Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

А. С. Смирнов

ИЗОМОРФИЗМЫ И АВТОМОРФИЗМЫ ЛОКАЛЬНО-КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБР

§1. Введение

Определение 1.1. *Алгебра L над полем $\mathbb{R}$ с единичным элементом называется локально-комплексной, если любой ее элемент, не являющийся элементом $\mathbb{R}$, порождает подалгебру, изоморфную $\mathbb{C}$.*

Определение 1.2. *Алгебра Q с единичным элементом над полем $\mathbb{R}$ называется квадратичной, если для любого $x \in Q$ элементы $1, x, x^2$ линейно зависимы над $\mathbb{R}$. То есть, если существуют $t(x), n(x) \in \mathbb{R}$ такие, что $x^2 - t(x)x + n(x) = 0$.*

Числа $t(x)$ и $n(x)$ из предыдущего определения называются соответственно следом и нормой элемента x в квадратичной алгебре Q. Для данного элемента $x \in Q$ они определяются единственным образом. В работе [1, лемма 4.1] доказывается следующий важный результат.

Теорема 1.3. *Следующие условия, накладываемые на алгебру L, эквивалентны;*
(1) *L – локально-комплексная алгебра;*
(2) *L – квадратичная алгебра и $n(x) > 0$ для любого $0 \neq x \in L$.*

Если также $2 \leqslant \dim L \leqslant n \leqslant \infty$, то каждое из условий (1) и (2) эквивалентно условию
(3) *L имеет базис $\{1, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ такой, что $e_i^2 = -1$ для любого i, и $e_i e_j = -e_j e_i$ для любых $i \neq j$.*

В данной работе рассматриваются конечномерные локально-комплексные алгебры над полем действительных чисел. Во всех дальнейших утверждениях это подразумевается. В силу предыдущей теоремы

Ключевые слова: Локально-комплексные алгебры, алгебры Кэли–Диксона, неассоциативные алгебры, классы изоморфности локально-комплексных алгебр, группа автоморфизмов локально-комплексных алгебр, ассоциированные матрицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов МД-2502.2012.1 и РФФИ 12-01-00140а.

в рассматриваемых алгебрах любой элемент имеет следующий вид:

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i, \quad \text{где} \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Используя форму записи (1), можно ввести понятие сопряженного элемента по правилу

$$x^* = x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i, \quad \text{где} \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Пример. Рассмотрим действительную трехмерную локально-комплексную алгебру L с таблицей умножения, представленной в таблице 1.

Таблица 1. Таблица умножения алгебры L

$*$	1	e_1	e_2
1	1	e_1	e_2
e_1	e_1	-1	$1+e_1+e_2$
e_2	e_2	$-1-e_1-e_2$	-1

Покажем, что в данной алгебре $(ab)^* \neq b^*a^*$. Пусть $a = 1 + 2e_1$, $b = 2 + e_2$. Тогда

$$b^*a^* = (2 - e_2)(1 - 2e_1) = 2 - 4e_1 - e_2 + 2e_2e_1 = -6e_1 - 3e_2, \tag{3}$$

$$(ab)^* = 4 - 6e_1 - 3e_2. \tag{4}$$

Таким образом, $(ab)^* \neq b^*a^*$.

Определение 1.4. *Назовем локально-комплексную алгебру сопрягаемой, если для любых ее элементов x, y выполнено соотношение $(yx)^* = x^*y^*$.*

Утверждение 1.5. *Локально-комплексная алгебра является сопрягаемой тогда и только тогда, когда в разложении по базису произведений любых двух базисных векторов отсутствует слагаемое пропорциональное 1. Другими словами, когда для любых $j \neq k$, $j \neq 0$, $k \neq 0$, $e_je_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi_{jki} e_i$ и $\pi_{jk0} = 0$.*

Доказательство. Выведем соотношение $(ab)^* = b^*a^*$ из того, что для любых $j \neq j$, $j \neq 0$, $k \neq 0$ $p_{jk0} = 0$. Тогда $(e_je_k)^* = -e_je_k = e_ke_j$. Пусть также

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i, \quad b = b_0 + \sum_{j=1}^{n-1} b_je_j. \tag{5}$$

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
(ab)^* &= (a_0b_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_0e_i + \sum_{j=1}^{n-1} b_ja_0e_j + \sum_{i\neq j} a_ib_je_ie_j)^* \\
&= a_0b_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_0e_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_ja_0e_j + \sum_{i\neq j} a_ib_j(e_ie_j)^* \\
&= a_0b_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_0e_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_ja_0e_j + \sum_{i\neq j} a_ib_je_je_i \\
&= b_0(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i) - \sum_{j=1}^{n-1} b_je_j(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i) \\
&= (b_0 - \sum_{j=1}^{n-1} b_je_j)(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i) = b^*a^*.
\end{aligned} \tag{6}$$

Докажем данное утверждение в обратную сторону. Имеем:

$$\begin{aligned}
(ab)^* &= (a_0b_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_0e_i + \sum_{j=1}^{n-1} b_ja_0e_j + \sum_{i\neq j} a_ib_je_ie_j)^* \\
&= a_0b_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_0e_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_ja_0e_j + \sum_{i\neq j} a_ib_j(e_ie_j)^*,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
b^*a^* &= (b_0 - \sum_{j=1}^{n-1} b_je_j)(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i) \\
&= b_0a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_ib_0e_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_ja_0e_j + \sum_{i\neq j} a_ib_je_je_i.
\end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, если $(ab)^* = b^*a^*$, то для любых $i \neq j$, $i \neq 0$, $j \neq 0$ необходимо выполнение равенства $(e_ie_j)^* = e_je_i$. Но для локально-комплексных алгебр верно $e_ie_j = -e_je_i$, следовательно, для любых $i \neq j$, $i \neq 0$, $j \neq 0$ имеем $(e_ie_j)^* = -e_ie_j$, а это равносильно $Re[(e_ie_j)] = 0$. □

§2. Классы изоморфности локально-комплексных алгебр

2.1. Матричная характеризация. Так как в локально-комплексных алгебрах присутствуют две операции, их изоморфизмы должны сохранять обе операции. Из того, что по сложению локально-комплексная алгебра является линейным пространством, следует, что изоморфизм локально-комплексных алгебр есть линейный оператор, то есть задается матрицей в фиксированном базисе. Также, как будет показано в дальнейшем тексте, сохранение операции умножения при переходе к новому базису эквивалентно переходу таблицы умножения одной алгебры в таблицу умножения другой алгебры. Поэтому мы будем говорить, что некая матрица является изоморфизмом локально-комплексных алгебр, понимая под этим, что линейное преобразование, задаваемое данной матрицей, является изоморфизмом.

Пусть заданы две $(k+1)$-мерные локально-комплексные алгебры L_1 и L_2 и пусть усеченная таблица умножения (без строк и столбцов, относящихся к единичному базисному вектору) алгебры L_j имеет следующий вид:

Таблица 2. Таблица умножения алгебры L_j

$*$	e_1	e_2	$\dots$	e_k
e_1	-1	$\pi^j_{120} + \sum\limits_{i=1}^{k} \pi^j_{12i}e_i$	$\dots$	$\pi^j_{1k0} + \sum\limits_{i=1}^{k} \pi^j_{1ki}e_i$
e_2	$-\pi^j_{120} - \sum\limits_{i=1}^{k} \pi^j_{12i}e_i$	-1	$\dots$	$\pi^j_{2k0} + \sum\limits_{i=1}^{k} \pi^j_{2ki}e_i$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_k	$-\pi^j_{1k0} - \sum\limits_{i=1}^{k} \pi^j_{1ki}e_i$	$-\pi^j_{2k0} - \sum\limits_{i=1}^{k} \pi^j_{2ki}e_i$	$\dots$	-1

Определение 2.1. *Будем обозначать через e вектор базисных элементов без единицы, то есть $e^T = (e_1, e_2, \dots, e_k)$.*

Определение 2.2. *Через S_i^j обозначим матрицу размера $k \times k$ коэффициентов при e_i в таблице умножения алгебры L_j. То есть*

$$S_i^j = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{12i}^j & \dots & \pi_{1ki}^j \\ -\pi_{12i}^j & 0 & \dots & \pi_{2ki}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\pi_{1ki}^j & -\pi_{2ki}^j & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В данных обозначениях таблица умножения локально-комплексной алгебры L_j запишется в виде

$$ee^T = -E + S_0^j + S_1^j e_1 + \dots + S_k^j e_k. \tag{9}$$

Утверждение 2.3. *Матрица X задает изоморфизм локально-комплексных алгебр L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда она переводит таблицу умножения алгебры L_1 в таблицу умножения алгебры L_2. Другими словами, в старом базисе $e = (1, e_1, \dots, e_k)^T$ таблица умножения алгебры L_1 записывается как $ee^T = -E + S_0^1 + S_1^1 e_1 + \dots + S_k^1 e_k$ тогда и только тогда, когда в новом базисе $\widetilde{e} = (\widetilde{1}, \widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_k) := Xe$ таблица умножения алгебры L_1 записывается как*

$$\widetilde{e}\widetilde{e}^T = -E\widetilde{1} + S_0^2\widetilde{1} + S_1^2\widetilde{e}_1 + \dots + S_k^2\widetilde{e}_k.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Пусть матрица X задает изоморфизм f локально-комплексных алгебр L_1 и L_2. В таких обозначениях $f(e_i) = \widetilde{e}_i$ и, в частности, верно соотношение

$$\begin{aligned} \pi_{ij0}^2\widetilde{1} + \pi_{ij1}^2\widetilde{e}_1 + \dots + \pi_{ijk}^2\widetilde{e}_k = \widetilde{e}_i\widetilde{e}_j = f(e_i)f(e_j) &= f(e_ie_j) \\ &= f(\pi_{ij0}^1 1 + \pi_{ij1}^1 e_1 + \dots + \pi_{ijk}^1 e_k). \end{aligned}$$

Теперь докажем необходимость. Нам дано, что преобразование f переводит таблицу умножения одной алгебры в таблицу умножения другой алгебры. Возьмем два произвольных элемента $a = a_1e_1 + \dots + a_ke_k$ и $b = b_1e_1 + \dots + b_ke_k$. Тогда необходимо проверить соотношение $f(a)f(b) = f(ab)$. Имеем:

$$f(a)f(b) = \left(\sum_{i=1}^k a_i f(e_i)\right)\left(\sum_{i=1}^k b_i f(e_i)\right) = \sum_{i,j} a_ib_jf(e_i)f(e_j), \tag{10}$$

$$f(ab) = \sum_{i,j} f(a_ie_ib_je_j) = \sum_{i,j} a_ib_jf(e_ie_j). \tag{11}$$

Сравнивая соотношения (10) и (11), видим, что равенства $f(e_i)f(e_j) = f(e_ie_j)$ достаточно для доказательства утверждения. □

Утверждение 2.4. *Пусть базисом локально-комплексной алгебры L_1 является набор $e = (1, e_1, \ldots, e_k)$ и имеется невырожденная матрица $X = (x_{ij})$ размера $(k+1) \times (k+1)$, которая задает переход к новому базису $\widetilde{e} = (\widetilde{1}, \widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_k)$. Если матрица X задает изоморфизм локально-комплексных алгебр L_1 и L_2, то $x_{0j} = x_{j0} = 0$ для любого $j \geqslant 1$ и $x_{00} = 1$.*

Доказательство. По условию имеем, что $\widetilde{1} = \sum\limits_{j=0}^{k} x_{0j} e_j, \widetilde{e}_i = \sum\limits_{j=0}^{k} x_{ij} e_j$, где под e_0 понимается 1. Чтобы данное преобразование задавало изоморфизм локально-комплексных алгебр, необходимо, чтобы $(\widetilde{1})^2 = \widetilde{1}$, поэтому $(\widetilde{1})^2 = x_{00}^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} x_{0j}^2 + 2x_{00} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{0j} e_j = x_{00} + \sum\limits_{j=1}^{k} x_{0j} e_j$. Если $x_{0j} \neq 0$ хотя бы для какого-нибудь $j \geqslant 1$, то $x_{00} = \frac{1}{2}$, поэтому приравнивая коэффициенты при единичном базисном векторе будем иметь, что $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \sum\limits_{j=1}^{k} x_{0j}^2$, но $-\frac{1}{4} \neq \sum\limits_{j=1}^{k} x_{0j}^2 \geqslant 0$, противоречие. Поэтому $x_{0j} = 0$ для любого $j \geqslant 1$. Отсюда следует, что $x_{00}^2 = x_{00}$. Если $x_{00} = 0$, то получаем, что векторы нового базиса $\widetilde{e} = (\widetilde{1}, \widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_k)$ линейно зависимы, что запрещено, поэтому $x_{00} = 1$. Также необходимо, чтобы $(\widetilde{e}_i)^2 = \widetilde{-1} = -1$ для всех $i \geqslant 1$. Расписывая данное условие более подробно, получаем, что $(\widetilde{e}_i)^2 = x_{i0}^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}^2 + 2x_{i0} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij} e_j$. Следовательно, чтобы коэффициенты при всех базисных векторах, кроме единицы, в данном разложении были равны нулю, необходимо, чтобы либо $x_{i0} = 0$, либо $x_{ij} = 0$ для любого j. Если выполнено второе условие, получаем, что $(\widetilde{e}_i)^2 = x_{i0}^2$, но $-1 \neq x_{i0}^2 \geqslant 0$, противоречие. Таким образом, так как индекс $i \geqslant 1$ может браться любым, получаем, что $x_{i0} = 0$ для любого $i \geqslant 1$. $\square$

Автоматическим следствием предыдущего утверждения является то, что при рассмотрении изоморфизмов локально-комплексных алгебр достаточно рассматривать ограничение изоморфизма на все базисные векторы, кроме единичного. Поэтому далее под изоморфизмом будет пониматься матрица ограничения линейного преобразования на подпространство $< e_1, e_2, \ldots, e_k >$.

Пусть матрица $X = (x_{ij})$ размера $k \times k$ есть некий изоморфизм $(k+1)$-мерных алгебр L_1 и L_2. Тогда как линейный оператор она задает переход к новому базису $\widetilde{e} = Xe$.

Утверждение 2.5. *Матрица X, задающая изоморфизм локально-комплексных алгебр, ортогональна.*

Доказательство. Если матрица X задает изоморфизм, то

$$\widetilde{e}\widetilde{e}^T = -E + S_0^2 + S_1^2\widetilde{e}_1 + \cdots + S_k^2\widetilde{e}_k. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\widetilde{e}\widetilde{e}^T = Xee^TX^T = -XX^T + XS_0^1X^T + XS_1^1X^Te_1 + \cdots + XS_k^1X^Te_k. \tag{13}$$

По утверждению 2.4 базисные векторы e_i, где $i \geqslant 1$, являются линейными комбинациями только векторов $\widetilde{e}_j$, где $j \geqslant 1$, а матрицы $XS_i^1X^T$ являются действительными. Поэтому $-E + S_0^2 = -XX^T + XS_0^1X^T$. Группируя слагаемые, получаем

$$E - XX^T = S_0^2 - XS_0^1X^T. \tag{14}$$

В левой части равенства стоит симметричная матрица, а справа – кососимметрическая, следовательно, обе матрицы нулевые, т.е. $XX^T = E$. □

Утверждение 2.6. *Выполнены следующие соотношения:*

$$S_1^2\widetilde{e}_1 + \cdots + S_k^2\widetilde{e}_k = \Big(x_{11}XS_1^1X^T + \cdots + x_{1k}XS_k^1X^T)\widetilde{e}_1 + \cdots + (x_{k1}XS_1^1X^T + \cdots + x_{kk}XS_k^1X^T\Big)\widetilde{e}_k, \tag{15}$$

$$S_0^2 = XS_0^1X^T. \tag{16}$$

Доказательство. По предыдущему утверждению матрица автоморфизма X является ортогональной, поэтому $e = X^T\widetilde{e}$ или $e_i = x_{1i}\widetilde{e}_1 + \cdots + x_{ki}\widetilde{e}_k$ для любого i. Далее подставляем данное соотношение в (13), группируем слагаемые при одинаковых базисных векторах и получаем требуемое равенство. Второе равенство уже было получено при доказательстве утверждения 2.5. □

Равенства (15)–(16) задают систему уравнений на матрицу автоморфизма X. Для того, чтобы записать данную систему в более удобном виде, необходимо ввести понятие ассоциированной матрицы.

2.2. Ассоциированная матрица всевозможных 2×2 миноров. Для каждой матрицы X размера $k \times k$ определим матрицу $\widehat{X}$ размера $k(k-1)/2 \times k(k-1)/2$ ее всевозможных двумерных миноров по следующему правилу:

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} D_{1212} & D_{1312} & \dots & D_{1k12} & D_{2312} & \dots & D_{2k12} & D_{3412} & \dots & D_{k-1k12} \\ D_{1213} & D_{1313} & \dots & D_{1k13} & D_{2313} & \dots & D_{2k13} & D_{3413} & \dots & D_{k-1k13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{121k} & D_{131k} & \dots & D_{1k1k} & D_{231k} & \dots & D_{2k1k} & D_{341k} & \dots & D_{k-1k1k} \\ D_{1223} & D_{1323} & \dots & D_{1k23} & D_{2323} & \dots & D_{2k23} & D_{3423} & \dots & D_{k-1k23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{122k} & D_{132k} & \dots & D_{1k2k} & D_{232k} & \dots & D_{2k2k} & D_{342k} & \dots & D_{k-1k2k} \\ D_{1234} & D_{1334} & \dots & D_{1k34} & D_{2334} & \dots & D_{2k34} & D_{3434} & \dots & D_{k-1k34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{12k-1k} & D_{13k-1k} & \dots & D_{1kk-1k} & D_{23k-1k} & \dots & D_{2kk-1k} & D_{34k-1k} & \dots & D_{k-1kk-1k} \end{pmatrix}.$$

Здесь D_{ijkl} обозначает минор на пересечении i-ой и j-ой строк и k-го и l-го столбцов, то есть $D_{ijkl} = x_{ik}x_{jl} - x_{il}x_{jk}$.

Аналоги предыдущего определения можно сформулировать также для неквадратных матриц и миноров любого размера с сохранением соответствующих свойств, но в дальнейшем тексте нам понадобится только введенный в этом определении объект. Следующие результаты для ассоциированных матриц приводятся в [2–4].

Утверждение 2.7.
(1) $\widehat{\pm E} = E$.
(2) *Для любой матрицы* X $\widehat{X}^T = \widehat{X^T}$.
(3) *Для любых двух матриц* X, Y *подходящего размера* $\widehat{X}\widehat{Y} = \widehat{XY}$.
(4) *Для любой обратимой матрицы* X $\widehat{X}^{-1} = \widehat{X^{-1}}$.
(5) *Если матрица* X *ортогональна, то матрица* $\widehat{X}$ *также ортогональна.*
(6) *Пусть матрица* $X \in M_k(\mathbb{C})$ *имеет* k *собственных значений* $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. *Тогда собственными значениями матрицы* $\widehat{X}$ *являются всевозможные произведения* $\lambda_i\lambda_j$, $i \neq j$.

Пусть задана произвольная кососимметричная матрица $S = (\pi_{kl})$. По ней построим вектор ее элементов по следующему правилу:

$$S^{\triangle} = \begin{pmatrix} \pi_{12} \\ \pi_{13} \\ \dots \\ \pi_{1k} \\ \pi_{23} \\ \dots \\ \pi_{k-1k} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 2.8. *Пусть заданы две кососимметричные матрицы S_1, S_2 и произвольная квадратная матрица X подходящего размера. Тогда равенство $X^T S_1 X = S_2$ равносильно равенству $\widehat{X}^T S_1^{\triangle} = S_2^{\triangle}$.*

Доказательство. Пусть $X = (x_{rt})$, $S_1 = (s^1_{rt})$, $S_2 = (s^2_{rt})$. Тогда элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы $X^T S_1 X$, будет равен $\sum\limits_{k,l} x_{ki} s^1_{kl} x_{lj}$, т.е. равенство $X^T S_1 X = S_2$ равносильно системе равенств $\sum\limits_{k,l} x_{ki} s^1_{kl} x_{lj} = s^2_{ij}$ для различных i, j. Так как матрица S_1 кососимметрична, то $\sum\limits_{k,l} x_{ki} s^1_{kl} x_{lj} = \sum\limits_{k \leqslant l} (x_{ki} x_{lj} - x_{kj} x_{li}) s^1_{kl} = \sum\limits_{k \leqslant l} D_{klij} s_{kl} = s^2_{ij}$. Последнее равенство и есть записанное поэлементно равенство $\widehat{X}^T S_1^{\triangle} = S_2^{\triangle}$. □

2.3. Общий случай локально-комплексной алгебры. Пусть L – локально-комплексная $(k+1)$-мерная алгебра с матрицами $S_i = (\pi_{jki})$, $i \geqslant 1$. Тогда определим матрицу M размера $k \times k(k-1)/2$ всех констант при всех базисных элементах, кроме единичного, следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} \pi_{121} & \pi_{131} & \dots & \pi_{1k1} & \pi_{231} & \dots & \pi_{2k1} & \pi_{341} & \dots & \pi_{k-1k1} \\ \pi_{122} & \pi_{132} & \dots & \pi_{1k2} & \pi_{232} & \dots & \pi_{2k2} & \pi_{342} & \dots & \pi_{k-1k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{12k} & \pi_{13k} & \dots & \pi_{1kk} & \pi_{23k} & \dots & \pi_{2kk} & \pi_{34k} & \dots & \pi_{k-1kk} \end{pmatrix}.$$

Также определим вектор констант при единичном базисном элементе. Пусть $S_0 = (\pi_{lm0})$, тогда обозначим

$$P = \begin{pmatrix} \pi_{120} \\ \pi_{130} \\ \dots \\ \pi_{1k0} \\ \pi_{230} \\ \dots \\ \pi_{k-1k0} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.9. *Локально-комплексные алгебры L_1 и L_2 с соответствующими матрицами $M_1 = (\pi^1_{jki}), P_1 = (\pi^1_{lm0})$ и $M_2 = (\pi^2_{jki}), P_2 = (\pi^2_{lm0})$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая ортогональная матрица X, что выполнена следующая система матричных уравнений:*

$$X M_1 \widehat{X^T} = M_2, \tag{17}$$

$$\widehat{X} P_1 = P_2. \tag{18}$$

Доказательство. Уравнение (18) напрямую получается из уравнения (16) применением утверждения 2.8. Для доказательства уравнения

(17) также воспользуемся утверждением 2.8. Уравнение (15) распадается на следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S_1^2 = x_{11} X S_1^1 X^T + \dots + x_{1k} X S_k^1 X^T \\ S_2^2 = x_{21} X S_1^1 X^T + \dots + x_{2k} X S_k^1 X^T \\ \dots \\ S_k^2 = x_{k1} X S_1^1 X^T + \dots + x_{kk} X S_k^1 X^T. \end{cases}$$

Рассмотрим произвольное уравнение данной системы и перепишем его в виде

$$X^T S_i^2 X = x_{i1} S_1^1 + \dots + x_{ik} S_k^1. \tag{19}$$

Матрицы S_i^2 и $x_{i1} S_1^1 + \dots + x_{ik} S_k^1$ кососимметричны, поэтому применимо утверждение 2.8:

$$(x_{i1} S_1^1 + \dots + x_{ik} S_k^1)^{\triangle} = \begin{pmatrix} \pi_{121}^1 x_{i1} + \pi_{122}^1 x_{i2} + \dots + \pi_{12k}^1 x_{ik} \\ \pi_{131}^1 x_{i1} + \pi_{132}^1 x_{i2} + \dots + \pi_{13k}^1 x_{ik} \\ \dots \\ \pi_{1k1}^1 x_{i1} + \pi_{1k2}^1 x_{i2} + \dots + \pi_{1kk}^1 x_{ik} \\ \pi_{231}^1 x_{i1} + \pi_{232}^1 x_{i2} + \dots + \pi_{23k}^1 x_{ik} \\ \dots \\ \pi_{k-1k1}^1 x_{i1} + \pi_{k-1k2}^1 x_{i2} + \dots + \pi_{k-1kk}^1 x_{ik} \end{pmatrix}$$

$$= M_1^T \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{ik} \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство (19) равносильно равенству

$$\widehat{X}^T S_i^{2\triangle} = M_1^T \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{ik} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Но

$$S_i^{2\triangle} = \begin{pmatrix} \pi_{12i} \\ \pi_{13i} \\ \dots \\ \pi_{1ki} \\ \pi_{23i} \\ \dots \\ \pi_{k-1ki} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\widehat{X}^T S_i^{2\triangle}$ является i-ым столбцом матрицы $\widehat{X}^T M_2^T$, а $M_1^T \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{ik} \end{pmatrix}$ – i-ый столбец матрицы $M_1^T X^T$. Из этого следует, что верно равенство $\widehat{X}^T M_2^T = M_1^T X^T$. Применяя операцию транспонирования, получаем равенство (17). □

Следствие 2.10. *Ортогональная матрица X задает автоморфизм локально-комплексной алгебры L с соответствующими матрицами M и P тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующей системе матричных уравнений:*

$$XM\widehat{X^T} = M, \tag{21}$$

$$\widehat{X}P = P. \tag{22}$$

2.4. Случай трехмерной локально-комплексной алгебры. Заметим, что если рассматриваемые алгебры L_1 и L_2 являются трехмерными, то $\widehat{X} = \det(X)$, и система (17)–(18) может быть решена явно. Если ортогональное преобразование, задаваемое матрицей X, собственное, то равенство (18) выполнено автоматически. Если же преобразование несобственное, то равенство (18) может быть выполнено только в случае $a = 0$, то есть в том случае, когда алгебры L_1 и L_2 являются сопрягаемыми. Рассмотрим трехмерные локально-комплексные алгебры L_1 и L_2 с усеченными таблицами умножения, представленными в таблице 3.

Таблица 3. Таблица умножения алгебры L_j

$*$	e_1	e_2
e_1	-1	$a_j + b_j e_1 + c_j e_2$
e_2	$-a_j - b_j e_1 - c_j e_2$	-1

В случае трехмерных локально-комплексных алгебр система (17)–(18) перепишется в виде следующей системы:

$$\det(X) X M_1 = M_2, \tag{23}$$

$$\det(X) P_1 = P_2. \tag{24}$$

Утверждение 2.11. *Локально-комплексные алгебры L_1 и L_2 изоморфны тогда и только тогда, когда*
(1) $|a_1| = |a_2|$,
(2) $b_1^2 + c_1^2 = b_2^2 + c_2^2$.

Доказательство. Необходимость данных условий очевидна из условий (23)–(24). Действительно, в трехмерном случае $P_i = a_i$, что и влечет условие $|a_1| = |a_2|$. Также ортогональность матрицы X влечет равенство $\|M_1\| = \|M_2\|$, что и представляет собой условие $b_1^2 + c_1^2 = b_2^2 + c_2^2$.

Докажем достаточность. Если $a_1 = 0$, $b_1^2 + c_1^2 = 0$, то локально-комплексная алгебра L_1 коммутативна и не может быть изоморфна никакой другой локально-комплексной алгебре, поэтому в данном случае утверждение доказано. Если $b_1^2 + c_1^2 = 0$ и $a_1 \neq 0$, то уравнение (23) выполнено автоматически. Поэтому в качестве решения системы подойдет любая такая ортогональная матрица X, что $\det(X) = \frac{a_2}{a_1}$. Пусть теперь $b_1^2 + c_1^2 \neq 0$. Покажем, что тогда существует ортогональная матрица X, удовлетворяющая системе (23)–(24). Пусть $a_1 = a_2$, тогда $\det(X) = 1$. Поэтому ищем φ такое, что

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Переписывая данную систему относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, получаем:

$$\begin{pmatrix} b_1 & -c_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

В силу невырожденности матрицы в левой части равенства существует решение системы относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Корректность определения φ следует из условия $b_1^2 + c_1^2 = b_2^2 + c_2^2$. Случай $a_1 = -a_2$ разбирается аналогично. □

Также в трехмерном случае можно классифицировать группы автоморфизмов локально-комплексных алгебр.

Утверждение 2.12.
(1) *При $a = b = c = 0$ $\mathrm{Aut}(L) \cong O(3)$, то есть любая ортогональная матрица является автоморфизмом алгебры L.*

(2) *При* $a = 0$, $b^2 + c^2 \neq 0$ $\mathrm{Aut}\,(L) \cong Z_2$. *Единственным собственным ортогональным преобразованием, задающим автоморфизм алгебры* L, *является единичная матрица, а единственным несобственным ортогональным преобразованием, задающим автоморфизм алгебры* L, *является матрица*

$$X = \begin{pmatrix} \frac{c^2-b^2}{b^2+c^2} & \frac{-2bc}{b^2+c^2} \\ \frac{-2bc}{b^2+c^2} & -\frac{c^2-b^2}{b^2+c^2} \end{pmatrix}.$$

(3) *При* $a \neq 0$, $b = c = 0$ $\mathrm{Aut}\,(L) \cong \mathrm{SO}\,(3)$, *то есть любое собственное ортогональное преобразование является автоморфизмом алгебры* L.
(4) *При* $a \neq 0$, $b^2 + c^2 \neq 0$ *только единичная матрица является автоморфизмом алгебры* L.

Доказательство. Если $b = c = 0$, то уравнение (17) выполнено автоматически. Если к тому же $a = 0$, то также выполнено и уравнение (18). Если же $a \neq 0$, то $\det\,(X) = 1$ является единственным условием существования решения. Это доказывает пункты 1 и 3. Если $b^2 + c^2 \neq 0$, то система уравнений (17)–(18) может быть записана следующим образом:

$$\det\,(X)a = a, \tag{27}$$

$$X \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \det\,(X) \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Предположим сначала, что преобразование X собственное. Используя явный вид X, систему (27)–(28) перепишем в виде

$$b = b\cos\varphi - c\sin\varphi, \tag{29}$$

$$c = b\sin\varphi + c\cos\varphi. \tag{30}$$

Если $b = 0$, $c \neq 0$, то $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Если $c = 0$, $b \neq 0$, то $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Если $b, c \neq 0$, то из (29), (30) получаем, что

$$\frac{b}{c} = \frac{-\sin\varphi}{1-\cos\varphi}, \tag{31}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{32}$$

Приравнивая правые части уравнений (31) и (32), получаем, что $1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi = -\sin^2\varphi$, откуда $\cos\varphi = 1$. Это доказывает, что единственным возможным собственным ортогональным преобразованием

при всевозможных a, b, c таких, что $b^2 + c^2 \neq 0$, осуществляющим автоморфизм, является только тождественное преобразование.

Если ортогональное преобразование X несобственное, то тогда система уравнений (27)–(28) перепишется в виде

$$a = 0, \tag{33}$$

$$b = -b\cos\varphi - c\sin\varphi, \tag{34}$$

$$c = -b\sin\varphi + c\cos\varphi. \tag{35}$$

Если $b = 0$, $c \neq 0$, то из уравнений (34), (35) следует, что $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Если $c = 0$, $b \neq 0$, то аналогично следует, что $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$. Если же $b \neq 0$, $c \neq 0$, то получаем, что уравнения (34) и (35) равносильны. Решая уравнение (34), находим, что

$$-\frac{b}{c} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{36}$$

Таким образом, $\cos\varphi = \frac{c^2-b^2}{b^2+c^2}$, $\sin\varphi = \frac{-2bc}{b^2+c^2}$. Заметим, что эти формулы работают также и для случаев, когда либо $b = 0$, либо $c = 0$. □

§3. Обратная задача

В данном параграфе будем считать матрицу X (а следовательно, и матрицу $\widehat{X}$) в системе уравнений (17)–(18) известной, а матрицу M и столбец P – неизвестными. В этом случае система уравнений (17)–(18) всегда имеет тривиальное решение $M = 0$, $P = 0$. В этом параграфе нас будет интересовать существование нетривиальных решений.

Утверждение 3.1. *Пусть задано матричное уравнение $AX = XB$, где A, B – известные квадратные матрицы, а X – некая неизвестная матрица подходящего размера. Тогда данное уравнение имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{spec}(A) \bigcap \operatorname{spec}(B) \neq \varnothing$. *Матрица решения данного уравнения X является невырожденной тогда и только тогда, когда* $\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}(B)$ *с учетом кратностей собственных значений матриц A и B.*

Доказательство [5, с. 202, теорема 1]. □

Следствие 3.2. *Для уравнения* (17) *относительно неизвестной матрицы M нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда для каких-либо индексов p, q, r, $p \neq q$, выполнено $\lambda_p\lambda_q = \lambda_r$, где $\lambda_i \in \operatorname{spec}(X)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Доказательство. Очевидно из предыдущего утверждения и утверждения 2.7(6). □

Теорема 3.3.
(1) *Для любой ортогональной матрицы X существует нетривиальная локально-комплексная алгебра L, для которой матрица X задает автоморфизм.*
(2) *Для ортогональной матрицы X существует нетривиальная сопрягаемая локально-комплексная алгебра L, для которой матрица X задает автоморфизм тогда и только тогда, когда для каких-либо индексов p, q, r, $p \neq q$ выполнено $\lambda_p \lambda_q = \lambda_r$, где $\lambda_i \in \operatorname{spec}(X)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Доказательство. Если локально-комплексная алгебра L является сопрягаемой, то уравнение (18) выполнено автоматически. Используя следствие 2.14, заключаем, что нетривиальная сопрягаемая локально-комплексная алгебра L, для которой матрица X задает автоморфизм, существует тогда и только тогда, когда для каких-либо индексов p, q, r, $p \neq q$, выполнено $\lambda_p \lambda_q = \lambda_r$, где $\lambda_i \in \operatorname{spec}(X)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Для доказательства первого утверждения достаточно предъявить нетривиальную локально-комплексную алгебру L, для которой матрица X будет задавать автоморфизм. Для этого положим $M = 0$, тогда уравнение (17) выполнено. Если также $1 \in \operatorname{spec}(\widehat{X})$, то утверждение доказано. Действительно, положим вектор P равным собственному вектору, соответствующему собственному значению 1. Пусть теперь $1 \notin \operatorname{spec}(\widehat{X})$. Это означает, что спектр матрицы X не содержит более одного собственного значения равного как 1, так и -1. Также спектр матрицы X не может содержать двух комплексно-сопряженных значений, иначе в произведении они бы давали 1. Таким образом, матрица X представляет собой несобственное двумерное преобразование и параметризуется неким углом φ. Также, очевидно, для любого φ найдутся такие константы $b, c, b^2 + c^2 \neq 0$, что $\cos\varphi = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}$, $\sin\varphi = \frac{-2bc}{c^2 + b^2}$. Но тогда по утверждению 2.12 получаем, что несобственное преобразование, задаваемое с помощью такого угла φ, будет являться автоморфизмом локально-комплексной алгебры с коэффициентами b, c при базисных элементах e_1 и e_2 соответственно. □

§4. Инварианты локально-комплексных алгебр

В этом параграфе исследуются необходимые условия изоморфности локально-комплексных алгебр, которые могут быть выражены с помощью соответствующих данным локально-комплексным алгебрам матриц M и P. Чтобы формально определить классы изоморфности локально-комплексных алгебр на множестве $M(k) \times P(k)$, где $M(k) \in M_{k,\frac{k(k-1)}{2}}(\mathbb{R})$, $P(k) \in M_{\frac{k(k-1)}{2},1}(\mathbb{R})$, можно ввести следующее отношение эквивалентности.

Определение 4.1. $(M_1, P_1) \sim (M_2, P_2)$, *если существует такая ортогональная матрица* X, *что выполнены условия* (17)–(18).

Данное определение, очевидно, корректно. Классы эквивалентности пар на $M(k) \times P(k)$ будем обозначать как $(M(k) \times P(k))/\sim$.

Следствие 4.2. $((M(3) \times P(3))/\sim) \simeq R^2_+$.

Доказательство. Из утверждения 2.11 получаем, что трехмерная локально-комплексная алгебра задается двумя неотрицательными числами $|a|$ и b^2+c^2, при этом алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда данные числа для них совпадают. □

Утверждение 4.3. *Если локально-комплексные алгебры* L_1 *и* L_2 *изоморфны, то* $\|P_1\| = \|P_2\|$ *и* $\|M_1P_1\| = \|M_2P_2\|$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из равенства (18). Второе доказывается следующим образом. Домножим равенство (17) на P_1 справа и подставим условие (18). Тогда получим $XM_1P_1 = M_2\widehat{X}P_1 = M_2P_2$. Из ортогональности матрицы X следует, что $\|M_1P_1\| = \|M_2P_2\|$. □

Утверждение 4.4. *Если локально-комплексные алгебры* L_1 *и* L_2 *изоморфны, то сингулярные значения матриц* M_1 *и* M_2 *совпадают.*

Доказательство. Очевидно, что умножение на ортогональную матрицу не меняет сингулярных значений матрицы. Поэтому, так как матрица X, а следовательно и $\widehat{X}$, ортогональна, данное утверждение автоматически следует из равенства (17). □

Условие совпадения сингулярных значений матриц M_1 и M_2 является достаточно сильным для того, чтобы по двум заданным локально-комплексным алгебрам заключить, что они неизоморфны. В случае

трехмерной локально-комплексной алгебры данное условие также является и достаточным. Тем не менее, данное условие не является достаточным даже для случая сопрягаемых локально-комплексных алгебр большей размерности. Для того, чтобы это показать для четырехмерных локально-комплексных алгебр, перепишем систему (17)–(18) в специальном для этого случая виде.

Утверждение 4.5. *Если* $X \in O_3(\mathbb{R})$, *то* $\widehat{X} = \det(X)UXU$, *где* $U = E_{13} - E_{22} + E_{31}$.

Доказательство. Проверим данное равенство явно. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} U\widehat{X}U &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21} & x_{11}x_{23}-x_{13}x_{21} & x_{12}x_{23}-x_{13}x_{22} \\ x_{11}x_{32}-x_{12}x_{31} & x_{11}x_{33}-x_{13}x_{31} & x_{12}x_{33}-x_{13}x_{32} \\ x_{21}x_{32}-x_{22}x_{31} & x_{21}x_{33}-x_{23}x_{31} & x_{22}x_{33}-x_{23}x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{33} & -A_{32} & A_{31} \\ -A_{23} & A_{22} & -A_{21} \\ A_{13} & -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \det(X)X^{T^{-1}} = \det(X)X. \end{aligned} \tag{37}$$

Исходя из последнего утверждения, в случае если локально-комплексная алгебра является четырехмерной, система (17)–(18) перепишется в виде

$$X(M_1U) = \det(X)(M_2U)X, \tag{38}$$

$$X(UP_1) = \det(X)(UP_2). \tag{39}$$

□

Пример. Рассмотрим сопрягаемые трехмерные локально-комплексные алгебры L_1 и L_2 с матрицами M_1 и M_2 такими, что матрицы M_1U и M_2U являются невырожденными (для этого достаточно взять невырожденные матрицы M_1 и M_2). В этом случае равенство (39) тривиально выполнено, а $\det(X) = 1$ согласно утверждению 2.13. Действительно, если бы $\det(X) = -1$, то из того, что уравнение (38) имеет решение, следовало бы, что матрицы M_1U и M_2U имеют нулевое собственное значение, что противоречит их невырожденности. Таким образом, получаем, что необходимо, чтобы $\operatorname{spec}(M_1U) = \operatorname{spec}(M_2U)$. Это, в свою очередь, не всегда верно при совпадении сингулярных

значений матриц M_1 и M_2, что показывает следующий пример. Пусть $M_1 = E = E_{11} + E_{22} + E_{33}$, а $M_2 = -E_{11} + E_{22} + E_{33}$. Очевидно, что сингулярные значения матриц M_1 и M_2 совпадают. В то же время, $\operatorname{spec}(M_1U) = \operatorname{spec}(U) = \{-1, -1, 1\}$, а характеристический многочлен матрицы M_2U в этом случае равен $-(1+\lambda)(1+\lambda^2)$, откуда заключаем, что $\operatorname{spec}(M_1U) \neq \operatorname{spec}(M_2U)$.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, внимание к работе, ценные обсуждения, советы и замечания по материалу, изложенному в статье.

Литература

1. M. Bresar, P. Šemrl, Š. Špenko, *On locally complex algebras and low-dimensional Cayley–Dickson algebras.* — J. Algebra **1**, No. 1 (2011), 107–125.
2. M. Mitrouli, C. Koukouvinos, *On the computation of the Smith normal form of compound matrices.* — Numer. Algorithms **16** (1997), 95–105.
3. A. C. Aitken, *Determinants and Matrices.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1967.
4. M. Marcus, *Finite Dimensional Multilinear Algebra.* Marcel Dekker, New York, 1973–1975.
5. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1967.

Smirnov A. S. Isomorphism classes and automorphisms of locally-complex algebras.

Locally-complex algebras, introduced by M. Bresar, P. Šemrl, and Š. Špenko, provide a generalization of Cayley–Dickson algebras to the case of arbitrary dimensions. The paper considers the isomorphic classes of locally-complex algebras and their automorphism groups. As a characterization of the isomorphism classes, a system of cpecific matrix equations is used. This system allows one to derive a few necessary conditions for locally-complex algebras to be isomorphic. Also classifications of locally-complex algebras of dimension three and of their automorphism groups are presented.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: AlSmirnov@nes.ru

Поступило 21 октября 2013 г.