Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

А. А. Воротов

О МАРКОВСКОМ СВОЙСТВЕ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

§1. Введение

Как известно (см. [9]), условное локальное время для одномерного броуновского движения (до экспоненциального момента времени) является марковским процессом. Представляется интересным рассмотреть подобный вопрос для марковских цепей. Впервые это было сделано в работах [2–5], где в качестве естественного аналога локального времени было рассмотрено время пребывания процесса в заданном состоянии до экспоненциального момента остановки. Было, с одной стороны, показано (см. [2]), что для цепей с дискретным временем время пребывания не является марковским даже в наиболее простом случае случайного блуждания по целым числам. С другой стороны, для случайного блуждания по дереву с непрерывным временем ответ оказывается положительным (см. [3–5]). В [6] было высказано предположение, что этот результат можно обобщить на на случай блуждания по произвольному графу Г. Доказательство этого утверждения приведено в работе [8].

Поскольку пространство состояний цепи не имеет каких-либо дополнительных структур, следует пояснить как понимаются "прошлое", "настоящее" и "будущее", и, соответственно, марковское свойство. Для простоты налагается условие *двусторонней проходимости ребер*, заключающееся в том, что положительность интесивности перехода $Q(a,b)$ равносильна положительности $Q(b,a)$. Это условие позволяет рассматривать граф Г как неориентированный и, таким образом, избежать каких-либо неоднозначностей в определении связности.

Марковское свойство времени пребывания τ рассматривается в так называемых необходимых вершинах. Пусть $\mathbb{A}$ – множество вершин

Ключевые слова: время пребывания, марковское свойство, неоднородные цепи Маркова.

графа Γ. Вершина $v \in \mathbb{A}$ называется *необходимой*, если при удалении v и всех инцидентных ей ребер граф распадается на $N > 1$ компонент связности $A_1, \ldots, A_N$. Соответственно, под *марковским свойством времени пребывания* в необходимой вершине v понимается независимость относительно условных мер $\mathbf{P}_{ab}$, фиксирующих начало и конец траектории, значений τ на множествах $A_1, \ldots, A_N$ при фиксированном значении $\tau(v)$.

Марковское свойство удобно записывать в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{ab}\Big[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))ds}\Big|\,\tau(v)=t\Big] = \prod_{i=1}^{N}\mathbf{E}_{ab}\Big[e^{-\int\limits_0^\theta k_i(X(s))ds}\Big|\,\tau(v)=t\Big].$$

для любой неотрицательной функции k на $\mathbb{A}$ с $k(v) = 0$ и любого $t \geqslant 0$; функция k_i является ограничением k на A_i.

Однако все вышеприведенные результаты касаются однородных марковских цепей. Для неоднородных цепей с дискретным временем в [1] были получены схожие формулы для описания конечномерных распределений времени пребывания. Тем не менее, вопрос о марковости времени пребывания τ^s в неоднородном случае (разумеется, для непрерывного времени), ранее изучен не был и будет впервые рассмотрен ниже.

Марковость τ^s можно понимать аналогично однородному случаю, налагая лишь одно дополнительное ограничение на интесивности перехода: если $Q^s(a,b) > 0$ для некоторого s, то $Q^s(a,b) > 0$ для всех s. Это предположение нужно для того, чтобы избежать каких-либо трудностей в определении графа, соответствующего процессу, связности и, соответственно, самого марковского свойства.

Оказывается, что даже для простейшей неоднородной цепи, когда процесс до и после некоторого (неслучайного) момента T ведет себя как однородная цепь, но с разными интесивностями перехода Q_1 и Q_2, τ^s не будет марковским.

Кроме того, в однородном случае можно рассматривать различные, не обязательно экспоненциальные, моменты остановки. Рассуждения в данном случае сходны с рассуждениями для неоднородных цепей, а ответ на вопрос о марковости τ^s также оказывается отрицательным.

Таким образом, марковское свойство времени пребывания – явление, в некотором смысле, редкое и необычное, поскольку имеет место только для моментов остановки определенного вида (экспоненциальных) и, по-видимому, только для однородных цепей. Однако, равносильность марковости времени пребывания и однородности цепи – вопрос пока открытый.

§2. Время пребывания для неоднородных марковских цепей

Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$, – марковская цепь с не более чем счетным пространством состояний $\mathbb{A}$ и переходными функциями $\mathbf{P}^{s,t}(a,b)$, $s \leqslant t$. Будем также предполагать, что процесс $X(t)$ сепарабельный и стохастически непрерывный. Кроме того, предполагаем существование пределов

$$\lim_{s_1 \uparrow s, s_2 \downarrow s} \frac{\mathbf{P}^{s_1,s_2}(a,b) - \delta_{ab}}{s_2 - s_1} = Q^s(a,b)$$

и что $\sum\limits_{b \in \mathbb{A}} Q^s(a,b) = 0$. Здесь δ_{ab} равно 1 при $a = b$ и равно 0 при $a \neq b$. Соответствующий интесивностям перехода оператор обозначим Q^s.

Через $\mathbf{P}^s_a$ обозначим вероятностную меру для процессов, начинающихся в момент времени s из состояния a.

Помимо рассмотрения случая неоднородности будем также рассматривать более широкий класс моментов остановки θ. Пусть теперь $\theta = \theta^s$ – не зависящая от цепи случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}^s_{\cdot}(\theta^s \geqslant t) = e^{-[\beta(t) - \beta(s)]}, \tag{2.1}$$

где $\beta(t)$ – монотонно возрастающая функция, $\lim\limits_{t \to \infty} \beta(t) = \infty$. Будем для простоты полагать, что $\beta \in C^1$.

Обозначим через $\tau^s(v)$ время пребывания процесса в состоянии v на промежутке времени $[s, \theta]$:

$$\tau^s(v) = \int\limits_s^\theta \mathbf{1}_{\{v\}}(X(t))\, dt.$$

Пусть k – неотрицательная функция на $\mathbb{A}$.

Для функции $u_t : (-\infty, t] \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ рассмотрим “обратное уравнение теплопроводности”

$$\frac{\partial u_t(s)}{\partial s} = -(Q^s - k) u_t(s) \tag{2.2}$$

с "граничным" условием $u_t(t,a) = f_t(a)$, $f_t : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ ограничена. У этого уравнения есть решение

$$u_t(s,a) = \mathbf{E}_a^s\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_s^t k(X(r))dr}\Big]. \tag{2.3}$$

Проверим это. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{P}_a^s(X(s+\Delta s)=a) = 1+\Delta s Q^s(a,a)+o(\Delta s),$$
$$\mathbf{P}_a^s(X(s+\Delta s)=b) = \Delta s Q^s(a,b)+o(\Delta s) \quad (b\neq a) \text{ при } \Delta s\to 0,$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_a^s\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_s^t k(X(r))dr}\Big]\\
&= \mathbf{E}_a^s\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_s^t k(X(r))dr}\Big| X(s+\Delta s)=a\Big]\mathbf{P}_a^s(X(s+\Delta s)=a)\\
&+\sum_{b\neq a}\mathbf{E}_a^s\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_s^t k(X(r))dr}\Big| X(s+\Delta s)=b\Big]\mathbf{P}_a^s(X(s+\Delta s)=b)\\
&= \mathbf{E}_a^{s+\Delta s}\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_{s+\Delta s}^t k(X(r))dr}\Big](e^{-\Delta s k(a)}+o(\Delta s))\\
&\qquad\times(1+\Delta s Q^s(a,a)+o(\Delta s))\\
&+\sum_{b\neq a}\mathbf{E}_a^{s+\Delta s}\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_{s+\Delta s}^t k(X(r))dr}\Big](1+o(1))\\
&\qquad\times(\Delta s Q^s(a,b)+o(\Delta s))
\end{aligned} \tag{2.4}$$

при $\Delta s\to 0$.

Вычитая из обеих частей $\mathbf{E}_a^{s+\Delta s}\Big[f_t(X(t))e^{-\int\limits_{s+\Delta s}^t k(X(r))dr}\Big]$, после чего деля на Δs и устремляя Δs к нулю, получаем требуемое.

В отличие от однородного случая, оператор в правой части (2.2) зависит от s, поэтому брать преобразование Лапласа по s не имеет смысла. Будем брать преобразование Лапласа по t, причем несколько обобщенное:

$$\hat{u}(s,a) = \int\limits_s^\infty u_t(s,a)e^{-[\beta(t)-\beta(s)]}\beta'(t)\,dt.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial s}\hat{u}(s,a) = (\widehat{\frac{\partial u_t(s,a)}{\partial s}}) + \beta'(s)\hat{u}(s,a) - \beta'(s)f_s(a),$$

получим уравнение

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} = (\beta'(s) + k - Q^s)\hat{u} - \beta'(s)f_s, \tag{2.5}$$

решением которого является

$$\hat{u}(s,a) = \mathbf{E}_a^s\Big[\int_s^\infty f_t(X(t))e^{-\int_s^t k(X(r))dr}e^{-[\beta(t)-\beta(s)]}\beta'(t)\,dt\Big].$$

Далее по аналогии с однородным случаем естественно определить функцию Грина G_b^s как единственное ограниченное на $\mathbb{R}\times\mathbb{A}$ решение уравнения

$$\frac{\partial G_b^s}{\partial s} = (\beta'(s) + k - Q^s)G_b^s - \beta'(s)\mathbf{1}_{\{b\}}, \tag{2.6}$$

после чего написать формулы

$$\mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))dr}, X(\theta^s) = b\Big] = G^s(a,b), \tag{2.7}$$

$$\mathbf{E}_{ab}^s\Big[e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))dr}\Big] = \frac{G^s(a,b)}{G_0^s(a,b)}. \tag{2.8}$$

Здесь и далее под G с индексом 0 понимается G с $k\equiv 0$, под G с индексом i понимается G с $k\equiv k_i$.

Отметим, что для однородных цепей и при $\beta(s) = \alpha s$ функция Грина определяется как единственное ограниченное решение уравнения

$$(\alpha + k - Q)G_\alpha(\cdot,b) = \mathbf{1}_{\{b\}}(\cdot) \tag{2.9}$$

и что формула для функции Грина в неоднородном случае слегка отличается от соответствующей формулы в однородном:

$$\mathbf{E}_a\Big[e^{-\int_0^{\theta} k(X(s))ds}, X(\theta) = b\Big] = \alpha G_\alpha(a,b). \tag{2.10}$$

Однако имеются две проблемы. Во-первых, единственность ограниченного решения (2.6) абсолютно неясна. Непонятно при каких, пусть даже достаточно ограничительных, условиях на процесс $X(t)$ эту единственность можно ожидать. Во-вторых, даже если единственность имеет место, дальнейшие рассуждения, аналогичные рассуждениям для однородных цепей, наталкиваются на серьезные трудности. Дело в том, что исходя из уравнения (2.6) написать явную формулу для изменения функции Грина при изменении k в одной вершине не получается, а значит и явные формулы для конечномерных распределений $\tau^s(v)$, $v \in \mathbb{A}$, получить не удастся.

Тем не менее, поскольку далее мы будем доказывать отсутствие марковости τ^s, подобные общие рассуждения нам и не понадобятся.

§3. Об отсутствии марковости времени пребывания

Мы рассмотрим два интересных, простых, но при этом не тривиальных, случая, для которых формулы для условных ожиданий можно написать и в обход неоднородных функций Грина:

1. Цепь однородна, но момент остановки θ^s не обязан быть экспоненциальным. Соответствующие интесивности перехода будем обозначать $Q(a,b)$.

2. Момент θ^s экспоненциален с параметром α, а процесс $X(t)$ до и после некоторого (неслучайного) момента T ведет себя как однородная цепь, но с разными интенсивностями перехода Q_1 и Q_2.

Для случая 1 в силу однородности, используя (2.10), имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int\limits_s^{\theta^s} k(X(r))dr}, X(\theta^s)=b\Big] \\
&= \int\limits_s^{\infty} \mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int\limits_s^{t} k(X(r))dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-(\beta(t)-\beta(s))}\beta'(t)\,dt \\
&= \int\limits_0^{\infty} \mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int\limits_s^{t+s} k(X(r))dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t+s))\Big]e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)\,dt \\
&= \int\limits_0^{\infty} \mathbf{E}_a\Big[e^{-\int\limits_0^{t} k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)\,dt \\
&= \int\limits_0^{\infty} \mathcal{L}^{-1}G_\sigma(a,b)(t)e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)\,dt, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

где G_σ – функция Грина для однородной цепи, а индекс σ обозначает параметр, в определении обозначавшийся α. Здесь σ вводится для единообразия обозначений в случаях 1 и 2. Оператор $\mathcal{L}_\sigma^{-1}$ обозначает обратное преобразование Лапласа (по переменной σ).

Для случая 2 математическое ожидание, соответствующее однородной цепи и интесивностям Q_1, обозначим $\mathbf{E}^s_{a,1}$, интесивностям Q_2 – $\mathbf{E}^s_{a,2}$, а соответствующие функции Грина – G^1 и G^2. Тогда при $s<T$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}^s_a\Big[e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}, X(\theta)=b\Big]\\
&= \alpha\int_s^\infty \mathbf{E}^s_a\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\\
&= \alpha\Big[\int_s^T \mathbf{E}^s_{a,1}\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\\
&\quad+\int_T^\infty \mathbf{E}^s_a\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\Big]\\
&= \alpha\Big[\int_s^\infty \mathbf{E}^s_{a,1}\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\\
&\quad-\int_T^\infty \mathbf{E}^s_{a,1}\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\\
&\quad+\int_T^\infty \mathbf{E}^s_a\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\Big]\\
&= \alpha\Big[G^1_\alpha(a,b)-\int_T^\infty \mathbf{E}^s_{a,1}\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt\\
&\quad+\int_T^\infty \mathbf{E}^s_a\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{\alpha(s-t)}\,dt\Big].
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Имеем

$$\int_T^\infty \mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{-\alpha(t-s)}\,dt$$

$$= \int_T^\infty \sum_{c\in\mathbb{A}} \mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big|\,X(T)=c\Big]\mathbf{P}_a^s(X(T)=c)e^{-\alpha(t-s)}\,dt$$

$$= \sum_{c\in\mathbb{A}} \int_T^\infty \mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_T^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big|\,X(T)=c\Big]e^{-\alpha(t-T)}\,dt$$

$$\times\, \mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_s^T k(X(r))\,dr}\Big|\,X(T)=c\Big]\mathbf{P}_a^s(X(T)=c)e^{-\alpha(T-s)}$$

$$= \sum_{c\in\mathbb{A}} G_\alpha^2(c,b)\mathcal{L}_\sigma^{-1}G_{\alpha+\sigma}^1(a,c)(T-s). \tag{3.3}$$

Используя “матричные” обозначения, последнее можно переписать как

$$(\mathcal{L}_\sigma^{-1}[G_{\alpha+\sigma}^1](T-s)\;G_\alpha^2)(a,b).$$

Аналогично

$$\int_T^\infty \mathbf{E}_{a,1}^s\Big[e^{-\int_s^t k(X(r))\,dr}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\Big]e^{\alpha(s-t)}\,dt = (\mathcal{L}_\sigma^{-1}[G_{\alpha+\sigma}^1](T-s)\;G_\alpha^1)(a,b). \tag{3.4}$$

Поэтому в итоге (3.2) переходит в

$$\mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}, X(\theta^s)=b\Big] = (G_\alpha^1 + \mathcal{L}_\sigma^{-1}[G_{\alpha+\sigma}^1](T-s)\;(G_\alpha^2 - G_\alpha^1))(a,b). \tag{3.5}$$

При $s \geqslant T$, очевидно, имеем

$$\mathbf{E}_a^s\Big[e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}, X(\theta^s)=b\Big] = G^2(a,b). \tag{3.6}$$

Итак, проверим, что для случая 1 марковское свойство времени пребывания может иметь место только для экспоненциальных моментов остановки. Процесс $X(t)$ можно рассматривать как случайное блуждание (с непрерывным временем) на графе Γ с множеством вершин

$\mathbb{A}$ и множеством ребер $\{(a,b)|Q(a,b) \neq 0\}$. Как и в [8], предполагаем, что выполнено свойство двусторонней проходимости ребер (если $Q(a,b) > 0$, то $Q(b,a) > 0$ для всех $a, b \in \mathbb{A}$) и что граф Γ рассматриваемого марковского процесса связен. Понятно, что для проверки (и опровержения) марковского свойства τ можно считать, что при удалении рассматриваемой необходимой вершины v (точнее, всех инцидентных ей ребер) процесс распадается на $N = 2$ компонент связности: A_1 и A_2. Поэтому ниже все рассуждения будут проводиться для двух компонент связности, однако и непосредственно обобщить их на случай произвольного N не составит труда.

Также будем предполагать, что $\deg(v) < \infty$. Обозначим

$$M = \{c \in A_2 | Q(v,c) > 0\} = \{c \in A_2 | Q(c,v) > 0\}.$$

Далее нам понадобится следующая важная вспомогательная теорема для однородных цепей.

Теорема 1. *Пусть $a, b \in A_1 \cup \{v\}$. Рассмотрим граф $\widetilde{\Gamma}$, получаемый выкидыванием из исходного графа Γ ребер*

$$\{vc|c \in A_2\} \cup \{cv|c \in A_2\}.$$

Соответствующую $\widetilde{\Gamma}$ и той же функции k функцию Грина обозначим $\widetilde{G}$. Тогда $G(a,b) = \widetilde{G}_*(a,b)$, где $\widetilde{G}_*$ получается из $\widetilde{G}$ уменьшением функции k в точке v на

$$z = \sum_{a_i, a_j \in M} Q(v, a_i)\widetilde{G}(a_i, a_j)Q(a_j, v).$$

В частности, функции Грина $\widetilde{G}$ и $\widetilde{G}_*$ корректно определены.

Доказательство. Пусть пока вершины a, b произвольны. Пусть

$$M = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 1 из [8], для корректного определения функции Грина достаточно выполнения неравенства

$$k(\cdot) \geqslant \sum_b Q(\cdot, b),$$

которое, очевидно, выполнено для $\widetilde{G}$.

Поскольку граф Γ получается из $\widetilde{\Gamma}$ добавлением выкинутых ребер с соответствующими интесивностями и так как $\widetilde{G}(v, a_i) = \widetilde{G}(a_j, v) = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$, в силу теоремы 1 из [8] имеем

$$
G(a,b)=\frac{\begin{vmatrix}
\widetilde{G}(a,b) & \widetilde{G}(a,v) & \widetilde{G}(a,v) & \dots & \widetilde{G}(a,v) & \widetilde{G}(a,a_1) & \widetilde{G}(a,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a,a_n)\\
\widetilde{G}(a_1,b) & -\frac{1}{Q(v,a_1)} & 0 & \dots & 0 & \widetilde{G}(a_1,a_1) & \widetilde{G}(a_1,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a_1,a_n)\\
\widetilde{G}(a_2,b) & 0 & -\frac{1}{Q(v,a_2)} & \dots & 0 & \widetilde{G}(a_2,a_1) & \widetilde{G}(a_2,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a_2,a_n)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\widetilde{G}(a_n,b) & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{Q(v,a_n)} & \widetilde{G}(a_n,a_1) & \widetilde{G}(a_n,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a_n,a_n)\\
\widetilde{G}(v,b) & \widetilde{G}(v,v) & \widetilde{G}(v,v) & \dots & \widetilde{G}(v,v) & -\frac{1}{Q(a_1,v)} & 0 & \dots & 0\\
\widetilde{G}(v,b) & \widetilde{G}(v,v) & \widetilde{G}(v,v) & \dots & \widetilde{G}(v,v) & 0 & -\frac{1}{Q(a_2,v)} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\widetilde{G}(v,b) & \widetilde{G}(v,v) & \widetilde{G}(v,v) & \dots & \widetilde{G}(v,v) & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{Q(a_n,v)}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
-\frac{1}{Q(v,a_1)} & 0 & \dots & 0 & \widetilde{G}(a_1,a_1) & \widetilde{G}(a_1,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a_1,a_n)\\
0 & -\frac{1}{Q(v,a_2)} & \dots & 0 & \widetilde{G}(a_2,a_1) & \widetilde{G}(a_2,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a_2,a_n)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & -\frac{1}{Q(v,a_n)} & \widetilde{G}(a_n,a_1) & \widetilde{G}(a_n,a_2) & \dots & \widetilde{G}(a_n,a_n)\\
\widetilde{G}(v,v) & \widetilde{G}(v,v) & \dots & \widetilde{G}(v,v) & -\frac{1}{Q(a_1,v)} & 0 & \dots & 0\\
\widetilde{G}(v,v) & \widetilde{G}(v,v) & \dots & \widetilde{G}(v,v) & 0 & -\frac{1}{Q(a_2,v)} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\widetilde{G}(v,v) & \widetilde{G}(v,v) & \dots & \widetilde{G}(v,v) & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{Q(a_n,v)}
\end{vmatrix}}. \tag{3.7}
$$

Сначала вычислим знаменатель. Для этого последовательно вычтем $(n+1)$-ю строку из $(n+2)$-й, $\dots$, из $(2n)$-й, а затем занулим $\widetilde{G}(v,v)$ в $(n+1)$-й строке с помощью вычитания из нее линейной комбинации строк $1,\dots,n$. Таким образом, несложно получить, что знаменатель (3.7) равен

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Q(v,a_1)\dots Q(v,a_n)Q(a_1,v)\dots Q(a_n,v)}\\
&\times\Big[1-\widetilde{G}(v,v)Q(a_1,v)[Q(v,a_1)\widetilde{G}(a_1,a_1)+\dots+Q(v,a_n)\widetilde{G}(a_n,a_1)\Big]\\
&-\dots-\widetilde{G}(v,v)Q(a_n,v)\Big[Q(v,a_1)\widetilde{G}(a_1,a_n)+\dots+Q(v,a_n)\widetilde{G}(a_n,a_n)]\Big].
\end{aligned}
$$

Если от (3.7) отнять $\widetilde{G}(a,b)-\dfrac{\widetilde{G}(a,v)\widetilde{G}(v,b)}{\widetilde{G}(v,v)}$, то левый верхний элемент матрицы числителя поменяется на $\dfrac{\widetilde{G}(a,v)\widetilde{G}(v,b)}{\widetilde{G}(v,v)}$. В этом случае вычитая $(n+2)$-ю строку из $(n+3)$-й, ..., из $(2n+1)$-й, а затем вычитая 1-ю строку с коэффициентом $\dfrac{\widetilde{G}(v,v)}{\widetilde{G}(a,v)}$ из $(n+2)$-й, получаем, что определитель также легко вычисляется.

В результате приходим к

$$G(a,b) = \frac{\left[\dfrac{\widetilde{G}(v,b)}{\widetilde{G}(v,v)} + \sum\limits_{a_i\in M} Q(v,a_i)\widetilde{G}(a_i,b)\right]\left[\widetilde{G}(a,v) + \widetilde{G}(v,v)\sum\limits_{a_j\in M}\widetilde{G}(a,a_j)Q(a_j,v)\right]}{1-\widetilde{G}(v,v)\sum\limits_{a_i,a_j\in M} Q(v,a_i)\widetilde{G}(a_i,a_j)Q(a_j,v)} + \widetilde{G}(a,b) - \frac{\widetilde{G}(a,v)\widetilde{G}(v,b)}{\widetilde{G}(v,v)}. \tag{3.8}$$

Если же $a,b\in A_1\cup\{v\}$, то, поскольку $\widetilde{G}(a_i,b)=\widetilde{G}(a,a_j)=0$ при $1\leqslant i,j\leqslant n$, отсюда немедленно следует утверждение теоремы.

Кроме того, из доказательства теоремы 1 из [8] следует, что знаменатель в формуле (3.8) всегда положителен, а значит $\widetilde{G}_*$ определена корректно. □

Замечание 1. Если $\sup\limits_{a\in\mathbb{A}}|Q(a,a)|<\infty$, то есть оператор Q непрерывен, от условия $\deg(v)<\infty$ можно отказаться. Формулу (3.8) в данном случае можно проверить непосредственно. Дальнейшие рассуждения также будут справедливы, если конечность $\deg(v)$ заменить непрерывностью Q.

Замечание 2. В случае $a=b=v$ можно выкинуть также множество ребер $\{vd|d\in A_1\}\cup\{dv|d\in A_1\}$. Тогда $G(v,v)$ будет совпадать с $\widetilde{G}(v,v)$ с $k(v)$, уменьшенным на z_1+z_2, где z_2 – это z из теоремы, а z_1 определяется аналогично по компоненте A_1. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{G(v,v)} = \frac{1}{\widetilde{G}(v,v)} - z_1 - z_2. \tag{3.9}$$

Теперь мы можем получить интересующий нас результат для случая 1.

Теорема 2. *Для однородной цепи Маркова с моментом остановки θ^s время пребывания τ^s будет марковским в необходимой вершине v относительно меры $\mathbf{P}^s_{ab}$ тогда и только тогда, когда момент θ^s экспоненциален, т.е. когда функция $\beta(s)$ линейна.*

Доказательство. Достаточность уже была проверена в работе [8]. Остается проверить необходимость.

Рассмотрим сначала случай, когда $a = b = v$. Увеличивая $k(v)$ на γ, по формуле (3.1) получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^s_v\Big[e^{-\gamma\tau^s(v)}e^{-\int\limits_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}, X(\theta^s) = v\Big] \\
&= \int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\left[\frac{G_\sigma(v,v)}{1+\gamma G_\sigma(v,v)}\right](t)e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Отсюда, беря обратное преобразование Лапласа по γ, находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^s_{vv}\Big[e^{-\int\limits_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}\Big|\,\tau^s(v) = r\Big] \\
&= \frac{\int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\Big[e^{-r\frac{1}{G_\sigma(v,v)}}\Big](t)e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)\,dt}{\int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\Big[e^{-r\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}}\Big](t)e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)\,dt}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Обозначим для краткости $q(t) = e^{-(\beta(t+s)-\beta(s))}\beta'(t+s)$. Тогда, в соответствии с марковостью τ^s, имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\Big[e^{-r\frac{1}{G_\sigma(v,v)}}\Big](t)q(t)\,dt \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\Big[e^{-r\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}}\Big](t)q(t)\,dt \\
&= \int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\Big[e^{-r\frac{1}{G_{\sigma,1}(v,v)}}\Big](t)q(t)\,dt \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}^{-1}_\sigma\Big[e^{-r\frac{1}{G_{\sigma,2}(v,v)}}\Big](t)q(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Возьмем от обеих частей $\left.\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right|_{r=0}$. Получим

$$
\begin{aligned}
&q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\left(\frac{1}{G_\sigma(v,v)}\right)^2\right](t)q(t)\,dt\\
&+q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\left(\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right)^2\right](t)q(t)\,dt\\
&+2\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_\sigma(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\times\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\\
&=q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\left(\frac{1}{G_{\sigma,1}(v,v)}\right)^2\right](t)q(t)\,dt\\
&+q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\left(\frac{1}{G_{\sigma,2}(v,v)}\right)^2\right](t)q(t)\,dt\\
&+2\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,1}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\times\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,2}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Поскольку $\dfrac{1}{G_\sigma(v,v)}+\dfrac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}=\dfrac{1}{G_{\sigma,1}(v,v)}+\dfrac{1}{G_{\sigma,2}(v,v)}$ (см. [8]), приходим к

$$
\begin{aligned}
&q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_\sigma(v,v)G_{\sigma,0}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\\
&-\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_\sigma(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\times\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\\
&=q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,1}(v,v)G_{\sigma,2}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\\
&-\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,1}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt\times\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{1}{G_{\sigma,2}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Согласно замечанию 2, вводя естественные обозначения z_{10} для $k_1 \equiv 0$, z_{20} для $k_2 \equiv 0$, имеем

$$\frac{1}{G(v,v)} = \frac{1}{G_0(v,v)} - (z_1 - z_{10}) - (z_2 - z_{20});$$
$$\frac{1}{G_1(v,v)} = \frac{1}{G_0(v,v)} - (z_1 - z_{10});$$
$$\frac{1}{G_2(v,v)} = \frac{1}{G_0(v,v)} - (z_2 - z_{20}).$$

Обозначая для краткости $\zeta_i = z_i - z_{i0}$ $(i = 1, 2)$, из (3.14) получаем

$$\begin{aligned} &q(0)\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\zeta_2(\sigma)\Big](t)q(t)\,dt - \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\Big](t)q(t)\,dt \\ &\times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_2(\sigma)\Big](t)q(t)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\zeta_2(\sigma)\Big](t)q(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\Big](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_2(\sigma)\Big](t-x)q(t)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\Big](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_2(\sigma)\Big](t-x)q(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\Big](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_2(\sigma)\Big](t)q(t+x)\,dt\,dx, \end{aligned} \tag{3.16}$$

в результате получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty q(0)q(t+x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\zeta_1(\sigma)\Big](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}[\zeta_2(\sigma)](t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty q(t)q(x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}[\zeta_1(\sigma)](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}[\zeta_2(\sigma)](t)\,dt\,dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Рассмотрим постоянные k_1 и k_2. В этом случае $z_i(\sigma) = z_{i0}(\sigma + k_i)$ $(i = 1, 2)$. Тогда из (3.17) получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty q(0)q(t+x)(e^{-k_1x}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](x) - \mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](x)) \\
&\times (\theta^{-k_2t}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](t) - \mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](t))\,dt\,dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty q(t)q(x)(e^{-k_1x}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](x) - \mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](x)) \\
&\times (e^{-k_2t}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](t) - \mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](t))\,dt\,dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Отсюда, рассматривая пределы при $k_1 \to \infty$ и при $k_2 \to \infty$, легко получить, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty q(0)q(t+x)e^{-k_1x}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](x)e^{-k_2t}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](t)\,dt\,dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty q(t)q(x)e^{-k_1x}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](x)e^{-k_2t}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](t)\,dt\,dx.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Делая замену переменных $\widetilde{x} = e^{-x}$, $\widetilde{t} = e^{-t}$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 q(0)q(-\ln\widetilde{x} - \ln\widetilde{t})\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](-\ln\widetilde{x})\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](-\ln\widetilde{t}) \\
&\times \widetilde{x}^{k_1-1}\widetilde{t}^{k_2-1}\,dt\,dx = \int_0^1 \int_0^1 q(-\ln\widetilde{x})q(-\ln\widetilde{t})\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{10}(\sigma)](-\ln\widetilde{x}) \\
&\times \mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{20}(\sigma)](-\ln\widetilde{t})\widetilde{x}^{k_1-1}\widetilde{t}^{k_2-1}\,dt\,dx.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Значит, равенство (3.20) верно, если $\widetilde{x}^{k_1-1}\widetilde{t}^{k_2-1}$ заменить произвольным многочленом от $\widetilde{x}, \widetilde{t}$. Поскольку, как следует из вероятностного представления, $\mathcal{L}_\sigma^{-1}[z_{i0}(\sigma)] > 0$, в итоге получаем

$$q(0)q(t+x) = q(t)q(x) \text{ для всех } t, x \geqslant 0. \tag{3.21}$$

Решение уравнения (3.21), как известно, имеет вид $q(t) = Ce^{\alpha t}$ для некоторых постоянных C, α. Отсюда вытекает $\beta(t) = \alpha t + c$, и мы получили требуемое.

Пусть теперь a и b лежат в одной компоненте связности (для определенности в A_1), либо одно из них совпадает с v.

Рассуждая аналогично, но рассматривая $\left.\dfrac{\partial}{\partial r}\right|_{r=0}$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_\sigma(a,v)G_\sigma(v,b)}{G_\sigma(v,v)^3}\right](t)q(t)\,dt \times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(a,v)G_{\sigma,0}(v,b)}{G_{\sigma,0}(v,v)^2}\right](t)q(t)\,dt\\
&+\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(a,v)G_{\sigma,0}(v,b)}{G_{\sigma,0}(v,v)^3}\right](t)q(t)\,dt \times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_\sigma(a,v)G_\sigma(v,b)}{G_\sigma(v,v)^2}\right](t)q(t)\,dt\\
&=\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,1}(a,v)G_{\sigma,1}(v,b)}{G_{\sigma,1}(v,v)^3}\right](t)q(t)dt\times\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,2}(a,v)G_{\sigma,2}(v,b)}{G_{\sigma,2}(v,v)^2}\right](t)q(t)dt\\
&+\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,2}(a,v)G_{\sigma,2}(v,b)}{G_{\sigma,2}(v,v)^3}\right](t)q(t)dt\times\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,1}(a,v)G_{\sigma,1}(v,b)}{G_{\sigma,1}(v,v)^2}\right](t)q(t)dt.
\end{aligned}\tag{3.22}$$

Легко видеть, что $\dfrac{G_\sigma(a,v)G_\sigma(v,b)}{G_\sigma(v,v)^2} = \dfrac{\widetilde{G}_\sigma(a,v)\widetilde{G}_\sigma(v,b)}{\widetilde{G}_\sigma(v,v)^2}$ не зависит от k_2. Обозначив это выражение через $g(k_1)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g(k_1)\left(\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}-\zeta_1(\sigma)-\zeta_2(\sigma)\right)\right](t)q(t)\,dt \times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(0)\Big](t)q(t)\,dt\\
&+\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g(0)\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](t)q(t)\,dt \times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(k_1)\Big](t)q(t)\,dt\\
&=\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g(k_1)\left(\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}-\zeta_1(\sigma)\right)\right](t)q(t)\,dt \times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(0)\Big](t)q(t)\,dt\\
&+\int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g(0)\left(\frac{1}{G_{\sigma,0}(v,v)}-\zeta_2(\sigma)\right)\right](t)q(t)\,dt \times \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(k_1)\Big](t)q(t)\,dt.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(k_1)\zeta_2(\sigma)\Big](t)q(t)\,dt \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(0)\Big](t)q(t)\,dt\\ &= \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(0)\zeta_2(\sigma)\Big](t)q(t)\,dt \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[g(k_1)\Big](t)q(t)\,dt.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Значит,

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(k_1)](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}[\zeta_2(\sigma)](t)q(t+x)\,dt\,dx \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](t)q(t)\,dt\\ &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}[\zeta_2(\sigma)](t)q(t+x)\,dt\,dx \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(k_1)](t)q(t)\,dt.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Так же, как и выше, получаем, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(k_1)](x)q(t+x)\,dx \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](x)q(x)\,dx\\ &= \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](x)q(t+x)\,dx \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(k_1)](x)q(x)\,dx\end{aligned} \tag{3.26}$$

для всех $t > 0$.

Заметим, что g не зависит от $k(v)$, поэтому его также можно считать произвольным, а к $g(k_1)$ применять описанный выше подход. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}&q(t+x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](x) \times \int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](y)q(y)\,dy\\ &= q(x)L^{-1}[g(0)](x)\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](y)q(t+y)\,dy\end{aligned} \tag{3.27}$$

для $t > 0$.

Далее нам потребуется одна техническая лемма.

Лемма 1. *Функция* $G_\sigma(a,b)$ *аналитична по* σ *при* $\mathrm{Re}(\sigma) > \varepsilon > 0$. *Кроме того,*

$$\begin{aligned} &G_\sigma(a,a) \sim \frac{1}{\sigma}, G_\sigma(a,b) \sim o\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad (b \neq a); \\ &G_{\sigma,0}(a,b) \sim \frac{C}{\sigma^{\mathrm{dist}(a,b)+1}} \ \text{при } \sigma \to \infty, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где $C > 0$ *– некоторая константа,* $\mathrm{dist}(a,b)$ *– длина кратчайшего пути, соединяющего* a *и* b *в графе* Γ.

Доказательство леммы. Заметим, что формулу для функции Грина из работы [3] можно переписать в виде

$$G_\sigma(a,b) = \mathcal{L}\Big[\mathbf{E}_a\big(e^{-\int\limits_0^t k(X(s))ds}, X(t) = b\big)\Big](\sigma), \tag{3.29}$$

откуда в частности следует, что функция $G_\sigma(a,b)$ аналитична по σ при $\mathrm{Re}(\sigma) > \varepsilon > 0$.

Математическое ожидание в последней формуле для краткости обозначим $u_b(t,a)$.

Из (3.29) и теоремы о начальном значении оригинала преобразования Лапласа имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{\sigma\to\infty} \sigma G_\sigma(a,a) = u_a(0,a) = 1 \ \text{ и} \\ &\lim_{\sigma\to\infty} \sigma G_\sigma(a,b) = u_b(0,a) = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Если все производные $u_b(t,a)$ до $(n-1)$-ой включительно в нуле равны 0, то

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sigma^{n+1} G_\sigma(a,b) = u_b^{(n)}(0,a) = (Q^n \mathbf{1}_{\{b\}})(a) = Q^n(b,a), \tag{3.31}$$

откуда и вытекает последнее утверждение леммы. □

Продолжим доказательство теоремы. Докажем, что найдется $x_0 > 0$, для которого $\{x | \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](x) \neq 0\}$ всюду плотно в $[0, x_0]$. Действительно, если бы это было не так, то для всех n имело бы место равенство $(\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)])^{(n)}(0) = 0$, что противоречит лемме.

Кроме того, несложно получить, что

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g(0)](t)q(t)\,dt &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathbf{P}_a^s\big[\tau^s(v)\in(0,\Delta], X(\theta^s)=b\big] \\ &\geqslant \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(1-e^{Q(v,v)\Delta}) = -Q(v,v)>0.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Поэтому из (3.27) получаем, что при $0 < x < x_0$ $q(x+t)$ имеет вид $q(x+t) = B(x)C(t)$. Рассматривая нулевые x и t, приходим к уравнению $q(x+t)q(0) = q(x)q(t)$ при $x < x_0$, откуда легко следует утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь последний случай, когда a и b лежат в разных компонентах связности. Для определенности пусть $a\in A_1$, $b\in A_2$. Беря на этот раз просто $r\to 0$, получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_\sigma(a,v)G_\sigma(v,b)}{G_\sigma(v,v)^2}\right](t)q(t)\,dt \\ &\times\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(a,v)G_{\sigma,0}(v,b)}{G_{\sigma,0}(v,v)^2}\right](t)q(t)\,dt \\ &=\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,1}(a,v)G_{\sigma,1}(v,b)}{G_{\sigma,1}(v,v)^2}\right](t)q(t)\,dt \\ &\times\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,2}(a,v)G_{\sigma,2}(v,b)}{G_{\sigma,2}(v,v)^2}\right](t)q(t)\,dt.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_\sigma(a,v)}{G_\sigma(v,v)}\right](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_\sigma(v,b)}{G_\sigma(v,v)}\right](t)q(x+t)\,dt\,dx \\ &\times\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(a,v)}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(v,b)}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](t)q(x+t)\,dt\,dx \\ &=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,1}(a,v)}{G_{\sigma,1}(v,v)}\right](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(v,b)}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](t)q(x+t)\,dt\,dx\end{aligned}$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,0}(a,v)}{G_{\sigma,0}(v,v)}\right](x)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[\frac{G_{\sigma,2}(v,b)}{G_{\sigma,2}(v,v)}\right](t)q(x+t)\,dt\,dx. \qquad (3.34)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше. □

Далее аналогичным способом покажем, что для случая 2 марковости времени пребывания также нет. Мы остаемся в тех же предположениях, что и для случая 1, с добавлением одного условия: помимо двусторонней проходимости ребер для Q_1 и Q_2, будем предполагать, что $Q_1(a,b) > 0$ равносильно $Q_2(a,b) > 0$ для всех $a, b \in \mathbb{A}$. Это позволяет избежать каких-либо проблем в определении связности и, соответственно, марковского свойства.

Утверждение 1. *Если при некотором $s < T$ время пребывания τ^s является марковским в необходимой вершине v относительно $\mathbf{P}^s_{vv}$, то $Q_1(v,a) = Q_2(v,a)$, $Q_1(b,v) = Q_2(b,v)$ для всех $a, b \in \mathbb{A}$.*

Доказательство. Увеличивая $k(v)$ на γ, из (3.5) получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^s_v\Big[e^{-\gamma\tau^s(v)}e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}, X(\theta^s) = v\Big] = \frac{G^1_\alpha(v,v)}{1+\gamma G^1_\alpha(v,v)}\\
&+ \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\sum_c \frac{G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)}{1+\gamma G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)}\,\frac{G^2_\alpha(c,v)}{1+\gamma G^2_\alpha(v,v)} \qquad (3.35)\\
&- \frac{G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)}{1+\gamma G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)}\,\frac{G^1_\alpha(c,v)}{1+\gamma G^1_\alpha(v,v)})\Big](T-s).
\end{aligned}$$

Беря обратное преобразование Лапласа по γ, находим

$$\mathbf{E}^s_{vv}\Big[e^{-\int_s^{\theta^s} k(X(r))\,dr}\,\Big|\,\tau^s(v) = r\Big] = \frac{R(r)}{R_0(r)}, \qquad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned}
&R(r) = e^{-r\frac{1}{G^1_\alpha(v,v)}}\\
&+ \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\sum_c \frac{G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)G^2_\alpha(c,v)}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v) - G^2_\alpha(v,v)}\Big(e^{-r\frac{1}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)}} - e^{-r\frac{1}{G^2_\alpha(v,v)}}\Big) \qquad (3.37)\\
&- \frac{G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)G^1_\alpha(c,v)}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v) - G^1_\alpha(v,v)}\Big(e^{-r\frac{1}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)}} - e^{-r\frac{1}{G^1_\alpha(v,v)}}\Big)\Big](T-s),
\end{aligned}$$

а R_0 соответствует $k \equiv 0$.

Марковость τ^s означает, что

$$R(r)R_0(r) = R_1(r)R_2(r). \tag{3.38}$$

К обозначениям теоремы 1 и замечания 2 добавим еще функцию $\overline{G}$, получаемую аналогично $\widetilde{G}$ при выкидывании ребер $\{vc|c \in A_1\} \cup \{cv|c \in A_1\}$. В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial R}{\partial r}\right|_{r=0} &= -\frac{1}{G^1_\alpha(v,v)} \\
&+ \mathcal{L}^{-1}_\sigma \left[\sum_c \left(\frac{G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)G^2_\alpha(c,v)}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)G^2_\alpha(v,v)} - \frac{G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)G^1_\alpha(c,v)}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)G^1_\alpha(v,v)} \right) \right](T-s) \\
&= -\frac{1}{G^1_\alpha(v,v)} \\
&+ \mathcal{L}^{-1}_\sigma \left[\sum_{c\in A_1} \left(\frac{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\widetilde{G}^2_\alpha(c,v)_\alpha}{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\widetilde{G}^2_\alpha(v,v)} - \frac{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\widetilde{G}^1_\alpha(c,v)}{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\widetilde{G}^1_\alpha(v,v)} \right) \right](T-s) \\
&+ \mathcal{L}^{-1}_\sigma \left[\sum_{c\in A_2} \left(\frac{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\overline{G}^2_\alpha(c,v)}{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\overline{G}^2_\alpha(v,v)} - \frac{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\overline{G}^1_\alpha(c,v)}{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\overline{G}^1_\alpha(v,v)} \right) \right](T-s).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Легко видеть, что второе слагаемое не зависит от k_2, а третье от k_1. Поэтому (3.39) можно представить в виде

$$\left.\frac{\partial R}{\partial r}\right|_{r=0} = -\frac{1}{G^1_\alpha(v,v)} + \mathcal{L}^{-1}_\sigma \left[g^2(k_1) - g^1(k_1) + h^2(k_2) - h^1(k_2) \right](T-s). \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right|_{r=0} \\
&= \frac{1}{G^1_\alpha(v,v)^2} - \mathcal{L}^{-1}_\sigma \Bigg[\sum_c \Bigg(\frac{(G^1_{\alpha+\sigma}(v,v) + G^2_\alpha(v,v))G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)G^2_\alpha(c,v)}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)^2 G^2_\alpha(v,v)^2} \\
&- \frac{(G^1_{\alpha+\sigma}(v,v) + G^1_\alpha(v,v))G^1_{\alpha+\sigma}(v,c)G^1_\alpha(c,v)}{G^1_{\alpha+\sigma}(v,v)^2 G^1_\alpha(v,v)^2} \Bigg) \Bigg](T-s) \\
&= \frac{1}{G^1_\alpha(v,v)^2} - \mathcal{L}^{-1}_\sigma \Bigg[\left(\frac{1}{G^2_\alpha(v,v)} - \frac{1}{G^1_\alpha(v,v)} \right) \\
&+ \sum_{c\in A_1} \Bigg(\frac{(\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v) + \widetilde{G}^2_\alpha(v,v))\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\widetilde{G}^2_\alpha(c,v)}{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)^2 \widetilde{G}^2_\alpha(v,v)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{(\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v) + \widetilde{G}^1_{\alpha}(v,v))\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\widetilde{G}^1_{\alpha}(c,v)}{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)^2\widetilde{G}^1_{\alpha}(v,v)^2}\\
&- (z_2^{1,\sigma} + z_2^2)\frac{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\widetilde{G}^2_{\alpha}(c,v)}{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\widetilde{G}^2_{\alpha}(v,v)}\\
&+ (z_2^{1,\sigma} + z_2^1)\frac{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\widetilde{G}^1_{\alpha}(c,v)}{\widetilde{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\widetilde{G}^1_{\alpha}(v,v)}\Bigg)\\
&+ \sum_{c\in A_2}\Bigg(\frac{(\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v) + \overline{G}^2_{\alpha}(v,v))\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\overline{G}^2_{\alpha}(c,v)}{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)^2\overline{G}^2_{\alpha}(v,v)^2}\\
&- \frac{(\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v) + \overline{G}^1_{\alpha}(v,v))\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\overline{G}^1_{\alpha}(c,v)}{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)^2\overline{G}^1_{\alpha}(v,v)^2}\\
&- (z_1^{1,\sigma} + z_1^2)\frac{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\overline{G}^2_{\alpha}(c,v)}{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\overline{G}^2_{\alpha}(v,v)}\\
&+ (z_1^{1,\sigma} + z_1^1)\frac{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,c)\overline{G}^1_{\alpha}(c,v)}{\overline{G}^1_{\alpha+\sigma}(v,v)\overline{G}^1_{\alpha}(v,v)}\Bigg)\Bigg](T-s). \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Поскольку $T-s>0$, (3.41) представляется в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\bigg|_{r=0} = \frac{1}{G^1_\alpha(v,v)^2} + \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[\widetilde{f}(k_1) + \overline{f}(k_2) + (z_2^{1,\sigma} + z_2^2)g^2(k_1)\\
&- (z_2^{1,\sigma} + z_2^1)g^1(k_1) + (z_1^{1,\sigma} + z_1^2)h^2(k_2) - (z_1^{1,\sigma} + z_1^1)h^1(k_2)\Big](T-s). \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

После небольших сокращений (3.38) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[(z_2^{1,\sigma} + z_2^2)g^2(k_1) - (z_2^{1,\sigma} + z_2^1)g^1(k_1) + (z_1^{1,\sigma} + z_1^2)h^2(k_2)\\
&-(z_1^{1,\sigma} + z_1^1)h^1(k_2)\Big](T-s) + \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[(z_{20}^{1,\sigma} + z_{20}^2)g^2(0) - (z_{20}^{1,\sigma} + z_{20}^1)g^1(0)\\
&+(z_{10}^{1,\sigma} + z_{10}^2)h^2(0) - (z_{10}^{1,\sigma} + z_{10}^1)h^1(0)\Big](T-s)\\
&- \frac{2}{G^1_0(v,v)}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(k_1) - g^1(k_1) + h^2(k_2) - h^1(k_2)](T-s)\\
&- \frac{2}{G^1(v,v)}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(0) - g^1(0) + h^2(0) - h^1(0)](T-s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(k_1) - g^1(k_1) + h^2(k_2) - h^1(k_2)](T-s)\\
&\times \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(0) - g^1(0) + h^2(0) - h^1(0)](T-s)\\
&= \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[(z_{20}^{1,\sigma} + z_{20}^2)g^2(k_1) - (z_{20}^{1,\sigma} + z_{20}^1)g^1(k_1) + (z_1^{1,\sigma} + z_1^2)h^2(0)\\
&-(z_1^{1,\sigma} + z_1^1)h^1(0)\Big](T-s) + \mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[(z_2^{1,\sigma} + z_2^2)g^2(0) - (z_2^{1,\sigma} + z_2^1)g^1(0)\\
&+(z_{10}^{1,\sigma} + z_{10}^2)h^2(k_2) - (z_{10}^{1,\sigma} + z_{10}^1)h^1(k_2)\Big](T-s)\\
&- \frac{2}{G_2^1(v,v)}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(k_1) - g^1(k_1) + h^2(0) - h^1(0)](T-s)\\
&- \frac{2}{G_1^1(v,v)}\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(0) - g^1(0) + h^2(k_2) - h^1(k_2)](T-s)\\
&+ 2\mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(k_1) - g^1(k_1) + h^2(0) - h^1(0)](T-s)\\
&\times \mathcal{L}_\sigma^{-1}[g^2(0) - g^1(0) + h^2(k_2) - h^1(k_2)](T-s).
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Используя замечание 2 и перенося все в одну часть, получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[(z_2^{1,\sigma} + z_2^2 - z_{20}^{1,\sigma} - z_{20}^2)(g^2(k_1) - g^2(0)) - (z_2^{1,\sigma} + z_2^1 - z_{20}^{1,\sigma} - z_{20}^1)\\
&\times (g^1(k_1) - g^1(0)) + (z_1^{1,\sigma} + z_1^2 - z_{10}^{1,\sigma} - z_{10}^2)(h^2(k_2) - h^2(0))\\
&-(z_1^{1,\sigma} + z_1^1 - z_{10}^{1,\sigma} - z_{10}^1)(h^1(k_2) - h^1(0))\Big](T-s)\\
&- 2(z_2^1 - z_{20}^1)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g^2(k_1) - g^1(k_1) - g^2(0) + g^1(0)\right](T-s)\\
&- 2(z_1^1 - z_{10}^1)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[h^2(k_2) - h^1(k_2) - h^2(0) + h^1(0)\right](T-s)\\
&+ 2\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g^2(k_1) - g^1(k_1) - g^2(0) + g^1(0)\right](T-s)\\
&\times \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[h^2(k_2) - h^1(k_2) - h^2(0) + h^1(0)\right](T-s) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Поскольку каждое слагаемое имеет вид $(u(k_1) - u(0))(v(k_2) - v(0))$ и, как легко видеть из формулы (2.10), $\lim\limits_{k_1\to\infty} u(k_1) = 0$, $\lim\limits_{k_2\to\infty} v(k_2) = 0$, рассматривая пределы при $k_1 \to \infty$ и $k_2 \to \infty$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\sigma^{-1}\Big[(z_2^{1,\sigma} + z_2^2)g^2(k_1) - (z_2^{1,\sigma} + z_2^1)g^1(k_1) + (z_1^{1,\sigma} + z_1^2)h^2(k_2)\\
&-(z_1^{1,\sigma} + z_1^1)h^1(k_2)\Big](T-s) - 2z_2^1\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g^2(k_1) - g^1(k_1)\right](T-s)\\
&- 2z_1^1\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[h^2(k_2) - h^1(k_2)\right](T-s) + 2\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g^2(k_1) - g^1(k_1)\right](T-s)\\
&\times \mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[h^2(k_2) - h^1(k_2)\right](T-s) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Рассмотрим функцию k, во всех вершинах, кроме $a_1, \ldots, a_n$, равную некоторой константе K. Тогда при $K \to \infty$ соответствующая функция Грина $G^{(K)}(a, b)$ будет стремиться к функции Грина для того же графа, у которого оставлены только вершины $a_1, \ldots, a_n$ (а значения на ребрах не меняются).*

Доказательство леммы. Обозначим $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha G^{(K)}(a, b) &= \mathbf{E}_a\Big[e^{-\int_0^\theta k(X(s))(\mathbf{1}_A(X(s))+\mathbf{1}_{\mathbb{A}\setminus A}(X(s)))ds}, X(\theta) = b\Big] \\ &= \mathbf{E}_a\Big[e^{-\int_0^\theta k(X(s))\mathbf{1}_A(X(s))ds - K\tau(\mathbb{A}\setminus A)}, X(\theta) = b\Big].\end{aligned}$$

Поэтому $\alpha G_K(a, b)$ стремится при $K \to \infty$ к

$$\mathbf{E}_a\Big[e^{-\int_0^\theta k(X(s))\mathbf{1}_A(X(s))ds}, \tau(\mathbb{A}\setminus A) = 0, X(\theta) = b\Big],$$

и получаем требуемое. □

Вернемся к доказательству теоремы. Обозначим для краткости

$$k_a = k(a), \quad k_b = k(b); \quad a \in A_1, \quad b \in A_2,$$

a и b соединены ребрами с v. Значения k в остальных вершинах, кроме v, устремим к бесконечности. Согласно лемме, например $\widetilde{G}^1$ определяется из

$$\begin{pmatrix} \alpha - Q^1(v, v) & -Q^1(v, a) \\ -Q^1(a, v) & \alpha + k_a - Q^1(a, a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{G}^1(v, v) & \widetilde{G}^1(v, a) \\ \widetilde{G}^1(a, v) & \widetilde{G}^1(a, a) \end{pmatrix} = E, \quad (3.46)$$

где E – единичная матрица. Отсюда значения $\widetilde{G}^1$ легко находятся.

Действуя таким образом, получим

$$\begin{aligned}
g^2 &= \frac{Q^1(a,v)Q^2(v,a)}{(\alpha+\sigma+k_a-Q^1(a,a))(\alpha+k_a-Q^2(a,a))};\\
g^1 &= \frac{Q^1(a,v)Q^1(v,a)}{(\alpha+\sigma+k_a-Q^1(a,a))(\alpha+k_a-Q^1(a,a))};\\
h^2 &= \frac{Q^1(b,v)Q^2(v,b)}{(\alpha+\sigma+k_b-Q^1(b,b))(\alpha+k_b-Q^2(b,b))};\\
h^1 &= \frac{Q^1(b,v)Q^1(v,b)}{(\alpha+\sigma+k_b-Q^1(b,b))(\alpha+k_b-Q^1(b,b))};\\
z_2^2 &= \frac{Q^2(v,b)Q^2(b,v)}{\alpha+k_b-Q^2(b,b)};\\
z_2^1 &= \frac{Q^1(v,b)Q^1(b,v)}{\alpha+k_b-Q^1(b,b)};\\
z_1^2 &= \frac{Q^2(v,a)Q^2(a,v)}{\alpha+k_a-Q^2(a,a)};\\
z_1^1 &= \frac{Q^1(v,a)Q^1(a,v)}{\alpha+k_a-Q^1(a,a)};\\
z_2^{1,\sigma} &= \frac{Q^1(v,b)Q^1(b,v)}{\alpha+\sigma+k_b-Q^1(b,b)};\\
z_1^{1,\sigma} &= \frac{Q^1(v,a)Q^1(a,v)}{\alpha+\sigma+k_a-Q^1(a,a)}.
\end{aligned}\tag{3.47}$$

Значит, $\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[g^2(k_1)-g^1(k_1)\right](T-s)$ имеет вид $C_a e^{-(\alpha+k_a-Q^1(a,a))(T-s)}$, а $\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[h^2(k_2)-h^1(k_2)\right](T-s)$ имеет вид $C_b e^{-(\alpha+k_b-Q^1(b,b))(T-s)}$. Заметим, что $e^{-(\alpha+k_a-Q^1(a,a))(T-s)-(\alpha+k_b-Q^1(b,b))(T-s)}$ в (3.45) встречается только в последнем слагаемом, а значит, в силу произвольности k_a и k_b, $C_aC_b=0$.

Для определенности пусть $C_a=0$, т.е. $g^1=g^2$. Последнее будем обозначать g. Как легко видеть, имеем $Q^1(a,a)=Q^2(a,a)$ и $Q^1(v,a)=Q^2(v,a)$.

Равенство (3.45) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[(z_2^2-z_2^1)g(k_1)+(z_1^{1,\sigma}+z_1^2)h^2(k_2)-(z_1^{1,\sigma}+z_1^1)h^1(k_2)\right](T-s)\\
&-2z_1^1\mathcal{L}_\sigma^{-1}\left[h^2(k_2)-h^1(k_2)\right](T-s)=0.
\end{aligned}\tag{3.48}$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа и рассматривая коэффициент при $e^{-(\alpha+k_a-Q^1(a,a))(T-s)}$, получим

$$\left(\frac{Q^2(v,b)Q^2(b,v)}{\alpha+k_b-Q^2(b,b)}-\frac{Q^1(v,b)Q^1(b,v)}{\alpha+k_b-Q^1(b,b)}\right)\frac{Q^1(a,v)Q^1(v,a)}{\alpha+k_a-Q^1(a,a)}$$
$$=\frac{Q^1(v,a)Q^1(a,v)}{k_a-Q^1(a,a)-k_b+Q^1(b,b)}\left(\frac{Q^1(b,v)Q^2(v,b)}{\alpha+k_b-Q^2(b,b)}-\frac{Q^1(b,v)Q^1(v,b)}{\alpha+k_b-Q^1(b,b)}\right). \tag{3.49}$$

Отсюда следует, что $Q^1(b,b)=Q^2(b,b)$, $Q^1(v,b)=Q^2(v,b)$ и $Q^1(b,v)=Q^2(b,v)$.

Теперь из (3.48) легко можно получить, что $Q^1(a,v)=Q^2(a,v)$, и утверждение доказано. □

Следствие 1. *Если граф* Γ *исходного процесса является деревом и при некотором* $s<T$ *время пребывания марковское в каждой вершине* v *относительно* $\mathbf{P}^s_{vv}$, *то* $Q_1\equiv Q_2$.

Замечание 3. Более естественно пытаться проверять марковское свойство относительно одной необходимой вершины и всех условных мер $\mathbf{P}^s_{ab}$. Однако, сделать это технически сложнее, да и ничего нового здесь также ожидать не приходится.

Литература

1. С. С. Валландер, *Времена пребывания для неоднородных цепей Маркова с дискретным временем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 37–45.
2. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* I. *Цепи с дискретным временем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **119** (1982), 39–61.
3. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* II. *Цепи с непрерывным временем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **130** (1983), 56–64.
4. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* III. *Цепи на дереве с одной точкой ветвления.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **142** (1985), 25–38.
5. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* IV. *Цепи на произвольном дереве.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 39–45.
6. С. С. Валландер, *Некоторые свойства времен пребывания и переходов для счетных цепей Маркова.* — Тезисы докладов Четвертой Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, т. 1, Вильнюс 1985, с. 116–118.
7. С. С. Валландер, *Поля пребывания и переходов для счетных цепей Маркова.* — Шестой международный сипозиум по теории информации. Тезисы докладов, ч. III, 1984, с. 64–66.

8. А. А. Воротов, *Марковское свойство поля времени пребывания для дискретных марковских процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 88–108.
9. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории.* Мир, М. 1968.

Vorotov A. A. On the Markov property of the occupation time for continuous-time inhomogeneous Markov chains.

It is known that the occupation time random field for a homogeneous Markov chain is Markovian. One investigates the possibility of generalizing this result for inhomogeneous chains. Consider a process which is a homogeneous Markov chain with the transition probability density Q_1 up to time T and with the density Q_2 after T ($Q_1 \neq Q_2$). It turns out that even in this simplest case the occupation time is not Markovian.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vaa.spb@gmail.com

Поступило 22 октября 2013 г.