроме того, сравнивая оценки (6) и (24) при достаточно больших значениях ε, мы видим, что $\tau_0 \to \infty$ при $L \to \infty$. Следовательно, множитель L/τ_0 намного меньше, чем L при больших значениях L. В частности, в приведенном выше примере мы имеем $\tau_0 = L\sqrt{2\,p(1-p)}$.

Другим примером может служить симметричное устойчивое распределение с параметром α, $0 < \alpha < 2$. В этом случае характеристическая функция $\widehat{F}(t) = \mathbf{E}\,\exp(itX)$ имеет вид $\widehat{F}(t) = \exp(-c\,|t|^\alpha)$. Можно показать, что тогда τ_0 ведет себя как $L^{2/\alpha}$ при $L \to \infty$.

Неравенство (33) может быть переписано в виде

$$Q\big(F_a,\varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon}{\sigma} \ \text{ при } \ \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \tag{42}$$

где $\sigma^2 = \mathbf{D}\,X$. Ясно, что аналогичная ситуация имеет место для любой случайной величины X с конечной дисперсией.

В частности, очевидно, что неравенство (42) выполняется при всех $\varepsilon \geqslant 0$, если $\|a\| = 1$ и X имеет нормальное распределение с $\mathbf{D}X = \sigma^2$. При этом порядок неравенства оптимален при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma$. В этом конкретном случае для любого $\tau > 0$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{M(\tau)}} \asymp 1 + \frac{\tau}{\sigma},$$

с помощью которого из теоремы 2 при $\|a\| = 1$ легко выводится неравенство

$$Q\big(F_a,\varepsilon\big) \ll \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{при } \varepsilon \geqslant \frac{\sigma}{D^*(a)}, \tag{43}$$

что дает правильную зависимость функции концентрации от σ при $\sigma/D^*(a) \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma$. Такого порядка оценки невозможно добиться с помощью неравенства (6). То, что из теоремы 2 нельзя вывести оценку (43) при малых ε, связано с тем, что в теореме 2 распределение $F = \mathcal{L}(X)$ произвольно и функция концентрации $Q\big(F_a,\varepsilon\big)$ может не стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$ (см. (37)).

§2. Доказательства

Мы воспользуемся классическими неравенствами Эссеена ([9], см. также [15, 21]):

$$Q(F,\lambda) \ll \lambda \int\limits_0^{\lambda^{-1}} |\widehat{F}(t)|\,dt, \quad \lambda > 0, \tag{44}$$

где $\widehat{F}(t)$ – соответствующая характеристическая функция. В общем случае функция концентрации $Q(F,\lambda)$ не может быть оценена снизу правой частью неравенства (44). Однако если дополнительно предположить, что распределение F симметрично и его характеристическая

функция неотрицательна при всех $t \in \mathbf{R}$, то

$$Q(F,\lambda) \gg \lambda \int\limits_0^{\lambda^{-1}} \widehat{F}(t)\,dt \tag{45}$$

и, следовательно,

$$Q(F,\lambda) \asymp \lambda \int\limits_0^{\lambda^{-1}} \widehat{F}(t)\,dt \tag{46}$$

(см. [2, лемма 1.5, гл. II]). Использование соотношения (46) позволит нам упростить рассуждения, которые применялись для оценивания функций концентрации при рассмотрении проблемы Литтлвуда–Оффорда в работах [11, 24, 27] (см. также [4, 5]).

Доказательство теоремы 1. Пусть r – фиксированное число, удовлетворяющее условию $1 < r \leqslant \sqrt{2}$. Представим распределение $G = \mathcal{L}(\widetilde{X})$ в виде смеси

$$G = qE + \sum_{j=0}^{\infty} p_j G_j,$$

где $q = \mathbf{P}(\widetilde{X} = 0)$,

$$p_j = \mathbf{P}(\widetilde{X} \in A_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$A_0 = \{x : |x| > 1\}$, $A_j = \{x : r^{-j} < |x| \leqslant r^{-j+1}\}$, E – вероятностная мера, сосредоточенная в нуле, G_j – вероятностные меры, определяемые для $p_j > 0$ по формуле

$$G_j\{X\} = G\{X \cap A_j\}/p_j$$

для любого борелевского множества X. Распределения G_j представляют собой условные распределения $\widetilde{X}$ при условии, что $\widetilde{X} \in A_j$. Если $p_j = 0$, то в качестве G_j можно брать произвольные меры.

Для $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем распределение $H_{z,\gamma}$ с характеристической функцией

$$\widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \exp\Big(-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1 - \cos(2a_k z t)\big)\Big). \tag{47}$$

Ясно, что $H_{z,\gamma}$ является симметричным безгранично делимым распределением. Следовательно, его характеристическая функция положительна при всех $t \in \mathbf{R}$.

Для характеристической функции $\widehat{F}(t) = \mathbf{E}\,\exp(itX)$ выполняется равенство

$$|\widehat{F}(t)|^2 = \mathbf{E}\,\exp(it\widetilde{X}) = \mathbf{E}\,\cos(t\widetilde{X}),$$

где $\widetilde{X} = X_1 - X_2$ – соответствующая симметризованная случайная величина. Следовательно,

$$|\widehat{F}(t)| \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(1-|\widehat{F}(t)|^2\big)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\,\mathbf{E}\,\big(1-\cos(t\widetilde{X})\big)\Big). \quad (48)$$

В силу (44) и (48),

$$\begin{aligned} Q(F_a, 1/D) = Q(F_{2a}, 2/D) &\leqslant 2\,Q(F_{2a}, 1/D) \\ &\ll \frac{1}{D}\int\limits_0^D |\widehat{F_{2a}}(t)|\,dt \\ &\ll \frac{1}{D}\int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\,\big(1-\cos(2a_k t\widetilde{X})\big)\Big)\,dt = I. \quad (49) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\big(1-\cos(2a_k t\widetilde{X})\big) &= \sum_{k=1}^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1-\cos(2a_k tx)\big)\,G\{dx\} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1-\cos(2a_k tx)\big)\,p_j\,G_j\{dx\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1-\cos(2a_k tx)\big)\,p_j\,G_j\{dx\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\beta_j = r^{-2j}p_j$, $\beta = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\beta_j$, $\mu_j = \beta_j/\beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu_j = 1$ и $p_j/\mu_j = r^{2j}\beta$ (при $p_j > 0$).

Оценим величину β:

$$\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \sum_{j=0}^{\infty} r^{-2j} p_j = \mathbf{P}\big\{|\widetilde{X}| > 1\big\} + \sum_{j=1}^{\infty} r^{-2j}\, \mathbf{P}\big\{r^{-j} < |\widetilde{X}| \leqslant r^{-j+1}\big\}$$
$$\geqslant \int\limits_{|x|>1} G\{dx\} + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{r^{-j}<|x|\leqslant r^{-j+1}} \frac{x^2}{r^2} G\{dx\}$$
$$\geqslant \frac{1}{r^2} \int\limits_{|x|>1} G\{dx\} + \frac{1}{r^2} \int\limits_{|x|\leqslant 1} x^2\, G\{dx\} = \frac{1}{r^2} M(1).$$

Так как $1 < r \leqslant \sqrt{2}$, то

$$\beta \geqslant \frac{1}{2} M(1). \tag{50}$$

Из (50) и условия $L^2 \geqslant 1/M(1)$ получаем оценку

$$L^2 \beta \geqslant \frac{1}{2}. \tag{51}$$

Далее будем действовать аналогично доказательствам результатов Эссеена [10] (см. [2, лемма 4, гл. II]). Используя неравенство Гёльдера, легко видеть, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j}, \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{D} \int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{p_j}{2\,\mu_j} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1 - \cos(2a_k tx)\big)\, G_j\{dx\}\Big)\, dt \\ &= \frac{1}{D} \int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{1}{2}\, r^{2j} \beta \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_j} \big(1 - \cos(2a_k tx)\big)\, G_j\{dx\}\Big)\, dt \end{aligned}$$

при $p_j > 0$, и $I_j = 1$ при $p_j = 0$.

Применяя неравенство Йенсена к экспоненте под знаком интеграла (см. [2, с. 49]), получаем

$$\begin{aligned} I_j &\leqslant \frac{1}{D}\int\limits_0^D\int\limits_{A_j} \exp\Big(-\frac{1}{2}\,r^{2j}\beta\sum_{k=1}^n\big(1-\cos(2a_k tx)\big)\Big)\,G_j\{dx\}\,dt \\ &= \frac{1}{D}\int\limits_{A_j}\int\limits_0^D \exp\Big(-\frac{1}{2}\,r^{2j}\beta\sum_{k=1}^n\big(1-\cos(2a_k tx)\big)\Big)\,dt\,G_j\{dx\} \\ &\leqslant \sup_{z\in A_j}\frac{1}{D}\int\limits_0^D \widehat{H}_{z,1}^{r^{2j}\beta}(t)\,dt. \end{aligned} \tag{53}$$

Оценим теперь характеристическую функцию $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ при $|\,t|\leqslant D$. Мы будем действовать так же, как авторы [11, 24, 27]. Очевидно, что

$$1-\cos x\geqslant 2x^2/\pi^2 \quad \text{при } |x|\leqslant\pi.$$

Отсюда следует, что для произвольного x

$$1-\cos x\geqslant 2\,\pi^{-2}\min_{m\in\mathbf{Z}}|\,x-2\pi m|^2.$$

Подставляя это неравенство в (47), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) &\leqslant \exp\Big(-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^n\min_{m_k\in\mathbf{Z}}\big|\,2\pi t a_k-2\pi m_k\big|^2\Big) \\ &= \exp\Big(-4\sum_{k=1}^n\min_{m_k\in\mathbf{Z}}|\,ta_k-m_k|^2\Big) \\ &= \exp\big(-4\,\big(\operatorname{dist}(ta,\mathbf{Z}^n)\big)^2\big). \end{aligned} \tag{54}$$

Используя (8), мы видим, что при $|\,t|\leqslant 1/2\,\|a\|_\infty$ неравенство (54) превращается в

$$\widehat{H}_{\pi,1}(t)\leqslant\exp(-4\,t^2). \tag{55}$$

Воспользуемся теперь соотношениями (9), (54) и (55), чтобы оценить интегралы I_j. Сначала рассмотрим случай $j=1,2,\ldots$. Заметим, что характеристическая функция $\widehat{H}_{z,\gamma}(t)$ удовлетворяет равенствам

$$\widehat{H}_{z,\gamma}(t)=\widehat{H}_{y,\gamma}\big(zt/y\big) \quad \text{и} \quad \widehat{H}_{z,\gamma}(t)=\widehat{H}_{z,1}^{\gamma}(t). \tag{56}$$

Из первого равенства (56) следует, что

$$\text{если} \quad H_{z,\gamma} = \mathcal{L}(\xi), \quad \text{то} \quad H_{y,\gamma} = \mathcal{L}(y\,\xi/z). \tag{57}$$

При $z \in A_j$ справедливы неравенства $r^{-j} < |z| \leqslant r^{-j+1} < \pi$. Следовательно, при $|\,t| \leqslant D$ выполняется $|zt/\pi| < D$. Поэтому, пользуясь свойствами (56) при $y = \pi$ и вышеупомянутыми оценками (9), (54) и (55), получаем при $z \in A_j$ и $z = \pi$

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{z,1}(t) &\leqslant \exp\big(-4\,f_L^2(zt/\pi)\big) \\ &= \begin{cases} \exp\big(-(zt/\pi)^2/9\big) & \text{при } 0 < t \leqslant eL\pi/z, \\ \exp\big(-4\,L^2\,\log(zt/L\pi)\big) & \text{при } t > eL\pi/z. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in A_j} \int\limits_0^D \widehat{H}_{z,1}^{r^{2j}\beta}(t)\,dt \\ &\quad \leqslant \int\limits_0^D \exp\big(-t^2\beta/9\pi^2\big)\,dt + \int\limits_{r^{j-1}L\pi e}^{\infty} \Big(\frac{r^j L\pi}{t}\Big)^{4\,r^{2j}\beta L^2}\,dt \ll \frac{1}{\sqrt{\beta}}\,. \end{aligned} \tag{58}$$

В последнем переходе мы воспользовались неравенством (51).

Рассмотрим теперь случай $j = 0$. Из соотношения (57) следует, что при $z > 0$, $\gamma > 0$

$$Q\,(H_{z,\gamma}, 1/D) = Q\big(H_{1,\gamma}, 1/Dz\big). \tag{59}$$

Таким образом, в силу (2), (46), (56) и (59), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{z\in A_0} \frac{1}{D}\int\limits_0^D \widehat{H}_{z,1}^{\beta}(t)\,dt &= \sup_{z>1} \frac{1}{D}\int\limits_0^D \widehat{H}_{z,\beta}(t)\,dt \asymp \sup_{z>1}\, Q\,(H_{z,\beta}, 1/D) \\ &= \sup_{z>1}\, Q\big(H_{1,\beta}, 1/Dz\big) \leqslant Q\,(H_{1,\beta}, 1/D) \\ &\asymp Q\big(H_{1,\beta}, 1/D\pi\big) = Q\,(H_{\pi,\beta}, 1/D) \\ &\asymp \frac{1}{D}\int\limits_0^D \widehat{H}_{\pi,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{D}\int\limits_0^D \widehat{H}_{\pi,1}^{\beta}(t)\,dt. \end{aligned} \tag{60}$$

Пользуясь оценками (9), (54) и (55) для характеристической функции $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ и принимая во внимание неравенство (51), имеем:

$$\int\limits_0^D \widehat{H}^{\beta}_{\pi,1}(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^D \exp(-t^2\beta/9)\,dt + \int\limits_{Le}^{\infty} \left(\frac{L}{t}\right)^{4\beta L^2} dt \ll \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{61}$$

В силу (53), (58), (60) и (61), имеет место оценка

$$I_j \ll \frac{1}{D\sqrt{\beta}} \tag{62}$$

для всех интегралов I_j при $p_j \neq 0$. Поскольку $\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j = 1$, из соотношений (52) и (62) следует, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j} \ll \frac{1}{D\sqrt{\beta}}. \tag{63}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться оценками (49), (50) и (63). □

Выведем теперь следствие 2 из теоремы 1.

Доказательство следствия 2. Обозначим $b = a/\|a\| \in \mathbf{R}^n$. Тогда для всех $\lambda \geqslant 0$ выполняется равенство $Q(F_a, \lambda) = Q(F_b, \lambda/\|a\|)$. Вектор b удовлетворяет условиям теоремы 1 (которая справедлива для вектора a), если заменить D на $D\|a\|$. Действительно, $\|ub - m\| \geqslant f_L(u)$ при $u \in \left[\dfrac{1}{2\,\|b\|_\infty}, D\|a\|\right]$ и при всех $m \in \mathbf{Z}^n$. Это следует из условия (9) теоремы 1, если обозначить $u = t\|a\|$. Остается применить теорему 1 к вектору b. □

Литература

1. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I.* — Теория вероятн. и ее примен. **26** (1981), 225–245.
2. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 214 с.
3. J. Bretagnolle, *Sur l'inégalité de concentration de Doeblin–Lévy, Rogozin-Kesten.*— In: Parametric and semiparametric models with applications to reliability, survival analysis, and quality of life. Stat. Ind. Technol., Birkhäuser Boston, Boston, MA (2004), pp. 533–551.
4. Ю. С. Елисеева, *Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2012), 121–137.

5. Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **57** (2012), 767–777.
6. Yu. S. Eliseeva, F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the concentration functions in the Littlewood–Offord problem.* — `arXiv:1203.6763` (2012).
7. J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation.* — Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **12** (1943), 277–286.
8. P. Erdös, *On a lemma of Littlewood and Offord.* — Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 898–902.
9. C.-G. Esséen, *On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **5** (1966), 210-216.
10. C.-G. Esséen, *On the concentration function of a sum of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **9** (1968), 290–308.
11. O. Friedland, S. Sodin, *Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 513–518.
12. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the rapid decay of concentration functions of n-fold convolutions.* — J. Theoret. Probab. **11** (1998), 715–731.
13. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *A multiplicative inequality for concentration functions of n-fold convolutions.* — In: High dimensional probability, II (Seattle, WA, 1999). Progr. Probab., v. **47**, Birkhäuser Boston, Boston, MA (2000), pp. 39–47.
14. G. Halász, *Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability.* — Period. Math. Hung. **8** (1977), 197–211.
15. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации.* Наука, М., 1980.
16. H. Kesten, *A sharper form of the Doeblin–Levy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions.* — Math. Scand. **25** (1969), 133–144.
17. J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation.* — Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **12** (1943), 277–286.
18. А. Л. Мирошников, Б. А. Рогозин, *Неравенства для функций концентраций.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 178–183.
19. С. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **41** (1996), 655–665.
20. H. Nguyen, V. Vu, *Optimal inverse Littlewood–Offord theorems.* — Adv. Math. **226** (2011), 5298–5319.
21. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
22. Б. А. Рогозин, *Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **6** (1961), 106–108.
23. M. Rudelson, R. Vershynin, *The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices.* — Adv. Math. **218** (2008), 600–633.
24. M. Rudelson, R. Vershynin, *The smallest singular value of a random rectangular matrix.* — Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1707–1739.
25. T. Tao, V. Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices.* — Ann. Math. **169** (2009), 595–632.
26. T. Tao, V. Vu, *From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 377–396.

27. R. Vershynin, *Invertibility of symmetric random matrices.* — arXiv:1102.0300 (2011). To appear in Random Structures and Algorithms.
28. А. Ю. Зайцев, *Об использовании функции концентрации для оценивания равномерного расстояния.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **119** (1982), 93–107.
29. А. Ю. Зайцев, *О скорости убывания функций концентрации n-кратных сверток вероятностных распределений.* — Вестник С.-Петербургского ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия, вып. 2 (1982), 29–33.

Yu. S. Eliseeva, F. Götze, A. Yu. Zaitsev. Estimates for the concentration functions in the Littlewood–Offord problem.

Let $X, X_1, \dots, X_n$ be independent identically distributed random variables. In this paper we study the behavior of the concentration functions of the weighted sums $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ with respect to the arithmetic structure of coefficients a_k. Such concentration results recently became important in connection with investigations about singular values of random matrices. In this paper we formulate and prove some refinements of a result of Vershynin (2011).

Поступило 29 октября 2013 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: pochta106@yandex.ru

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
D-33501 Bielefeld, Germany
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru