Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 420, 2013 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИЙ СО СКАЧКАМИ, ОСТАНОВЛЕННЫХ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В работе рассматривается некоторый класс диффузий со скачками. Крайними представителями этого класса являются с одной стороны – однородные диффузионные процессы, а с другой – процесс Пуассона с переменной интенсивностью. Основная задача состоит в том, чтобы получить результаты, позволяющие вычислять распределения функционалов от диффузий со скачками, остановленных в момент минимума из экспоненциально распределенного момента и момента выхода из интервала.

Для скачкообразного процесса момент выхода из интервала может осуществляться либо посредством пересечения границы, либо посредством перескока границы. В связи с этим можно выделить три типа результатов. Первый относится к случаю, когда момент выхода происходит посредством пересечения границы. Второй тип результатов связан со случаем, когда момент выхода происходит посредством перескока границы. И наконец третий тип результатов касается случая, когда мы не различаем, как происходит момент первого выхода скачкообразной диффузии из интервала.

1. Диффузии со скачками. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром 1 случайные величины ($\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-t}$, $t \geqslant 0$), и Y_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от величин τ_k.

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Ключевые слова: распределение функционалов, диффузия со скачками, случайные моменты времени.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами НШ 1216.2012.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Рассмотрим однородный диффузионный процесс X, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любого $t \geqslant 0$

$$X(t) = x + \int_0^t \mu(X(u))\,du + \int_0^t \sigma(X(u))\,dW(u). \tag{1.1}$$

Пусть $\mu(x)$ и $\sigma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию на не более чем линейный рост:

$$|\mu(x)| + |\sigma(x)| \leqslant C(1 + |x|) \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда, согласно теореме 7.3 [1, гл. II], существует единственное сильное решение уравнения (1.1). Предположим, что $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \sigma(x) > 0$ и что производная $\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)'$ ограничена.

Пусть $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательная ограниченная кусочно непрерывная функция. Полагаем, что она непрерывна справа ($h(x) = h(x+)$, $x \in \mathbf{R}$). Момент

$$\varkappa_1 := \min\left\{s : \int_0^s h(X(v))\,dv = \tau_1\right\}$$

является моментом обратным к интегральному функционалу от диффузии X. Момент $\varkappa_1$ может принимать бесконечное значение на множествах положительной вероятности, поскольку интеграл

$$\int_0^\infty h(X(v))\,dv$$

может быть конечен.

Пусть функция $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, такова, что $\varkappa_1 < \infty$ п.н. Это эквивалентно условию

$$\int_0^\infty h(X(s))\,ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

Достаточным для этого, согласно следствию 12.1 [1, гл. II], является условие

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int\limits_0^y \frac{h(x)}{\sigma^2(x)}\,dx > 0, \quad \liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int\limits_{-y}^0 \frac{h(x)}{\sigma^2(x)}\,dx > 0.$$

Диффузия со скачками (обозначим ее J) определяется рекуррентно следующим образом. Пусть $\rho(x,y)$ – измеримая функция. При $\varkappa_0 := 0 \leqslant t < \varkappa_1$, полагаем $J(t) := X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). На интервале времени $\varkappa_l \leqslant t < \varkappa_{l+1}$, $l = 1, 2, \ldots$, процесс J – решение стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\big(J(\varkappa_l-), Y_l\big) + \int\limits_{\varkappa_l}^t \mu(J(u))\,du + \int\limits_{\varkappa_l}^t \sigma(J(u))\,dW(u), \tag{1.2}$$

где

$$\varkappa_{l+1} := \min\Big\{s \geqslant \varkappa_l : \int\limits_{\varkappa_l}^s h(J(v))\,dv = \tau_{l+1}\Big\}.$$

Можно дать эквивалентное определение. Рассмотрим семейство $X_{s,x}(t)$, $t \geqslant s$, $x \in \mathbf{R}$, решений стохастических дифференциальных уравнений

$$X_{s,x}(t) = x + \int\limits_s^t \mu(X_{s,x}(u))\,du + \int\limits_s^t \sigma(X_{s,x}(u))\,dW(u).$$

Тогда, согласно теореме 9.1 [1, гл. II], с вероятностью единица

$$X(t) = X_{s,X(s)}(t), \quad s \leqslant t.$$

При этом следует использовать очевидную модификацию теоремы 9.1 [1, гл. II], в которой устанавливается, что процесс $X_{s,x}(t)$ является с вероятностью единица непрерывным процессом по

$$(s,t,x) \in [0,\infty)^2 \times \mathbf{R}.$$

Ясно, что если $\varkappa_l \leqslant t < \varkappa_{l+1}$, то

$$J(t) = X_{\varkappa_l, \rho(J(\varkappa_l-), Y_l)}(t).$$

2. Предварительные сведения. Для броуновского движения задача о вычислении распределений интегральных функционалов впервые была решена М. Кацем [2]. Для процессов с независимыми приращениями интегро–дифференциальное уравнение для преобразования Фурье интегрального функционала получено в монографии [3]. Бакстер и Донскер в [4] вычислили двойное преобразование Лапласа для распределения супремума процесса со стационарными независимыми приращениями. Изучению распределения супремума процесса с независимыми приращениями, не имеющего положительных скачков, посвящена работа [5]. Явные формулы распределения для супремума процесса, являющегося суммой броуновского процесса с линейным сносом и сложного пуассоновского с экспоненциально распределенными скачками получил Мордецкий в [6].

Пусть τ – не зависимый от процесса $\{X(s),\ s \geqslant 0\}$ и величин τ_k, Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание относительно процесса J при условии $J(0) = x$. Для краткости мы используем следующее обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{I}_A\}$. Приведенные ниже результаты можно найти в [1, гл. VI].

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x \in [a, b]$ – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \Phi(J(\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau f(J(s))\, ds \Big); a \leqslant \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} J(s),\ \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} J(s) \leqslant b \Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M_\lambda(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\, \mathbf{E}\{Q(\rho(z, Y_1))\}\, dz, \tag{2.1}$$

где $M_\lambda(x)$, $x \in (a, b)$ – единственное решение задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x) M''(x) + \mu(x) M'(x) - (\lambda + h(x) + f(x)) M(x) = -\lambda \Phi(x), \tag{2.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{2.3}$$

а $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in (a,b)$, *является единственным непрерывным решением задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda + h(x) + f(x))G(x) = 0, \qquad x \neq z, \tag{2.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2h(z)/\sigma^2(z), \tag{2.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{2.6}$$

Полагаем $M_\lambda(x) = 0$, $G_{\lambda,z}(x) = 0$ *для* $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 2.1. Функция $M_\lambda(x)$, $x \in \mathbf{R}$, имеет следующий вероятностный смысл:

$$M_\lambda(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau (h(X(s)) + f(X(s)))\,ds\Big); \\ a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) \leq b\Big\}.$$

Замечание 2.2. Функция $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, имеет следующий вероятностный смысл:

$$G_{\lambda,z}(x) := \frac{d}{dz+}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big); \\ a \leq \inf_{0\leqslant s\leqslant\varkappa_1} X(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\varkappa_1} X(s) \leq b, X(\varkappa_1) < z\Big\},$$

где $\frac{d}{dz+}$ обозначает правостороннюю производную. Важное значение для различных приложений имеет момент

$$H_{a,b} := \min\{s : J(s) \notin (a,b)\},$$

который является *моментом первого выхода* диффузии со скачками из интервала (a,b). Если начальное значение $x \notin (a,b)$, полагаем $H_{a,b} = 0$.

Рассмотрим результаты, относящиеся к моменту первого выхода $H_{a,b}$. Следующие результаты касаются, по сути, преобразования Лапласа распределения неотрицательного интегрального функционала от скачкообразной диффузии J, остановленной в момент выхода из интервала через ту или иную границу. В следующей теореме не накладываются какие-либо ограничения на способ выхода из интервала.

Теорема 2.2. *Пусть $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, и $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$R(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big)\Big\}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$\begin{aligned} R(x) &= M_0(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \Phi(x)\mathbb{I}_{\mathbf{R}\setminus[a,b]}(x) \\ &\quad + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{0,z}(x)\mathbf{E}R(\rho(z,Y_1))\,dz, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где функция $M_0(x)$ является решением уравнения (2.2) при $\lambda = 0$ с граничными условиями

$$M(a) = \Phi(a), \qquad M(b) = \Phi(b), \tag{2.8}$$

а $G_{0,z}(x)$ является единственным непрерывным решением задачи (2.4)–(2.6) при $\lambda = 0$.

Рассмотрим результат, относящийся к моменту выхода через границу b. При этом выход из интервала происходит посредством пересечения границы b.

Теорема 2.3. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция*

$$R_b^\circ(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) = b\Big\}, \quad x \in \mathbf{R},$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R_b^\circ(x) = M_{b,0}(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{0,z}(x)\mathbf{E}R_b^\circ(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{2.9}$$

где $M_{b,0}(x)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (h(x)+f(x))M(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{2.10}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1, \tag{2.11}$$

а функция $G_{0,z}(x)$ *при* $x \in (a,b)$ *является единственным непрерывным решением задачи* (2.4)–(2.6) *при* $\lambda = 0$, *и* $G_{0,z}(x) = 0$ *при* $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 2.3. Для случая выхода через границу a справедлив аналогичный результат, нужно лишь граничные условия (2.11) заменить на граничные условия $M(a) = 1$, $M(b) = 0$.

Замечание 2.4. Функция $M_{b,0}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, имеет следующий вероятностный смысл:

$$M_{b,0}(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^{H_{a,b}} \big(h(X(s)) + f(X(s))\big)\, ds \Big); X(H_{a,b}) = b \Big\} \mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$

Рассмотрим случай, когда выход из интервала происходит посредством перескока границы. В этом случае, если границей выхода является точка b, справедлив следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть* $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *и* $f(x)$, $x \in [a,b]$, *– кусочно непрерывные функции. Предположим, что* $f \geqslant 0$, *а* Φ *ограничена. Тогда функция*

$$R_b^1(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \Phi(J(H_{a,b})) \exp\Big(- \int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\, ds \Big); J(H_{a,b}) > b \Big\}, \ x \in \mathbf{R},$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R_b^1(x) = \Phi(x) \mathbb{I}_{(b,\infty)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{0,z}(x) \mathbf{E} R_b^1(\rho(z, Y_1))\, dz, \tag{2.12}$$

где $G_{0,z}(x)$ *при* $x \in (a,b)$ *является единственным непрерывным решением задачи* (2.4)–(2.6) *при* $\lambda = 0$, *и* $G_{0,z}(x) = 0$ *при* $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 2.5. Для случая выхода через границу a справедлив аналогичный результат, нужно лишь в уравнении (2.12) заменить индикатор $\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x)$ на индикатор $\mathbb{I}_{(-\infty,a)}(x)$.

Ключевым для вычисления совместных распределений интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума от моста диффузионного процесса со скачками является следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда при $a < y < b$ производная*

$$\widetilde{G}_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a \le \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s),$$
$$\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \le b, J(\tau) < y\Big\} \tag{2.13}$$

существует и является единственным ограниченным решением уравнения

$$\widetilde{G}_y(x) = G_y^\lambda(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\,\mathbf{E}\widetilde{G}_y(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{2.14}$$

где $G_y^\lambda(x)$ является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x)$$
$$-(\lambda + h(x) + f(x))G(x) = 0, \quad x \in (a,b)\backslash\{y\}, \tag{2.15}$$
$$G'(y+0) - G'(y-0) = -2\lambda/\sigma^2(y), \tag{2.16}$$
$$G(a) = 0, \quad G(b) = 0, \tag{2.17}$$

а $G_{\lambda,z}(x)$ – решение задачи (2.4)–(2.6). Полагаем $G_y^\lambda(x)=0$, $G_{\lambda,y}(x)=0$, если или $x \notin (a,b)$, или $y \notin (a,b)$.

Замечание 2.6. Функция $G_y^\lambda(x)$, $x \in (a,b)$, является функцией Грина задачи (2.2), (2.3), т.е.

$$M_\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(z)\,G_z^\lambda(x)\,dz. \tag{2.18}$$

Эта функция имеет следующее вероятностное представление:

$$G_y^\lambda(x) = \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau (h(X(s)) + f(X(s)))\,ds\Big);$$
$$a \le \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) \le b, X(\tau) < y\Big\}.$$

3. Минимум из экспоненциально распределенного момента и момента первого выхода. Рассмотрим задачу вычисления распределений интегральных функционалов от скачкообразного диффузионного процесса, остановленного в момент времени

$$\tau \wedge H_{a,b} := \min\{\tau, H_{a,b}\}.$$

Следующий результат позволяет решать эту задачу, если нет никаких ограничений на выход через границу.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$V(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau \wedge H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau\wedge H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big)\Big\} \tag{3.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$V(x) = \widetilde{M}_\lambda(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \Phi(x)\mathbb{I}_{R\setminus[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}V(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{3.2}$$

где $\widetilde{M}_\lambda(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения (2.2) *с граничными условиями* (2.8), *а $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением задачи* (2.4)–(2.6).

Замечание 3.1. Функция $\widetilde{M}_\lambda(x)$, $x \in \mathbf{R}$, имеет следующий вероятностный смысл:

$$\widetilde{M}_\lambda(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau \wedge H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau\wedge H_{a,b}} (f(X(s)) + h(X(s)))\,ds\Big)\Big\}$$

Доказательство теоремы 3.1. Функция V представима в виде суммы двух слагаемых

$$V(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(J(s))\,ds\Big); \tau < H_{a,b}\Big\}$$

$$+ \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); \tau \geqslant H_{a,b}\Big\} =: Q(x) + R_\lambda(x).$$

Так как $\mathbf{P}(\tau = H_{a,b}) = 0$, то событие $\{\tau < H_{a,b}\}$ эквивалентно событию

$$\Big\{a \le \inf_{0\le s\le\tau} J(s),\ \sup_{0\le s\le\tau} J(s) \le b\Big\}, \tag{3.3}$$

поэтому функция Q может быть представлена следующим образом:

$$Q(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a \le \inf_{0\le s\le\tau} J(s),\ \sup_{0\le s\le\tau} J(s) \le b\Big\},$$

и, следовательно, $Q(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения (2.1).

Функцию $R_\lambda(x)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$R_\lambda(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int_0^{H_{a,b}} (\lambda + f(J(s)))\,ds\Big)\Big\}.$$

Действительно, используя независимость τ от процесса J, можно применить теорему Фубини и вычислить сначала математическое ожидание по τ от события $\{\tau \geqslant H_{a,b}\}$, что приводит к множителю $e^{-\lambda H_{a,b}}$.

Если в теореме 2.2 заменить $f(x)$ на $\lambda + f(x)$, то получим, что функция $R_\lambda(x)$ является решением уравнения

$$R_\lambda(x) = M_{0,\lambda}(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \Phi(x)\mathbb{I}_{R\setminus[a,b]}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}R_\lambda(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{3.4}$$

где $M_{0,\lambda}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu M'(x) - (\lambda + f(x) + h(x))M(x) = 0 \tag{3.5}$$

с граничными условиями (2.8), а $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением задачи (2.4)–(2.6).

Заметим, что суммарная функция $\widetilde{M}_\lambda(x) := M_\lambda(x) + M_{0,\lambda}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения (2.2) с граничными условиями (2.8). В результате имеем, что функция $V(x) = Q(x) + R_\lambda(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения (3.2). Теорема 3.1 доказана. □

Рассмотрим результаты, позволяющие вычислять распределения интегральных функционалов от диффузий со скачками в момент $\tau \wedge$

$H_{a,b}$, когда выход осуществляется через границу b. Начнем с результата для случая, когда выход происходит посредством пересечения границы. Заметим, что даже в случае, когда τ меньше момента выхода, мы продолжаем отслеживать процесс до момента выхода из интервала $[a,b]$.

Теорема 3.2. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$V_b^\circ(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau \wedge H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau\wedge H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) = b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$V_b^\circ(x) = \widetilde{M}_{b,\lambda}(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}V_b^\circ(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{3.6}$$

где $\widetilde{M}_{b,\lambda}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x)+\mu(x)M'(x)-(\lambda+h(x)+f(x))M(x)=-\lambda\Phi(x)V_{b,0}(x), \tag{3.7}$$

с граничными условиями

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = \Phi(b), \tag{3.8}$$

функция $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in [a,b]$ является единственным непрерывным решением задачи (2.4)–(2.6), а $V_{b,0}(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$V_{b,0}(x) = \overline{M}_{0,b}(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_{0,z}(x)\mathbf{E}V_{b,0}(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{3.9}$$

в котором $\overline{M}_{0,b}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением задачи (2.10), (2.11) при $f \equiv 0$, а $\overline{G}_{0,z}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением задачи (2.4)–(2.6) при $f \equiv 0$ и $\lambda = 0$.

Замечание 3.2. Функция $V_{b,0}(x)$, $x \in [a,b]$, имеет следующий вероятностный смысл:

$$V_{b,0}(x) = \mathbf{P}_x(J(H_{a,b}) = b).$$

Замечание 3.3. Для случая выхода через границу a справедлив аналогичный результат, нужно лишь в обозначении функций нижний индекс b заменить на a, граничные условия (3.8) заменить на граничные

условия $M(a) = \Phi(a)$, $M(b) = 0$, а граничные условия (2.11) заменить на граничные условия $M(a) = 1$, $M(b) = 0$.

Доказательство теоремы 3.2. Функция V_b° представима в виде суммы двух слагаемых

$$V_b^\circ(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) = b, \tau < H_{a,b}\Big\}$$
$$+\,\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) = b, \tau \geqslant H_{a,b}\Big\}$$
$$:= Q_b^\circ(x) + \Phi(b)R_{\lambda,b}^\circ(x). \tag{3.10}$$

Рассмотрим функцию Q_b°. Событие $\{\tau < H_{a,b}\}$ эквивалентно событию (3.3), поэтому функция Q_b° может быть представлена следующим образом:

$$Q_b^\circ(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))ds\Big); a \leq \inf_{0\leq s\leq\tau} J(s),$$
$$\sup_{0\leq s\leq\tau} J(s) \leq b, J(H_{a,b}) = b\Big\}$$
$$= \int\limits_a^b \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big);$$
$$a \leq \inf_{0\leq s\leq\tau} J(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau} J(s) \leq b, J(\tau) \in [y, y+dy), J(H_{a,b}) = b\Big\}.$$

Рассмотрим процесс $\widetilde{J}(s) := J(\tau+s)$, $s \geqslant 0$, и на множестве $\{\tau \leq H_{a,b}\}$ определим момент $\widetilde{H}_{a,b} := H_{a,b} - \tau = \min\big\{s : \widetilde{J}(s) \notin (a,b)\big\}$. Диффузия со скачками J является марковским процессом, и момент τ от нее не зависит, поэтому процесс $\widetilde{J}(s)$, $s \geqslant 0$, при условии $J(\tau) = y$ начинается заново и распределен как процесс $J(s)$, $s \geqslant 0$, исходящий из точки y.

Учитывая это, получим

$$Q_b^\circ(x) = \int\limits_a^b \Phi(y)\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a \le \inf_{0\le s\le\tau} J(s),$$

$$\sup_{0\le s\le\tau} J(s) \le b, J(\tau)\in[y, y+dy)\Big\}\mathbf{P}\big(\widetilde{J}(H_{a,b}) = b\big|J(\tau) = y\big)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)\widetilde{G}_y(x)\,\mathbf{P}_y\big(J(H_{a,b}) = b\big)\,dy, \tag{3.11}$$

где функция $\widetilde{G}_y(x)$ определяется формулой (2.13). Вероятность

$$V_{b,0}(x) = \mathbf{P}_y\big(J(H_{a,b}) = b\big)$$

можно вычислить применив теорему 2.3 при $f \equiv 0$, что приводит к уравнению (3.9). По аналогии с (2.18) функция $\widetilde{G}_y(x)$ является функцией Грина соответствующей задачи, поэтому правая часть (3.11) является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_b^\circ(x) = \widetilde{M}_{b,\lambda}^\circ(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}Q_b^\circ(\rho(z, Y_1))\,dz, \tag{3.12}$$

где $\widetilde{M}_{b,\lambda}^\circ(x)$, $x\in[a,b]$, является единственным решением уравнения (3.7) с граничными условиями $M(a) = 0$, $M(b) = 0$.

Функцию $R_{\lambda,b}^\circ(x)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$R_{\lambda,b}^\circ(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} (\lambda + f(J(s)))\,ds\Big); J(H_{a,b}) = b\Big\}.$$

Действительно, используя независимость τ от процесса J, можно применить теорему Фубини и вычислить сначала математическое ожидание по τ от события $\{\tau \geqslant H_{a,b}\}$, что приводит к множителю $e^{-\lambda H_{a,b}}$.

Если в теореме 2.3 заменить $f(x)$ на $\lambda + f(x)$, то получим, что функция $R_{\lambda,b}^\circ(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$R_{\lambda,b}^\circ(x) = M_{b,\lambda}^\circ(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}R_{\lambda,b}^\circ(\rho(z, Y_1))\,dz, \tag{3.13}$$

где $M^{\circ}_{b,\lambda}(x)$, $x \in [a,b]$, является решением уравнения (3.5) с граничным условием (2.11), а $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным непрерывным решением задачи (2.4)–(2.6). Теперь из (3.10), (3.12) и (3.13) следует уравнение (3.6) при

$$\widetilde{M}_{b,\lambda}(x) = \widetilde{M}^{\circ}_{b,\lambda}(x) + \Phi(b) M^{\circ}_{b,\lambda}(x).$$

Несложно понять, что функция $\widetilde{M}_{b,\lambda}$ удовлетворяет уравнению (3.7) с граничными условиями (3.8). Теорема 3.2 доказана. □

Рассмотрим случай, когда выход из интервала (a,b) осуществляется посредством перескока через границу b.

Теорема 3.3. *Пусть $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$V^1_b(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau \wedge H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau\wedge H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) > b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$V^1_b(x) = M^1_{b,\lambda}(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \Phi(x)\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}V^1_b(\rho(z,Y_1))\,dz, \quad (3.14)$$

где $M^1_{b,\lambda}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda + h(x) + f(x))M(x) = -\lambda\Phi(x)V_{b,1}(x), \quad (3.15)$$

с граничными условиями (2.3), функция $G_{\lambda,z}(x)$, $x \in [a,b]$ является единственным непрерывным решением задачи (2.4)–(2.6), а $V_{b,1}(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$V_{b,1}(x) = \mathbb{I}_{(b,\infty)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_{0,z}(x)\mathbf{E}V_{b,1}(\rho(z,Y_1))\,dz, \quad (3.16)$$

а $\overline{G}_{0,z}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением задачи (2.4)–(2.6) при $f \equiv 0$ и $\lambda = 0$.

Замечание 3.4. Функция $V_{b,1}(x)$, $x \in [a,b]$, имеет следующий вероятностный смысл:

$$V_{b,1}(x) = \mathbf{P}_x(J(H_{a,b}) > b).$$

Замечание 3.5. Для случая выхода через границу a справедлив аналогичный результат, нужно лишь в обозначении функций нижний индекс b заменить на a, и заменить индикатор $\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x)$ на индикатор $\mathbb{I}_{(-\infty,a)}(x)$.

Доказательство теоремы 3.3. Доказательство этой теоремы в значительной степени аналогично доказательству предыдущей. Мы сохраним обозначения $\widetilde{J}(s)$, $s \geqslant 0$, и $\widetilde{H}_{a,b}$. Функция V_b^1 представима в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} V_b^1(x) &:= \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) > b, \tau < H_{a,b}\Big\} \\ &\quad + \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) > b, \tau \geqslant H_{a,b}\Big\} \\ &=: Q_b^1(x) + R_{\lambda,b}^1(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию Q_b^1. Событие $\{\tau < H_{a,b}\}$ совпадает с событием (3.3), поэтому функция Q_b^1 может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_b^1(x) = \mathbf{E}_x\Big\{&\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))ds\Big); a \le \inf_{0\le s\le\tau} J(s), \\ &\sup_{0\le s\le\tau} J(s) \le b, J(H_{a,b}) > b\Big\} \\ = \int\limits_a^b \mathbf{E}_x\Big\{&\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); \\ a \le \inf_{0\le s\le\tau} J(s),\ &\sup_{0\le s\le\tau} J(s) \le b, J(\tau) \in [y, y+dy), J(H_{a,b}) > b\Big\}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что диффузия J является марковским процессом и момент τ от нее не зависит, получим

$$Q_b^1(x) = \int\limits_a^b \Phi(y)\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a \le \inf_{0\le s\le\tau} J(s),$$

$$\sup_{0\le s\le\tau} J(s) \le b, J(\tau)\in[y,y+dy)\Big\}\mathbf{P}\big(\widetilde{J}(H_{a,b})>b\big|J(\tau)=y\big)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(y)\widetilde{G}_y(x)\,\mathbf{P}_y\big(J(H_{a,b})>b\big)\,dy, \tag{3.17}$$

где функция $\widetilde{G}_y(x)$ определяется формулой (2.13). Вероятность

$$V_{b,1}(x) = \mathbf{P}_y\big(J(H_{a,b})>b\big)$$

можно вычислить, применив теорему 2.4 при $f\equiv 0$, что приводит к уравнению (3.16). Так как $\widetilde{G}_y(x)$ является функцией Грина соответствующей задачи, то правая часть (3.17) является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_b^1(x) = \widetilde{M}_{b,\lambda}^1(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}Q_b^1(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{3.18}$$

где $\widetilde{M}_{b,\lambda}^1(x)$, $x\in[a,b]$, является единственным решением уравнения (3.15) с граничными условиями $M(a)=0$, $M(b)=0$.

Функцию $R_{\lambda,b}^1(x)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$R_{\lambda,b}^1(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}}(\lambda+f(J(s)))\,ds\Big); J(H_{a,b})>b\Big\}.$$

Действительно, используя независимость τ от процесса J, можно применить теорему Фубини и вычислить сначала математическое ожидание по τ от события $\{\tau\geqslant H_{a,b}\}$, что приводит к множителю $e^{-\lambda H_{a,b}}$.

Если в теореме 2.4 заменить $f(x)$ на $\lambda+f(x)$, то получим, что функция $R_{\lambda,b}^1(x)$ является решением уравнения

$$R_{\lambda,b}^1(x) = \Phi(x)\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda,z}(x)\mathbf{E}R_{\lambda,b}^1(\rho(z,Y_1))\,dz. \tag{3.19}$$

Сумма решений уравнений (3.18) и (3.19) является решением уравнения (3.14). Теорема 3.3 доказана. □

Замечание 3.6. Теорема 3.1 следует из теорем 3.2, 3.3 и их аналогов для выхода через границу a, так как

$$V(x) = V_b^{\circ}(x) + V_b^1(x) + V_a^{\circ}(x) + V_a^1(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Для доказательства этого утверждения следует заметить, что

$$V_{b,0}(x) + V_{b,1}(x) + V_{a,0}(x) + V_{a,1}(x) = 1, \quad x \in [a,b], \tag{3.20}$$

и поэтому

$$\widetilde{M}_\lambda(x) = \widetilde{M}_{b,\lambda}(x) + M_{b,\lambda}^1(x) + \widetilde{M}_{a,\lambda}(x) + M_{a,\lambda}^1(x).$$

Равенство (3.20) следует не только из вероятностного смысла слагаемых, но и из решений соответствующих интегро-дифференциальных задач.

Литература

1. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* С.-Петербург, Лань (2013).
2. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.
3. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1964).
4. G. Baxter and M. D. Donsker, *On distribution of the supremum functionals for processes with stationary independent increments.* — Trans. Amer. Math. Soc. **85**, No. 1 (1957), 73–87.
5. В. М. Золотарев, *Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями.* — Теория вероятн. и ее примен. **9**, No. 4 (1964), 724–733.
6. E. Mordecki, *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, No. 1 (2003), 188–194.

Borodin A. N. Distributions of functionals of diffusions with jumps stopped at random moments.

The paper deals with the methods of computations of distributions of functionals of diffusions with jumps, stopped at the minimum of exponentially distributed random time and the first exit time from an interval.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2013 г.