Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

Л. Ю. Колотилина

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СИНГУЛЯРНЫМИ ЧИСЛАМИ КОМПЛЕКСНОЙ МАТРИЦЫ И ПЕРРОНОВСКИМИ КОРНЯМИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – квадратная матрица с комплексными элементами и пусть неотрицательная матрица $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ удовлетворяет условию

$$P \geqslant |A|,$$

где $|A| = (|a_{ij}|)$. Тогда, по известной лемме Виландта (см., например, [2, глава XIII, §2, лемма 2] или [4, Chapter 2, Theorem 2.14]), собственные значения матрицы A, $\lambda_i(A)$, $i = 1,\dots,n$, удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_i(A)| \leqslant \rho(P), \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже для неотрицательной матрицы P через $\rho(P)$ обозначается ее перроновский корень, который является наибольшим положительным собственным значением матрицы P и совпадает с ее спектральным радиусом.

Пусть $\sigma_i(A) = \lambda_i^{1/2}(AA^*)$, $i = 1,\dots,n$, – сингулярные числа матрицы A, занумерованные в порядке невозрастания, т.е.

$$\sigma_1(A) \geqslant \dots \geqslant \sigma_n(A).$$

Тогда из (1.1) мы немедленно получаем, что

$$\sigma_1^2(A) \leqslant \rho(|A||A|^T) = \sigma_1^2(|A|), \tag{1.2}$$

что дает нам верхнюю оценку для наибольшего сингулярного числа матрицы A через перроновский корень неотрицательной матрицы $|A||A|^T$.

Ключевые слова: сингулярные числа, неотрицательная матрица, перроновский корень, теорема Фробениуса, $(0,1)$-матрица.

В данной работе мы связываем с матрицей A другую неотрицательную матрицу, которая определяется по формуле

$$P_A = (|a_{ij}|^2) = |A| \circ |A|, \tag{1.3}$$

где $\circ$ обозначает адамаровское (покомпонентное) произведение матриц.

Заметим, что матрица P_A обладает следующими элементарными свойствами:

(i) При $\alpha \in \mathbb{C}$ и $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет место равенство

$$P_{\alpha A} = |\alpha|^2 P_A.$$

(ii) Если U – унитарная матрица, то $P_U e = e$ и $P_U^T e = e$. В частности, по теореме Фробениуса (см., напр., [8, Chapter II, Section 2.1, Theorem 1.1]), отсюда следует, что

$$\rho(P_U) = \rho\left(\frac{P_U + P_U^T}{2}\right) = 1.$$

(iii) Для произвольной невырожденной диагональной матрицы D имеет место соотношение

$$P_{D^{-1}AD} = |D|^{-2} P_A |D|^2. \tag{1.4}$$

В частности, из (1.4) вытекает, что

$$\rho(P_{D^{-1}AD}) = \rho(P_A), \tag{1.5}$$

т.е. перроновский корень матрицы P_A инвариантен относительно диагонального сопряжения матрицы A.

(iv) Если S – матрица перестановки, то, очевидно,

$$P_{S^{-1}AS} = S^{-1} P_A S. \tag{1.6}$$

(v) Если $E = (\epsilon_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и $|\epsilon_{ij}| = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$, то

$$P_{A\circ E} = P_A.$$

(vi) Строчные суммы матрицы P_A, которые обозначаются через $r_i(P_A)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют следующим очевидным, но полезным соотношениям:

$$r_i(P_A) = (AA^*)_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

(vii) Если A – $(0,1)$-матрица, то

$$P_A = A.$$

Статья построена следующим образом. В §2 мы устанавливаем некоторые неравенства, связывающие сингулярные числа матрицы A с перроновскими корнями $\rho(P_A)$ и $\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)$. В §3 рассматриваются приложения общих результатов к $(0,1)$-матрицам.

В работе используются следующие обозначения:
- I_n – единичная матрица порядка $n \geqslant 1$;
- $e = [1,\dots,1]^T$ – единичный вектор;
- для $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\rho(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i(A)|$ – спектральный радиус матрицы A;
- собственные значения эрмитовой матрицы $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, упорядочены в порядке невозрастания, т.е.

$$\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A);$$

- $\mathbb{D}_n$ – группа (невырожденных) диагональных матриц порядка n с положительными диагональными элементами.

§2. Основные результаты

Сперва мы установим следующий элементарный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\sigma_n^2(A) \leqslant \rho(P_A) \leqslant \sigma_1^2(A). \tag{2.1}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то любое из неравенств в (2.1) является равенством тогда и только тогда, когда

$$\sigma_n(A) = \cdots = \sigma_1(A). \tag{2.2}$$

Доказательство. В силу теоремы Фробениуса и (1.7), мы имеем

$$\rho(P_A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(P_A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (AA^*)_{ii} \leqslant \lambda_1(AA^*) = \sigma_1^2(A). \tag{2.3}$$

Здесь последнее неравенство следует из классической теоремы Коши (см., напр., [7, Theorem 4.3.15]).

Аналогично,

$$\rho(P_A) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(P_A) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} (AA^*)_{ii} \geqslant \sigma_n^2(A).$$

Тем самым неравенства (2.1) установлены.

Рассмотрим случаи равенства.

Если выполнено условие (2.2), то, очевидно, оба соотношения в (2.1) являются равенствами.

Обратно, предположим, что матрица A неприводима и что

$$\rho(P_A) = \sigma_1^2(A). \tag{2.4}$$

В этом случае, (2.3) является цепочкой равенств, и, по теореме Фробениуса, мы имеем

$$(AA^*)_{ii} = \rho(P_A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{\mathrm{tr}\,(AA^*)}{n} = \rho(P_A) = \sigma_1^2(A),$$

откуда и следует (2.2).

Случай, когда левое неравенство в (2.1) является равенством, рассматривается аналогично. □

Применяя теорему 2.1 к матрице $D^{-1}AD$ и используя свойство (1.5), мы приходим к следующему обобщению теоремы 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда для любой невырожденной диагональной матрицы D порядка n имеют место неравенства*

$$\sigma_n^2(D^{-1}AD) \leqslant \rho(P_A) \leqslant \sigma_1^2(D^{-1}AD). \tag{2.5}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из неравенств в (2.5) является равенством тогда и только тогда, когда

$$\sigma_n(D^{-1}AD) = \cdots = \sigma_1(D^{-1}AD).$$

Из следствия 2.1 немедленно вытекают следующие двусторонние оценки для $\rho(P_A)$.

Следствие 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\max_D \sigma_n^2(D^{-1}AD) \leqslant \rho(P_A) \leqslant \min_D \sigma_1^2(D^{-1}AD),$$

где минимум и максимум берутся по всем невырожденным диагональным матрицам D порядка n.

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из неравенств является равенством тогда и только тогда, когда существует невырожденная диагональная матрица Δ такая, что все сингулярные числа $\Delta^{-1}A\Delta$ равны между собой.

Левое неравенство в теореме 2.1 можно усилить, заменив $\sigma_n^2(A)$ на среднее геометрическое квадратов сингулярных чисел матрицы A. Таким образом мы получаем верхнюю оценку для $|\det A|$ через перроновский корень матрицы P_A.

Теорема 2.2. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$|\det A|^{2/n} = [\det(AA^*)]^{1/n} = \left[\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)\right]^{1/n} \leqslant \rho(P_A). \tag{2.6}$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то равенство в* (2.6) *имеет место тогда и только тогда, когда существует диагональная матрица* $\Delta \in \mathbb{D}_n$ *такая, что*

$$\sigma_1(\Delta^{-1}A\Delta) = \cdots = \sigma_n(\Delta^{-1}A\Delta). \tag{2.7}$$

Доказательство. По свойствам определителя и по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, для любой невырожденной диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ мы имеем

$$\begin{aligned}
[\det(AA^*)]^{1/n} &= \left[\det(D^{-1/2}AD^{1/2})(D^{-1/2}AD^{1/2})^*\right]^{1/n} \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2(D^{-1/2}AD^{1/2})\right]^{1/n} \\
&\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(D^{-1/2}AD^{1/2})}{n} \\
&= \frac{\operatorname{tr}\left[(D^{-1/2}AD^{1/2})(D^{-1/2}AD^{1/2})^*\right]}{n} \\
&= \frac{\sum_{i,j=1}^{n} d_i^{-1}|a_{ij}|^2 d_j}{n} = \frac{e^T D^{-1} P_A D e}{n}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь для доказательства (2.6) нам достаточно указать матрицу $D \in \mathbb{D}_n$, для которой

$$\frac{e^T D^{-1} P_A D e}{n} = \rho(P_A). \tag{2.9}$$

С этой целью предположим сперва, что матрица A (а значит также и P_A) является неприводимой. В этом случае, по теореме Перрона–Фробениуса (см., напр., [4, Chapter 2, Theorem 1.4]), существует положительный вектор $x = (x_i)$ такой, что

$$P_A x = \rho(P_A)x. \tag{2.10}$$

Определим матрицу D с помощью соотношения

$$De = x. \tag{2.11}$$

Тогда $D \in \mathbb{D}_n$, и равенство (2.10) можно записать в виде

$$D^{-1}P_A De = \rho(P_A)e, \tag{2.12}$$

откуда и следует (2.9).

Если же матрица A приводима, то мы можем считать, что она приведена к блочно-треугольному виду

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{rr} \end{bmatrix}, \quad r \geqslant 2,$$

где все диагональные блоки A_{ii}, $i = 1, \dots, r$, – неприводимые матрицы порядков n_i, $i = 1, \dots, r$, и $n = \sum_{i=1}^r n_i$. Тогда, очевидно,

$$\det(AA^*) = \prod_{i=1}^r \det(A_{ii}A_{ii}^*) \tag{2.13}$$

и

$$P_A = \begin{bmatrix} P_{A_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{A_{rr}} \end{bmatrix}, \quad r \geqslant 2.$$

Как уже было показано выше,

$$\det(A_{ii}A_{ii}^*) \leqslant \rho(P_{A_{ii}})^{n_i}, \quad i = 1, \dots, r. \tag{2.14}$$

В силу (2.14) и свойства монотонности перроновского корня относительно главных подматриц (см., напр., [4, Chapter 2, Corollary 1.6]), мы имеем

$$\rho(P_{A_{ii}}) \leqslant \rho(P_A), \quad i = 1, \dots, r. \tag{2.15}$$

Наконец, с помощью (2.13), (2.14) и (2.15) мы выводим:

$$\det(AA^*) \leqslant \prod_{i=1}^r \rho(P_{A_{ii}})^{n_i} \leqslant \rho(P_A)^{\sum_{i=1}^r n_i} = \rho(P_A)^n.$$

Этим завершается доказательство (2.6) в приводимом случае.

Рассмотрим случай равенства в (2.6). Предположим сперва, что

$$[\det(AA^*)]^{1/n} = \rho(P_A) \tag{2.16}$$

и что матрица A неприводима. В этом случае матрица D, определенная в (2.11), имеет положительные диагональные элементы, а из (2.8), (2.12) и (2.16) вытекает, что

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2(D^{-1/2}AD^{1/2})\right]^{1/n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(D^{-1/2}AD^{1/2})}{n} = \rho(P_A).$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, это означает, что

$$\sigma_i^2(D^{-1/2}AD^{1/2}) = \rho(P_A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда и следует справедливость (2.7) с $\Delta = D^{1/2}$.

Достаточность (2.7) для того, чтобы имело место равенство (2.16), следует из (2.5).

Теорема 2.2 доказана. □

Замечание 2.1. Для вещественной матрицы A, не имеющей нулевых элементов, неравенство (2.6) было впервые установлено в [6].

Поскольку как $\det(AA^*)$, так и $\rho(P_A)$ инвариантны относительно замены A на сопряженную матрицу $D^{-1}AD$, где D – произвольная невырожденная диагональная матрица, то из теоремы 2.2 немедленно вытекает следующий более общий результат.

Следствие 2.3. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и пусть* $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – *произвольная невырожденная диагональная матрица. Тогда*

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2(D^{-1}AD)\right]^{1/n} \leqslant \rho(P_A). \tag{2.17}$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то равенство в* (2.17) *имеет место тогда и только тогда, когда условия* (2.7) *выполнены для некоторой матрицы* $\Delta \in \mathbb{D}_n$.

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.2 следует, что в неприводимом случае существует диагональная матрица $D \in \mathbb{D}_n$ такая, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(D^{-1/2}AD^{1/2})}{n} \leqslant \rho(P_A).$$

Однако в общем случае при $D = I_n$ неравенство

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} \leqslant \rho(P_A) \tag{2.18}$$

может и не выполняться, если только не выполнено условие $P_A = P_A^T$.

Это обстоятельство иллюстрируется следующим примером.

Пример 2.1. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ мы имеем

$$P_A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \rho(P_A) = 2 = \sqrt{\det(AA^T)}.$$

Однако

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{4+1}{2} > 2 = \rho(P_A).$$

Следующая теорема дает правильную модификацию неравенства (2.18), которая является верхней оценкой для среднего арифметического квадратов сингулярных чисел матрицы A. Поскольку $\rho(P_A) \leqslant \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)$ (см., напр., [3, Theorem 12.6]), то теорема 2.3 одновременно улучшает нижнюю оценку для $\sigma_1^2(A)$ из теоремы 2.1.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} \leqslant \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) \leqslant \sigma_1^2(A). \tag{2.19}$$

Кроме того, левое неравенство в (2.19) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\frac{P_A+P_A^T}{2} e = \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) e, \tag{2.20}$$

а если матрица $P_A+P_A^T$ неприводима, то правое неравенство в (2.19) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_1(A) = \cdots = \sigma_n(A). \tag{2.21}$$

Доказательство. Левое неравенство в (2.19) выводится с использованием очевидного соотношения $e^T P_A e = e^T P_A^T e$ и теоремы Рэлея–Ритца (см., напр., [7, Theorem 4.2.2]) следующим образом:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{\operatorname{tr}(AA^*)}{n} = \frac{e^T P_A e}{n} = \frac{e^T\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)e}{n} \leqslant \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right).$$

Докажем правое неравенство в (2.19). Для $i = 1, \ldots, n$ мы имеем

$$\sigma_1^2(A) = \frac{\sigma_1^2(A) + \sigma_1^2(A^*)}{2} \geqslant \frac{(AA^*)_{ii} + (A^*A)_{ii}}{2}$$
$$= \frac{r_i(P_A) + r_i(P_A^T)}{2} = r_i\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right),$$

откуда ввиду теоремы Фробениуса следует, что

$$\sigma_1^2(A) \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right) \geqslant \rho\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right). \qquad (2.22)$$

Рассмотрим случаи равенств.

Сперва рассмотрим правое неравенство в (2.19).

Поскольку из (2.21) немедленно вытекает, что обе оценки в (2.19) совпадают, то достаточность условий (2.21) для того, чтобы правое неравенство в (2.19) было равенством, очевидна.

Для того, чтобы убедиться в необходимости условий (2.21), предположим, что матрица $P_A + P_A^T$ неприводима и что

$$\rho\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right) = \sigma_1^2(A).$$

В этом случае, в силу теоремы Фробениуса, из (2.22) следует, что

$$\sigma_1^2(A) = r_i\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right) = \rho\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (2.23)$$

Поскольку, как было отмечено выше,

$$\frac{e^T P_A e}{n} = \frac{e^T \frac{P_A + P_A^T}{2} e}{n}$$

и, по (2.23),

$$\frac{e^T \frac{P_A + P_A^T}{2} e}{n} = \sigma_1^2(A),$$

то мы имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{\operatorname{tr}(AA^*)}{n} = \frac{e^T P_A e}{n} = \sigma_1^2(A).$$

Отсюда следует, что все сингулярные числа матрицы A равны, и необходимость (2.21) установлена.

Пусть теперь левое неравенство в (2.19) является равенством, т.е.

$$\rho\left(\frac{P_A + P_A^T}{2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n}. \qquad (2.24)$$

Поскольку, как было показано выше,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{\operatorname{tr}(AA^*)}{n} = \frac{e^T P_A e}{n} = \frac{e^T \frac{P_A+P_A^T}{2} e}{n}, \tag{2.25}$$

то из (2.24) вытекает, что

$$\frac{e^T \frac{P_A+P_A^T}{2} e}{n} = \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right),$$

откуда следует, что вектор e является собственным для матрицы $\frac{P_A+P_A^T}{2}$ и отвечает ее наибольшему собственному значению, т.е.

$$\frac{P_A+P_A^T}{2} e = \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) e.$$

Этим доказано (2.20).

Обратно, если выполнено условие (2.20), то, в силу (2.25), мы имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{e^T \frac{P_A+P_A^T}{2} e}{n} = \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right).$$

Тем самым достаточность условия (2.20) для того, чтобы левое неравенство в (2.19) было равенством, установлена. □

Замечание 2.3. Если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет равные сингулярные числа, то из теорем 2.1 и 2.3 вытекает, что

$$\rho(P_A) = \rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right).$$

Полученное соотношение также следует из свойств **(i)** и **(ii)** §1, поскольку, как легко видеть из сингулярного разложения, любая матрица, имеющая равные сингулярные числа, является скалярным кратным унитарной матрицы.

Замечание 2.4. Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A) = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = e^T P_A e,$$

то левая часть в (2.19) легко вычисляется, так что левое неравенство в (2.19) может рассматриваться как нижняя оценка для $\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)$.

Замечание 2.5. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (см. пример 2.1) мы имеем $\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) = \frac{5}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sigma_i^2(A)}{2}$, т.е. левое неравенство в (2.19) является равенством, тогда как правое неравенство выполняется строго. Этот пример показывает, что два неравенства в (2.19) не обязаны быть строгими одновременно.

В заключение данного параграфа мы приведем еще одно уточнение правого неравенства из теоремы 2.1, а также соответствующее уточнение правого неравенства из теоремы 2.3. Для этого нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения, которые мы напоминаем ниже.

Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, через $G_A = (\langle n\rangle,\ E_A)$ мы обозначаем ее ориентированный граф с множеством вершин $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$ и множеством дуг

$$E_A = \{(i,j):\ i,j \in \langle n\rangle \ \text{ и } \ a_{ij} \neq 0\};$$

$\mathfrak{C}(A)$ – множество всех (простых) контуров в G_A. Напомним, что *контур* длины $k \geqslant 1$ в G_A – это упорядоченное множество $\gamma = (i_1,\dots,i_k,i_{k+1})$, где все вершины $i_1,\dots,i_k \in \langle n\rangle$ различны, $i_{k+1} = i_1$ и для каждого $j = 1,\dots,k$ дуга $(i_j,\ i_{j+1})$ принадлежит множеству E_A. Множество $\{i_1,\dots,i_k\}$ называется *носителем* контура γ и обозначается символом $\bar\gamma$. Длина контура γ обозначается через $|\gamma|$; $|\gamma| = k$. Напомним также, что если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то величина

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}(G_A) = \min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} |\gamma|$$

называется *обхватом* G_A.

Напомним следующую теорему Альпина, которая сводится к теореме Фробениуса в том случае, когда все диагональные элементы матрицы положительны.

Теорема 2.4 ([1]). *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк. Тогда*

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right]^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right]^{1/|\gamma|}. \qquad (2.26)$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из неравенств в (2.26) *является равенством тогда и только тогда, когда*

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right]^{1/|\gamma|} = \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right]^{1/|\gamma|}. \tag{2.27}$$

Из теоремы Альпина легко выводится следующий результат, обобщающий более ранний результат Бруальди [5, Corollary 4.6], первоначально установленный для неприводимых неотрицательных матриц, все диагональные элементы которых равны нулю.

Следствие 2.4. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ такая, что*

$$r_1(A) \geqslant \cdots \geqslant r_n(A). \tag{2.28}$$

Тогда

$$\rho(A) \leqslant \left[\prod_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} r_i(A)\right]^{1/\mathfrak{g}(A)}. \tag{2.29}$$

Мы воспользуемся следствием 2.4 для вывода упомянутых выше уточнений правых неравенств из теорем 2.1 и 2.3.

Теорема 2.5. *Предположим, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, не имеет нулевых строк. Тогда*

$$\rho(P_A) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(A)}{\mathfrak{g}(A)}. \tag{2.30}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в (2.30) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_1(A) = \cdots = \sigma_n(A). \tag{2.31}$$

Доказательство. Ввиду соотношения (1.6) мы можем считать, не теряя при этом общности, что

$$r_1(P_A) \geqslant \cdots \geqslant r_n(P_A).$$

В этом предположении с помощью следствия 2.4, неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, а также теоремы Коши мы выводим (2.30) следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(P_A) &\leqslant \left[\prod_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} r_i(P_A)\right]^{1/\mathfrak{g}(A)} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} r_i(P_A)}{\mathfrak{g}(A)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} (AA^*)_{ii}}{\mathfrak{g}(A)} = \frac{\operatorname{tr} B}{\mathfrak{g}(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \lambda_i(B)}{\mathfrak{g}(A)} \\ &\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \lambda_i(AA^*)}{\mathfrak{g}(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(A)}{\mathfrak{g}(A)}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь $B = (AA^*)[1, \ldots, \mathfrak{g}(A)]$ – это верхняя левая угловая главная подматрица порядка $\mathfrak{g}(A)$ матрицы AA^*.

Рассмотрим случай равенства, предполагая, что матрица A неприводима.

Если

$$\rho(P_A) = \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(A)}{\mathfrak{g}(A)}, \tag{2.33}$$

то из (2.32) и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что

$$\rho(P_A) = r_1(P_A) = \cdots = r_{\mathfrak{g}(A)}(P_A).$$

В этом случае, по теореме Фробениуса, мы имеем

$$\rho(P_A) = r_1(P_A) = \cdots = r_n(P_A),$$

или, что равносильно,

$$\rho(P_A) = (AA^*)_{11} = \cdots = (AA^*)_{nn}. \tag{2.34}$$

Из (2.34) и (2.33) мы выводим

$$\rho(P_A) = \frac{\operatorname{tr}(AA^*)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(A)}{\mathfrak{g}(A)}.$$

Как легко видеть, последнее соотношение для занумерованных в порядке невозрастания сингулярных чисел A влечет (2.31).

Обратно, если выполнено условие (2.31), то (2.33) следует из теоремы 2.1. $\square$

Замечание 2.6. Для матриц с ненулевыми диагональными элементами, для которых, очевидно, $\mathfrak{g}(A) = 1$, оценка (2.30) сводится к соответствующей оценке теоремы 2.1.

Применяя теорему 2.5 к матрице $D^{-1}AD$ и используя свойство (1.5), мы получаем следующее обобщение теоремы 2.5.

Следствие 2.5. *В условиях теоремы* 2.5 *для любой невырожденной диагональной матрицы D порядка n справедливо неравенство*

$$\rho(P_A) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(D^{-1}AD)}{\mathfrak{g}(A)}. \tag{2.35}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в (2.35) *имеет место тогда и только тогда, когда все сингулярные числа $D^{-1}AD$ равны между собой.*

Из следствия 2.5 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.6. *В условиях теоремы* 2.5 *выполняется соотношение*

$$\rho(P_A) \leqslant \min_{D} \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(D^{-1}AD)}{\mathfrak{g}(A)}, \tag{2.36}$$

где минимум берется по всем невырожденным диагональным матрицам D порядка n.

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в (2.36) *имеет место тогда и только тогда, когда существует такая невырожденная диагональная матрица Δ такая, что все сингулярные числа $\Delta^{-1}A\Delta$ равны между собой.*

Для доказательства аналога неравенства (2.30) для перроновского корня симметричной части матрицы P_A заметим сперва, что $\mathfrak{g}\left(\frac{A+A^T}{2}\right) \leqslant 2$, и если матрица A имеет хотя бы один ненулевой диагональный элемент, то $\mathfrak{g}\left(\frac{A+A^T}{2}\right) = 1$. В силу этого обстоятельства, для того, чтобы получить улучшение правого неравенства теоремы 2.3, мы должны предположить, что все диагональные элементы A равны нулю. Искомый аналог теоремы 2.5 формулируется следующим образом.

Теорема 2.6. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и пусть все диагональные элементы матрицы* A *равны нулю. Тогда*

$$\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) \leqslant \frac{\sigma_1^2(A)+\sigma_2^2(A)}{2}. \tag{2.37}$$

Кроме того, если матрица $\frac{P_A+P_A^T}{2}$ *неприводима, то в* (2.37) *равенство имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_1(A) = \cdots = \sigma_n(A). \tag{2.38}$$

Доказательство. Не теряя общности, будем предполагать, что

$$r_1\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) \geqslant \cdots \geqslant r_n\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right).$$

В этом предположении, по следствию 2.4 и неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, мы имеем

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) &\leqslant \left[r_1\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) r_2\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)\right]^{1/2} \\
&\leqslant \frac{r_1\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)+r_2\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{r_1(P_A)+r_2(P_A)}{4}+\frac{r_1(P_A^T)+r_2(P_A^T)}{4} \\
&= \frac{(AA^*)_{11}+(AA^*)_{22}+(A^*A)_{11}+(A^*A)_{22}}{4} \\
&= \frac{\operatorname{tr} B+\operatorname{tr} C}{4},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

где через B и C обозначены левые верхние угловые главные подматрицы порядка 2 матриц AA^* и A^*A соответственно. Как и в доказательстве теоремы 2.5, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right) &\leqslant \frac{\lambda_1(AA^*)+\lambda_2(AA^*)+\lambda_1(A^*A)+\lambda_2(A^*A)}{4} \\
&= \frac{\sigma_1^2(A)+\sigma_2^2(A)}{2}.
\end{aligned}$$

Неравенство (2.37) установлено.

Остается рассмотреть случаи равенства. Если матрица $\frac{P_A+P_A^T}{2}$ неприводима и выполнено соотношение

$$\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=\frac{\sigma_1^2(A)+\sigma_2^2(A)}{2}, \tag{2.40}$$

то из (2.39) вытекает, что

$$\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=r_1\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=r_2\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right),$$

откуда, в силу теоремы Фробениуса, мы имеем

$$\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=r_1\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=\cdots=r_n\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right),$$

или, что равносильно,

$$\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=\frac{(AA^*)_{11}+(A^*A)_{11}}{2}=\cdots=\frac{(AA^*)_{nn}+(A^*A)_{nn}}{2}.$$

Из последних соотношений мы заключаем, что

$$\rho\left(\frac{P_A+P_A^T}{2}\right)=\frac{\mathrm{tr}\ AA^*+\mathrm{tr}\ A^*A}{2n}=\frac{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2(A)}{n}. \tag{2.41}$$

Теперь, сравнивая (2.40) с (2.41), мы приходим к (2.38).

Обратно, если все сингулярные числа матрицы A равны между собой, то (2.40) вытекает из теоремы 2.3. □

§3. Приложения к $(0,1)$-матрицам

Как было отмечено во введении, если A – $(0,1)$-матрица, то, очевидно,

$$P_A=|A|\circ|A|=A. \tag{3.1}$$

Значит, в этом случае во всех результатах предыдущего параграфа $\rho(P_A)$ можно заменить на $\rho(A)$. Таким образом мы получаем соотношения между сингулярными числами A и перроновскими корнями матриц A и $(A+A^T)/2$.

В частности, из теорем 2.2 и 2.5 немедленно вытекает следующий результат для $(0,1)$-матриц.

Следствие 3.1. *Пусть A – $(0,1)$-матрица порядка n, $n \geqslant 1$, и пусть $\mathfrak{g}(A)$ – обхват ориентированного графа G_A, ассоциированного с A. Тогда*

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)\right]^{1/n} \leqslant \rho(A) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}(A)} \sigma_i^2(A)}{\mathfrak{g}(A)}. \tag{3.2}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то равенство в левой части (3.2) имеет место тогда и только тогда, когда существует диагональная матрица $\Delta \in \mathbb{D}_n$ такая, что

$$\sigma_1(\Delta^{-1}A\Delta) = \cdots = \sigma_n(\Delta^{-1}A\Delta), \tag{3.3}$$

а равенство в правой части (3.2) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sigma_1(A) = \cdots = \sigma_n(A), \tag{3.4}$$

т.е. (3.3) выполняется с $\Delta = I_n$.

Для перроновского корня симметричной части $(0,1)$-матрицы теоремы 2.3 и 2.6 дают следующие двусторонние оценки через ее сингулярные числа.

Следствие 3.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – $(0,1)$-матрица порядка n, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)}{n} \leqslant \rho\left(\frac{A + A^T}{2}\right) \leqslant \sigma_1^2(A), \tag{3.5}$$

а если

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0, \tag{3.6}$$

то

$$\rho\left(\frac{A + A^T}{2}\right) \leqslant \frac{\sigma_1^2(A) + \sigma_2^2(A)}{2}. \tag{3.7}$$

Кроме того, равенство в левой части (3.5) имеет место тогда и только тогда, когда все строчные суммы матрицы $\frac{A+A^T}{2}$ равны между собой, а если матрица $\frac{A+A^T}{2}$ неприводима, то равенство в правой части (3.5) имеет место тогда и только тогда, когда все сингулярные числа A равны между собой.

Наконец, если матрица $\frac{A+A^T}{2}$ неприводима и удовлетворяет условиям (3.6), то (3.7) является равенством тогда и только тогда, когда все сингулярные числа A равны между собой.

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитываюшие свойства ее графа.* — Матем. заметки **58** (1982), 635–637.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1967.
3. A. R. Amir-Moéz, A. L. Fass, *Elements of Linear Spaces.* Pergamon Press, 1962.
4. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
5. R. A. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear Multilinear Algebra **11** (1982), 143–165.
6. G. Gu, *Spectral radius bounds for positive matrices with applications*, unpublished.
7. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1986.
8. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley and Sons, New York etc., 1988.

Kolotilina L. Yu. Some inequalities connecting the singular values of a complex matrix with the Perron roots of related nonnegative matrices.

In the paper, some inequalities interrelating the singular values of a square matrix A with complex entries with the Perron roots of the associated nonnegative matrices $P_A = |A| \circ |A|$ and $(P_A + P_A^T)/2$ are derived. The results obtained are applied to $(0, 1)$-matrices.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 1 июля 2013 г.