Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ДЛЯ ДВУХ СТАРШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЛАПЛАСИАНА

§1. Введение

Пусть G – (простой) граф с n вершинами, которые обозначаются через $1, \dots, n$. Через d_i обозначается степень вершины i, $i = 1, \dots, n$. Степени вершин, занумерованные в порядке невозрастания, обозначаются через $\Delta_1 \geqslant \dots \geqslant \Delta_n$. Максимальная и минимальная степени вершин также обозначаются через Δ и δ соответственно; $\bar{d} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} d_i\right)/n$ – средняя степень вершин графа. Запись $i \sim j$ означает, что вершины i и j являются смежными.

Через $D_G = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ и A_G обозначаются диагональная матрица степеней вершин и матрица смежности графа G. Матрицы $L_G = D_G - A_G$ и $Q_G = D_G + A_G$ называются лапласианом и положительным (signless) лапласианом графа G. Собственные значения этих матриц нумеруются в порядке невозрастания и обозначаются через $\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_n$ и $q_1 \geqslant \dots \geqslant q_n$ соответственно. Полный граф порядка n обозначается через K_n.

В последнее время изучению собственных значений положительного лапласиана Q_G было посвящено большое количество работ, см., например, [3–6, 9, 11] и ссылки в них. В этой статье мы главным образом рассматриваем два старших собственных значения положительного лапласиана Q_G.

Статья построена следующим образом. В §2 устанавливается новая верхняя оценка для наибольшего собственного значения q_1 матрицы Q_G. С использованием этой оценки мы также получаем новые верхние оценки для разности собственных значений $q_1 - \mu_1$ и для наибольшего собственного значения матрицы смежности A_G. В §3 выводятся новые нижние оценки для второго по величине собственного значения

Ключевые слова: граф, матрица смежности, лапласиан, положительный (signless) лапласиан, наибольшее собственное значение, второе по величине собственное значение, верхняя оценка, нижняя оценка.

q_2. Также доказывается соответствующая верхняя оценка для разности двух старших собственных значений $q_1 - q_2$ положительного лапласиана.

В работе используются следующие обозначения:
• I_n – единичная матрица порядка $n \geqslant 1$;
• e_i – i-й столбец матрицы I_n, $i = 1, \dots, n$;
• $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ – единичный вектор;
• $J_n = ee^T$;
• собственные значения эрмитовой матрицы $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, нумеруются в порядке невозрастания, т.е.

$$\lambda_{\max}(A) = \lambda_1(A) \geqslant \dots \geqslant \lambda_n(A) = \lambda_{\min}(A);$$

• для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$,

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

– абсолютные строчные суммы матрицы A.

В завершение этого параграфа мы напоминаем классическую теорему Фробениуса, см., например, [10, Chapter II, Section 2.1, Theorem 1.1], которая является ключом к выводу многих оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы.

Теорема 1.1 (**Теорема Фробениуса**). *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(A).$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в каждом из неравенств имеет место тогда и только тогда, когда все строчные суммы A равны.

§2. Верхние оценки для q_1

Для начала напомним одну простую, но нетривиальную верхнюю оценку для старшего собственного значения q_1 положительного лапласиана $Q_G = (q_{ij})$, которая немедленно следует из более общей теоремы 4.7 работы [4] (см. также [5, Theorem 4.2]). Условия равенства для рассматриваемого частного случая были установлены в [6, Corollary 2.6].

Теорема 2.1. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$q_1 \leqslant \Delta_1 + \Delta_2. \tag{2.1}$$

Кроме того, если граф G связен, то равенство в (2.1) *имеет место тогда и только тогда, когда G либо регулярный граф, либо звезда S_n.*

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, обобщающая и уточняющая теорему 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$. Предположим, что для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant n/2$,*

$$\Delta_{k+1} \geqslant 2k - 1. \tag{2.2}$$

Тогда справедлива верхняя оценка

$$q_1 \leqslant \Delta_1 + \Delta_{k+1}. \tag{2.3}$$

Кроме того, если граф G связен, то равенство в (2.3) *имеет место тогда и только тогда, когда либо граф G является регулярным, либо выполнены следующие условия*:

$$\Delta_1 = \cdots = \Delta_k = n - 1 \quad \text{и} \quad \Delta_{k+1} = \cdots = \Delta_n = 2k - 1. \tag{2.4}$$

Доказательство. Заметим сперва, что если $\Delta_{k+1} = \Delta_1$, то оценка (2.3) сводится к оценке Фробениуса $q_1 \leqslant 2\Delta_1$, и, если граф G связен, равенство имеет место тогда и только тогда, когда G – регулярный граф.

Далее мы рассматриваем тот случай, когда $\Delta_{k+1} < \Delta_1$.

Не теряя общности, можно предполагать, что вершины G занумерованы таким образом, что $\Delta_i = d_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Введем в рассмотрение сопряженную матрицу $M = D^{-1} Q_G D$, где

$$D = \begin{bmatrix} xI_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}, \quad x > 1.$$

Тогда для $1 \leqslant i \leqslant k$ мы выводим:

$$\begin{aligned} r_i(M) &= \Delta_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} q_{ij} + \frac{\Delta_i - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} q_{ij}}{x} \\ &= \Delta_i\,(1+1/x) + (1-1/x)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} q_{ij} \\ &\leqslant \Delta_1\,(1+1/x) + (1-1/x)(k-1) \\ &= \Delta_1 + (k-1) + \frac{\Delta_1 - (k-1)}{x}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для $i = k+1, \ldots, n$ мы имеем

$$\begin{aligned} r_i(M) &= x\sum_{j=1}^{k} q_{ij} + 2\Delta_i - \sum_{j=1}^{k} q_{ij} \\ &= 2\Delta_i + (x-1)\sum_{j=1}^{k} q_{ij} \\ &\leqslant 2\Delta_{k+1} + (x-1)k. \end{aligned}$$

Мы намерены найти такое значение $x > 1$, для которого

$$\Delta_1 + (k-1) + \frac{\Delta_1 - (k-1)}{x} \leqslant \Delta_{k+1} + \Delta_1 \tag{2.5}$$

и, одновременно,

$$2\Delta_{k+1} + (x-1)k \leqslant \Delta_{k+1} + \Delta_1. \tag{2.6}$$

В этом случае мы будем иметь $r_i(M) \leqslant \Delta_{k+1} + \Delta_1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и требуемая оценка (2.3) будет справедлива в силу теоремы Фробениуса.

Условия (2.5) и (2.6) равносильны соотношениям

$$x \geqslant 1 + \frac{\Delta_1 - \Delta_{k+1}}{\Delta_{k+1} - (k-1)} \quad \text{и} \quad x \leqslant 1 + \frac{\Delta_1 - \Delta_{k+1}}{k}$$

соответственно, и нужное значение x существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_{k+1}}{\Delta_{k+1} - (k-1)} \leqslant \frac{\Delta_1 - \Delta_{k+1}}{k}. \tag{2.7}$$

Поскольку, очевидно, (2.7) равносильно (2.2), то первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем к рассмотрению случая равенства, предполагая, что граф G связен и что $\Delta_1 > \Delta_{k+1}$. В этом случае из теоремы Фробениуса вытекает, что

$$q_1 = \Delta_{k+1} + \Delta_1$$

тогда и только тогда, когда

$$r_1(M) = \cdots = r_n(M) = \Delta_{k+1} + \Delta_1.$$

Но, как следует из приведенного выше доказательства, последние условия выполнены тогда и только тогда, когда $\Delta_{k+1} = \cdots = \Delta_n$, $q_{ij} = 1$ для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k$, и соотношение (2.7) является равенством, т.е. $\Delta_{k+1} = 2k - 1$. Остается заметить, что, в силу симметрии матрицы Q_G, все внедиагональные элементы в первых k столбцах матрицы Q_G равны 1 тогда и только тогда, когда $\Delta_i = n-1$ при $i = 1, \ldots, k$.

Теорема доказана. □

Заметим, что при $k = 1$ условие (2.2) сводится к соотношению $\Delta_2 \geqslant 1$, которое выполнено для любого графа, имеющего хотя бы одно ребро, и оценка (2.3) совпадает с оценкой теоремы 2.1. Естественно, условия равенства для $k = 1$ в обеих теоремах одинаковы.

Из теоремы 2.2 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$q_1 \leqslant \Delta_1 + \min_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}. \tag{2.8}$$

Кроме того, если граф G связен, то (2.8) *является равенством тогда и только тогда, когда либо G – регулярный граф, либо при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant n/2$, выполнены условия* (2.4).

Поскольку, как хорошо известно (и легко следует из соотношения $Q_G = D_G + A_G$),

$$\lambda_i(A_G) \leqslant q_i/2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

из следствия 2.1 мы получаем следующую верхнюю оценку для наибольшего собственного значения матрицы смежности A_G.

Следствие 2.2. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\lambda_1(A_G) \leqslant \{\Delta_1 + \min_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}\}/2. \tag{2.9}$$

Кроме того, если граф G связен, то (2.9) *является равенством тогда и только тогда, когда G – регулярный граф.*

Доказательство. Доказательства требует только утверждение, касающееся случая равенства. Ясно, что (2.9) является равенством тогда и только тогда, когда (2.8) является равенством и $\lambda_1(A_G) = q_1/2$. По следствию 2.1, (2.8) является равенством тогда и только тогда, когда либо граф G регулярный, либо выполнены условия (2.4). Но в последнем случае (см. [1]) мы имеем

$$\begin{aligned}\rho(A_G) &= \rho\left(\begin{bmatrix} k-1 & n-k \\ k & k-1 \end{bmatrix}\right) = k-1+\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & n-k \\ k & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= k-1+\sqrt{k(n-k)},\end{aligned}$$

и равенство

$$k-1+\sqrt{k(n-k)} = (\Delta_{k+1}+\Delta_1)/2$$

справедливо тогда и только тогда, когда $k = n/2$, т.е. $\Delta_{k+1} = n-1 = \Delta_1$. □

В заключение этого параграфа мы докажем верхнюю оценку, выдвинутую в качестве гипотезы в [5, Conjecture 10], естественно, вместе с соответствующими условиями для случая равенства. На самом деле, в приводимых ниже теоремах 2.3 и 2.4 установлены более сильные результаты.

Теорема 2.3. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда*

$$q_1 - \mu_1 \leqslant \Delta_2 - 1 \leqslant \Delta_1 - 1 \leqslant n-2, \tag{2.10}$$

где $\mu_1 = \lambda_1(L_G)$ – наибольшее собственное значение лапласиана $L_G = D_G - A_G$.

Кроме того, если граф G связен, то верны следующие утверждения:

(i) $q_1 - \mu_1 = \Delta_2 - 1$ *тогда и только тогда, когда $G = K_n$ или $G = S_n$;*

(ii) $q_1 - \mu_1 = \Delta_1 - 1$ *тогда и только тогда, когда $G = K_n$;*

(iii) $q_1 - \mu_1 = n-2$ *тогда и только тогда, когда $G = K_n$.*

Доказательство. Поскольку, по теореме 2.1,

$$q_1 \leqslant \Delta_1 + \Delta_2$$

и поскольку, по теореме Мерриса (см. [9]),

$$\mu_1 \geqslant \Delta_1 + 1, \tag{2.11}$$

то все неравенства в (2.10) имеют место.

Пусть теперь граф G связен.

(i) Если $q_1 - \mu_1 = \Delta_2 - 1$, то мы необходимо имеем $q_1 = \Delta_1 + \Delta_2$ и $\mu_1 = \Delta_1 + 1$. В силу теоремы 2.1, из первого соотношения следует, что G – либо регулярный граф, либо звезда S_n, тогда как из второго соотношения следует (см. [9]), что $\Delta_1 = n - 1$. Следовательно, либо $G = K_n$, либо $G = S_n$. Обратно, если $G = K_n$, то $\mu_1 = n$, $q_1 = 2n - 2$ и $q_1 - \mu_1 = n - 2 = \Delta_2 - 1$. Если же $G = S_n$, то $q_1 = \mu_1 = n$ и $q_1 - \mu_1 = 0 = \Delta_2 - 1$.

(ii) Если $q_1 - \mu_1 = \Delta_1 - 1$, то тем более $q_1 - \mu_1 = \Delta_2 - 1$ и $\Delta_1 = \Delta_2$. Итак, из (i) следует, что $G = K_n$. Обратное утверждение очевидно.

(iii) Если $q_1 - \mu_1 = n - 2$, то необходимо $q_1 - \mu_1 = \Delta_1 - 1$, так что $G = K_n$ в силу (ii). Обратное утверждение тривиально.

Теорема доказана. □

Если вместо теоремы 2.1 воспользоваться следствием 2.1, то теорему 2.3 можно усилить следующим образом.

Теорема 2.4. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда*

$$q_1 - \mu_1 \leqslant \min_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1} - 1. \tag{2.12}$$

Кроме того, если граф G связен, то соотношение (2.12) *является равенством тогда и только тогда, когда либо G есть полный граф K_n, либо при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant n/2$, для G выполняются условия* (2.4).

Доказательство. Неравенство (2.12) немедленно вытекает из следствия 2.1 и из (2.11).

Если (2.12) является равенством, то, в силу следствия 2.1, либо граф G регулярен, либо выполнены условия (2.4). С другой стороны, поскольку $\mu_1 = \Delta_1 + 1$, то мы необходимо имеем (см. [9]) $\Delta_1 = n - 1$. Тем самым необходимость установлена.

Для доказательства достаточности заметим сперва, что при $G = K_n$ соотношение (2.12) очевидно является равенством. Наконец, если выполнены условия (2.4), то $\Delta_1 = n - 1$ и, по теореме 2.2 и теореме Мерриса, мы имеем

$$q_1 - \mu_1 = [(n-1) + (2k-1)] - n = 2k - 2 = \Delta_{k+1} - 1,$$

так что (2.12) является равенством. □

§3. Оценки для q_2

Напомним некоторые известные оценки для второго собственного значения q_2 положительного лапласиана Q_G.

Как было показано в работе [3],

$$q_2 \leqslant n - 2, \tag{3.1}$$

причем равенство имеет место только для $G = K_n$. Неравенство (3.1) непосредственно следует из того факта, что (в смысле квадратичных форм)

$$Q_G \leqslant Q_{K_n} = (n-2)I_n + J_n,$$

откуда вытекает, что

$$q_2(G) \leqslant q_2(K_n) = n - 2.$$

В работе [6] Дас установил оценку

$$q_2 \geqslant \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \sqrt{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 4}}{2}. \tag{3.2}$$

В качестве следствия (3.2) им была получена более простая оценка

$$q_2 \geqslant \Delta_2 - 1 \tag{3.3}$$

и показано, что если $q_2 = \Delta_2 - 1$, то в G есть по крайней мере две вершины степени Δ_1 и все такие вершины являются попарно смежными. Здесь представляется уместным отметить, что для $\mu_2 = \lambda_2(L_G)$ известна нижняя оценка $\mu_2 \geqslant \Delta_2$ (см. [8]), которая больше, чем оценка (3.3) для q_2.

Также в работе [6] было доказано, что

$$q_2 \geqslant \bar{d} - 1 \tag{3.4}$$

и что (3.4) является равенством тогда и только тогда, когда G – это полный граф K_n.

Заметим, что ни одна из оценок (3.3) и (3.4) не следует из другой, и каждая из них оказывается точнее другой для некоторых графов.

Например, для $G = S_n$ при $n \geqslant 3$ имеем $\bar{d} = 2 - \frac{2}{n} > \Delta_2 = 1$, тогда как для графа G с положительным лапласианом

$$Q_G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

выполняется противоположное неравенство $\bar{d} = 2.5 < \Delta_2 = 3$.

Заметим, что как из (3.3), так и из (3.4) следует, что в соответствии с [5, Conjecture 15]

$$q_2 \geqslant \delta - 1. \tag{3.5}$$

Для полного графа K_n оценка (3.5), очевидно, является равенством. Однако для $G \neq K_n$ в работе [11] оценка (3.5) была улучшена до оценки

$$q_2 \geqslant \delta \tag{3.6}$$

и были описаны случаи равенства.

В связи с q_2 уместно также упомянуть следующую гипотезу [5, Conjecture 22]: при $n \geqslant 4$,

$$q_1 - q_2 \leqslant n, \tag{3.7}$$

причем (3.7) является равенством тогда и только тогда, когда $G = K_n$.

Эта гипотеза была доказана в [6, Theorem 5.8].

Как легко видеть, верхняя оценка в (2.1) и нижняя оценка (3.3) позволяют немедленно получить следующее уточнение оценки (3.7):

$$q_1 - q_2 \leqslant \Delta_1 + 1. \tag{3.8}$$

Далее мы приводим некоторые новые нижние оценки для q_2.

Теорема 3.1. *Пусть G – граф порядка $n \geqslant 2$, имеющий по крайней мере одно ребро. Тогда*

$$q_2 \geqslant \frac{n\bar{d} - \Delta_1 - \min\limits_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}}{n-1}. \tag{3.9}$$

Кроме того, если граф G связен, то (3.9) *является равенством тогда и только тогда, когда G – полный граф K_n.*

Доказательство. Используя верхнюю оценку (2.8), мы выводим:

$$n\bar{d} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \operatorname{tr} Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \leqslant \sum_{i \geqslant 2} q_i + (\Delta_1 + \min_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1})$$
$$\leqslant (n-1)q_2 + \Delta_1 + \min_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1},$$

откуда и следует (3.9).

Рассмотрим случай равенства. Сперва предположим, что граф G связен и что

$$q_2 = \frac{n\bar{d} - \Delta_1 - \min\limits_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}}{n-1}. \tag{3.10}$$

В этом случае из доказательства (3.9) следует, что

$$q_2 = \cdots = q_n \tag{3.11}$$

и что

$$q_1 = \Delta_1 + \min_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}. \tag{3.12}$$

По следствию 2.1, равенство (3.12) имеет место тогда и только тогда, когда либо граф G регулярен, либо выполнены условия (2.4).

Если G – Δ-регулярный граф, то у положительного лапласиана Q_G имеется главная подматрица вида $\begin{bmatrix} \Delta & 1 \\ 1 & \Delta \end{bmatrix}$, и, в силу теоремы Коши (см., например, [7, Theorem 4.3.15]) и (3.11), мы имеем

$$q_2 = \cdots = q_n \leqslant \lambda_{min}\left(\begin{bmatrix} \Delta & 1 \\ 1 & \Delta \end{bmatrix}\right) = \Delta - 1. \tag{3.13}$$

Теперь из (3.10) и (3.13) вытекает, что

$$\frac{n\bar{d} - \Delta_1 - \min\limits_{\substack{k \geqslant 1: \\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}\Delta \leqslant \Delta - 1,$$

откуда $\Delta \geqslant n-1$. Поскольку, очевидно, $\Delta \leqslant n-1$, мы заключаем, что $\Delta = n-1$, т.е. G – полный граф K_n.

Обратно, если G – полный граф порядка n, то (3.10) верно тривиальным образом.

Остается показать, что из условий (2.4) и соотношений (3.11) следует, что граф G должен быть полным.

Если $k = 1$, то условия (2.4) означают, что $G = S_n$. В этом случае либо $n = 2$ и $G = K_n$, либо $n \geqslant 3$, $q_1 = n$, $q_2 = \cdots = q_{n-1} = 1$ и $q_n = 0$, так что условия (3.11) не выполнены.

Пусть теперь $k \geqslant 2$. Тогда, очевидно, $n \geqslant 4$. В этом случае, с одной стороны, в силу (3.11) и теоремы Коши, мы имеем

$$q_2 = \cdots = q_n \leqslant \lambda_2 \left(\begin{bmatrix} n-1 & 1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix} \right) = n-2,$$

а, с другой стороны, в силу той же теоремы Коши,

$$q_2 \geqslant \lambda_2 \left(\begin{bmatrix} n-1 & 1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix} \right) = n-2.$$

Но из двух последних неравенств необходимо следует, что $q_2 = n-2$, так что $G = K_n$.

Теорема доказана. □

Заметим, что для связного Δ-регулярного графа G, где $\Delta < n-1$, оценка теоремы 3.1 дает

$$q_2 > \frac{n-2}{n-1}\Delta \geqslant \Delta - 1, \quad 1 \leqslant \Delta \leqslant n-1.$$

Поэтому для регулярного графа $G \neq K_n$ оценка (3.9) является более точной, чем совпадающие в этом случае оценки (3.3)–(3.5).

Замечание 3.1. При доказательстве теоремы 3.1 был установлен следующий полезный факт: если граф G порядка $n \geqslant 3$ является Δ-регулярным ($\Delta \geqslant 1$), то равенство $q_2 = q_n$ имеет место тогда и только тогда, когда G – полный граф K_n. Следовательно, если G – связный Δ-регулярный граф порядка $n \geqslant 3$, причем $\Delta \neq n-1$, то у положительного лапласиана Q_G имеется по крайней мере три различных собственных значения $q_1 > q_2 > q_n$.

Рассуждения, использованные в теореме 3.1 при доказательстве равенства $q_2 = n-2$, легко обобщаются на общий случай эрмитовых матриц, для которых имеют место представленные ниже результаты.

Предложение 3.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – эрмитова матрица и пусть при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеют место равенства*

$$\lambda_i(A) = \cdots = \lambda_n(A).$$

Тогда для $j = i, \dots, n$ и для каждой главной подматрицы A_j порядка j матрицы A справедливо соотношение

$$\lambda_j(A) = \lambda_{\min}(A_j).$$

Доказательство. Очевидно, нам достаточно показать, что $\lambda_i(A) = \lambda_{\min}(A_i)$ для каждой главной подматрицы A_i порядка i. Действительно, по теореме Коши, с одной стороны,

$$\lambda_i(A) \geqslant \lambda_i(A_i) = \lambda_{\min}(A_i),$$

но, с другой стороны,

$$\lambda_i(A) = \lambda_{\min}(A) \leqslant \lambda_{\min}(A_i),$$

откуда и следует требуемое равенство. □

Из предложения 3.1 мы немедленно получаем следующий результат.

Следствие 3.1. *В условия предложения 3.1 для всех $j = i, \dots, n$ наименьшие собственные значения всех главных подматриц порядка j совпадают с $\lambda_{\min}(A)$.*

Применяя предложение 3.1 к матрице $-A$, мы приходим к следующему парному утверждению.

Предложение 3.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – эрмитова матрица и пусть при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеют место равенства*

$$\lambda_1(A) = \dots = \lambda_i(A).$$

Тогда для $j = 1, \dots, i$ и для каждой главной подматрицы A_{n-j+1} порядка $n - j + 1$ матрицы A справедливо соотношение

$$\lambda_j(A) = \lambda_{\max}(A_{n-j+1}).$$

Следствие 3.2. *В условиях предложения 3.2 для всех $j = 1, \dots, i$ наибольшие собственные значения всех главных подматриц A порядка $n - j + 1$ совпадают с $\lambda_{\max}(A)$.*

Используя совместно следствие 2.1 и теорему 3.1, мы приходим к следующему результату.

Следствие 3.3. *Для графа G порядка $n \geqslant 2$, имеющего хотя бы одно ребро, верно неравенство*

$$q_1 - q_2 \leqslant \frac{n}{n-1}(\Delta_1 + \min_{\substack{k \geqslant 1:\\ 2k-1 \leqslant \Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1} - \bar{d}). \tag{3.14}$$

Кроме того, если граф G связен, то (3.14) *является равенством тогда и только тогда, когда G есть полный граф K_n.*

Заметим, что в том случае, когда $\bar{d} > \min\limits_{\substack{k\geqslant 1:\\ 2k-1\leqslant\Delta_{k+1}}} \Delta_{k+1}$, оценка (3.14) является более точной, чем обе оценки (3.8) и (3.7).

Последняя теорема этого параграфа дает нижнюю оценку для q_2, которая выражается в терминах степеней вершин d_i, $i = 1, \ldots, n$, и при этом явно зависит от шаблона связности графа G.

Теорема 3.2. *Для связного графа G порядка $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$q_2 \geqslant \max_{i\lneqq j} \{\min\{d_i,\ d_j\} - \delta_{ij}\}, \tag{3.15}$$

где $\delta_{ij} = 1$, если $i \sim j$, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае.

Доказательство. Поскольку граф G связен, матрица Q_G неприводима, и, по теореме Перрона–Фробениуса (см., например, [2, Chapter 2, Theorem 1.4]), ее правый перроновский вектор $x = (x_i)$ положителен. Обозначим

$$y_{ij} = -x_j e_i + x_i e_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,$$

и заметим, что $y_{ij} \perp x$ для всех $i \neq j$. Следовательно, по теореме Куранта–Фишера (см., например, [7, Chapter 4, Theorem 4.2.2]), мы имеем

$$q_2 \geqslant \frac{y_{ij}^T Q_G y_{ij}}{y_{ij}^T y_{ij}} = \frac{d_i x_i^2 + d_j x_j^2 - 2x_i x_j \delta_{ij}}{x_i^2 + x_j^2} \geqslant \min\{d_i,\ d_j\} - \delta_{ij},$$

откуда и следует (3.15). □

Отметим, что для полного графа K_n оценка (3.15) дает $q_2 \geqslant n - 2$ и является точной. С другой стороны, для связного графа G, не являющегося полным, из теоремы 3.2 легко следует оценка (3.6). Ниже мы приводим некоторые другие следствия теоремы 3.2.

Следствие 3.4. *Для связного Δ-регулярного графа G порядка $n \geqslant 2$, где $\Delta \leqslant n - 2$, справедлива нижняя оценка*

$$q_2 \geqslant \bar{d}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Поскольку $G \neq K_n$, можно найти несмежные вершины $i \nsim j$, для которых $\delta_{ij} = 0$. Для завершения доказательства остается применить теорему 3.2 и заметить, что $d_i = d_j = \bar{d} = \Delta$. □

Отметим, что в частном случае регулярных графов, не являющихся полными, оценка (3.16) улучшает общую оценку (3.4).

Следствие 3.5. *Для связного графа G порядка $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$q_2 \geqslant \Delta_2 - \gamma_{12}, \tag{3.17}$$

где $\gamma_{12} = 1$, если каждая вершина степени Δ_2 смежна с некоторой вершиной наибольшей степени, и $\gamma_{12} = 0$ в противном случае.

Доказательство. Для доказательства выберем в теореме 3.2 вершины i и j таким образом, что $d_i = \Delta_1$ и $d_j = \Delta_2$. □

Ясно, что оценка (3.17) улучшает оценку Даса (3.3) для тех матриц, для которых $\gamma_{12} = 0$. С другой стороны, если $\gamma_{12} = 1$, то (3.17) менее точна, чем оценка Даса (3.2) (которая не учитывает явно шаблон связности графа G), если только не имеет место равенство $\Delta_1 = \Delta_2$.

Для связного графа, для которого $\Delta_1 \leqslant n-2$, оценку (3.6) можно улучшить следующим образом.

Следствие 3.6. *Для связного графа G порядка $n \geqslant 2$, для которого $\Delta_1 \leqslant n-2$, имеет место оценка*

$$q_2 \geqslant \Delta_{\Delta_1+2}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Не теряя общности, мы можем предположить, что $d_i = \Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $\Delta_1 \leqslant n-2$, то вершина 1 смежна с не более чем $\Delta_1 \leqslant n-2$ вершинами. Следовательно, $\delta_{1,\Delta_1+2} = 0$, и (3.18) вытекает из теоремы 3.2. □

В заключение этого параграфа мы приведем опровержение возможной гипотезы относительно верхней оценки для q_2. Поскольку при $\Delta_1 = n-1$ оценка (3.1) может быть записана в виде

$$q_2 \leqslant \Delta_1 - 1, \tag{3.19}$$

то естественно предположить, что, возможно, оценка (3.19) справедлива всегда. Покажем, что при $\Delta_1 < n-1$ это не так. Действительно, если G – Δ-регулярный граф, $1 \leqslant \Delta \leqslant n-1$, то $q_1 = 2\Delta$, так что

$$q_2 \geqslant \frac{\operatorname{tr} Q - q_1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}\Delta,$$

и из (3.19) мы бы имели

$$\Delta - 1 \geqslant \frac{n-2}{n-1}\Delta,$$

что, очевидно, неверно при $\Delta \neq n-1$.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательнрой матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
2. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
3. Chen Yan, *Properties of spectra of graphs and line graphs.* — Appl. Math. J. Chinese Univ., Ser. B **17** (2002), 371–376.
4. D. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, *Signless Laplacians of finite graphs.* — Linear Algebra Appl. **423** (2007), 155–171.
5. D. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, *Eigenvalue bounds for the signless Laplacians.* — Publ. Inst. Math. (Beogr.) (N.S.) **81(95)** (2007), 11–27.
6. K. Ch. Das, *On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs.* — Linear Algebra Appl. **432** (2010), 3018–3029.
7. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1986.
8. J. S. Li, Y. L. Pan, *A note on the second largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph.* — Linear Multilinear Algebra **48** (2000), 117–121.
9. R. Merris, *Laplacian matrices of graphs: A survey.* — Linear Algebra Appl. **197** (1994), 143–176.
10. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley and Sons, New York etc., 1988.
11. L. Silva de Lima, V. Nikiforov, *On the second largest eigenvalue of the signless Laplacian.* — Linear Algebra Appl. **438** (2013), 1215–1222.

Kolotilina L. Yu. Bounds for the largest two eigenvalues of the signless Laplacian.

In the paper, a new upper bound for the largest eigenvalue q_1 of the signless Laplacian $Q_G = D_G + A_G$ of a graph G, generalizing and improving the known bound $q_1 \leqslant \Delta_1 + \Delta_2$, where $\Delta_1 \geqslant \cdots \geqslant \Delta_n$ are the ordered vertex degrees, and new lower bounds for the second largest eigenvalue q_2 of Q_G are proved. As implications, an upper bound for the difference $q_1 - \mu_1$ of the largest eigenvalues of the signless Laplacian Q_G and of the Laplacian $L_G = D_G - A_G$, an upper bound for the largest eigenvalue of the adjacency matrix A_G, and an upper bound for the difference $q_1 - q_2$ are obtained. All the bounds suggested are expressed in terms of the vertex degrees.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 1 ноября 2013 г.