

Л. Ю. Колотилина

## ОЦЕНКИ БЕСКОНЕЧНОЙ НОРМЫ ОБРАТНЫХ К МАТРИЦАМ НЕКРАСОВА

### §1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе Л. Цветкович и др. [5] были предложены две верхние оценки для бесконечной нормы  $\|\cdot\|_\infty$  обратной к матрице Некрасова  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Эти оценки приводятся ниже в теореме 2.1.

В настоящей работе устанавливается новая верхняя оценка для бесконечной нормы обратной к матрице Некрасова, улучшающая одновременно обе оценки из статьи [5]. Заметим при этом, что новая оценка формулируется в терминах тех же величин, что и предшествующие ей оценки. При выводе предлагаемой оценки мы опирались на подход, использованный в [5], но с одним ключевым отличием.

В работе применяются следующие обозначения:

- $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .
- Для матрицы  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  через

$$r'_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

обозначаются ее усеченные абсолютные строчные суммы.

- $A = D - L - U$  — это стандартное расщепление матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  на ее диагональную ( $D$ ), строго нижнюю треугольную ( $-L$ ) и строго верхнюю треугольную ( $-U$ ) части.
- Для  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  через  $M(A) = (m_{ij})$ , где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

обозначается ее  $Z$ -матрица сравнения.

- $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор.
- $I_n$  — единичная матрица порядка  $n$ .

---

*Ключевые слова:* матрица Некрасова, обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка, оценка Вараха.

Напомним, что матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , называется матрицей Некрасова, если выполняются строгие неравенства

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где величины  $h_i(A)$  определены следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} h_1(A) &= r_1'(A), \\ h_i(A) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j(A) + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В дальнейшем, мы будем обозначать класс матриц Некрасова символом  $N$ .

Напомним, что невырожденность матриц Некрасова была установлена Гудковым в работе [1]. Как указано в статье [4], в действительности, невырожденность матриц Некрасова вытекает уже из результатов Островского [7], который отдает честь открытия условий (1.1) Некрасову [2].

Заметим, что, как следует из определения, все диагональные элементы матриц Некрасова отличны от нуля.

В матричных терминах, как хорошо известно и почти очевидно, вектор  $h(A) = (h_i(A))$  можно представить в виде

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e, \quad (1.2')$$

так что условия (1.1) равносильны неравенству

$$|D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e < |D|e,$$

или, что равносильно, неравенству

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e = [I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e < e. \quad (1.3)$$

Таким образом, (1.1) – это, в действительности, условие строгого диагонального преобладания в  $Z$ -матрице

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|,$$

получаемой из матрицы сравнения  $\mathcal{M}(A)$  ее умножением слева (левым переобуславливанием) на нижнюю треугольную матрицу  $(|D| - |L|)^{-1}$ .

Напомним, что характеристика матриц Некрасова в терминах неравенства (1.3) принадлежит Роберу [8], также показавшему, что класс

$N$  содержит класс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием, который будет обозначаться через  $SDD$ , а также, что сам класс  $N$  содержится в классе невырожденных  $H$ -матриц.

Также уместно упомянуть, что если  $A$  – матрица Некрасова, то для любой невырожденной диагональной матрицы  $\Delta$  матрица  $\Delta A$  также является матрицей Некрасова, т.е. класс  $N$  замкнут относительно умножения слева на невырожденные диагональные матрицы.

## §2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [5] были установлены следующие оценки.

**Теорема 2.1.** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  – матрица Некрасова порядка  $n \geq 2$ . Тогда справедливы следующие верхние оценки:

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\max_{i \in \langle n \rangle} \{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - \max_{i \in \langle n \rangle} \{h_i(A)/|a_{ii}|\}} \quad (2.1)$$

и

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\max_{i \in \langle n \rangle} \{z_i(A)\}}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}}. \quad (2.2)$$

Здесь и далее, величины  $z_i(A)$  определяются рекуррентными соотношениями

$$z_1(A) = 1, \quad z_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} z_j(A) + 1, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Заметим, что, как легко видеть, в матричных терминах вектор  $z(A) = (z_i(A))$  имеет вид

$$z(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}e. \quad (2.3')$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  – матрица Некрасова порядка  $n \geq 2$ . Тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \quad (2.4)$$

**Доказательство.** Поскольку матрица  $A \in N$  является невырожденной  $H$ -матрицей, то, по теореме Островского (см. [6] или, напр., [3, Лемма 8.15]), мы имеем

$$|A^{-1}| \leq \mathcal{M}(A)^{-1},$$

откуда следует, что

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_{\infty}.$$

Итак, нам достаточно доказать, что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \quad (2.5)$$

Чтобы установить (2.5), представим матрицу сравнения  $\mathcal{M}(A)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A) &= (|D| - |L|) - |U| \\ &= (|D| - |L|)[I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|] \\ &= (|D| - |L|)\Delta \cdot \Delta^{-1}C, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$C = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U| = (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A).$$

Из (2.6) следует, что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_{\infty} \leq \|[(|D| - |L|)\Delta]^{-1}\|_{\infty} \cdot \|C^{-1}\Delta\|_{\infty}. \quad (2.7)$$

Теперь определим диагональную матрицу  $\Delta$  из условия

$$(|D| - |L|)\Delta e = e. \quad (2.8)$$

Тогда, очевидно,

$$\|[(|D| - |L|)\Delta]^{-1}\|_{\infty} = 1,$$

и из (2.7) мы выводим

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_{\infty} \leq \|C^{-1}\Delta\|_{\infty}. \quad (2.9)$$

Как было отмечено во введении, тот факт, что  $A$  – матрица Некрасова, в точности означает, что  $C$  –  $M$ -матрица со строгим диагональным преобладанием. Отсюда вытекает, что  $\Delta^{-1}C$  также является  $M$ -матрицей со строгим диагональным преобладанием. Поэтому,

применяя классическую оценку Вараха [9]

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - r'_i(A)\}},$$

справедливую для матриц со строгим диагональным преобладанием, к матрице  $\Delta^{-1}C$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \|C^{-1}\Delta\|_{\infty} &\leq \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{1}{(\Delta^{-1}Ce)_i} = \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\delta_i}{(Ce)_i} \\ &= \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\delta_i}{1 - \frac{h_i(A)}{|a_{ii}|}} = \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\delta_i |a_{ii}|}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Остается заметить, что с учетом (2,3') и (2.8) мы имеем

$$\delta_i |a_{ii}| = z_i(A), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Сопоставляя соотношения (2.9) и (2.10) и учитывая (2.11), мы приходим к оценке (2.5). Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Если в доказательстве теоремы 2.2 положить  $\Delta = I_n$  или  $\Delta = D$ , то мы придем к оценкам (2.1) и (2.2) теоремы 2.1.

Следующая теорема утверждает, что оценка (2.4), по крайней мере, не хуже, чем оценки (2.1) и (2.2), и описывает случаи, в которых новая оценка совпадает с каждой из ранее предложенных оценок.

**Теорема 2.3.** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , – матрица Некрасова. Тогда

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leq \frac{\max_{i \in \langle n \rangle} \{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - \max_{i \in \langle n \rangle} \{h_i(A)/|a_{ii}|\}} \quad (2.12)$$

и

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leq \frac{\max_{i \in \langle n \rangle} \{z_i(A)\}}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}}. \quad (2.13)$$

Кроме того, равенство в соотношении (2.12) имеет место тогда и только тогда, когда при некотором  $k \in \langle n \rangle$  выполнены условия

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}|} = \frac{z_k(A)}{|a_{kk}|} \quad (2.14)$$

и

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{h_i(A)}{|a_{ii}|} = \frac{h_k(A)}{|a_{kk}|}. \quad (2.15)$$

Аналогично, равенство в (2.13) имеет место тогда и только тогда, когда при некотором  $k \in \langle n \rangle$  выполнены условия

$$\max_{i \in \langle n \rangle} z_i(A) = z_k(A) \quad (2.16)$$

и

$$\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\} = |a_{kk}| - h_k(A). \quad (2.17)$$

**Доказательство.** Неравенство (2.13) очевидно. Неравенство (2.12) также становится очевидным, если воспользоваться соотношением

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} = \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)/|a_{ii}|}{1 - h_i(A)/|a_{ii}|}.$$

Рассмотрим случай равенства в (2.13). Пусть для матрицы  $A \in N$  мы имеем

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} = \frac{\max_{i \in \langle n \rangle} z_i(A)}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}}. \quad (2.18)$$

Будем считать, что

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} = \frac{z_k(A)}{|a_{kk}| - h_k(A)}, \quad k \in \langle n \rangle. \quad (2.19)$$

Поскольку  $|a_{kk}| - h_k(A) \geq \min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}$ , то из (2.18) и (2.19) следует, что

$$z_k(A) \geq \max_{i \in \langle n \rangle} z_i(A),$$

откуда и вытекает (2.16).

С другой стороны, поскольку

$$\frac{\max_{i \in \langle n \rangle} z_i(A)}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}} \geq \frac{z_k(A)}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}},$$

то из соотношений (2.18) и (2.19) следует, что

$$\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\} \geq |a_{kk}| - h_k(A),$$

и необходимость условия (2.17) установлена.

Обратно, если при некотором  $k \in \langle n \rangle$  выполнены условия (2.16) и (2.17), то мы имеем

$$\frac{\max_{i \in \langle n \rangle} z_i(A)}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}} = \frac{z_k(A)}{|a_{kk}| - h_k(A)}$$

$$\leq \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leq \frac{\max_{i \in \langle n \rangle} z_i(A)}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}},$$

и (2.13) является равенством.

Случай, когда оценка (2.4) совпадает с оценкой (2.1), т.е. (2.12) является равенством, рассматривается аналогично. При этом вместо (2.18) нужно рассмотреть соотношение

$$\frac{\max_{i \in \langle n \rangle} \{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - \max_{i \in \langle n \rangle} \{h_i(A)/|a_{ii}|\}} = \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - h_i(A)/|a_{ii}|}. \quad \square$$

Заметим, что в работе [5] на численных примерах было продемонстрировано, что для матриц со строгим диагональным преобладанием обе оценки (2.1) и (2.2) не обязательно являются более точными, чем классическая верхняя оценка Вараха для бесконечной нормы обратной

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - r'_i(A)\}},$$

применимая только к  $SDD$ -матрицам, которую мы использовали при доказательстве теоремы 2.2.

В этой связи мы приводим следующую теорему, устанавливающую, что для  $SDD$ -матрицы  $A$  новая оценка (2.4) всегда не хуже, чем оценка Вараха.

**Теорема 2.4.** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , – матрица со строгим диагональным преобладанием. Тогда

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leq \frac{1}{\min_{i \in \langle n \rangle} \{|a_{ii}| - r'_i(A)\}}, \quad (2.20)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\min_{i \in \langle n \rangle} \{\mathcal{M}(A)e\}_i = \min_{i \in \langle n \rangle} \frac{|a_{ii}| - h_i(A)}{z_i(A)}.$$

**Доказательство.** Введем обозначение  $d = |D|e$ . Тогда, в силу (1.2') и (2.3'), мы имеем

$$\begin{aligned} d - h(A) &= |D|(|D| - |L|)^{-1} \mathcal{M}(A)e \\ &\geq \min_{i \in \langle n \rangle} (\mathcal{M}(A)e)_i |D|(|D| - |L|)^{-1} e = \min_{i \in \langle n \rangle} (\mathcal{M}(A)e)_i z(A). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь мы воспользовались теми фактами, что вектор  $\mathcal{M}(A)e$  положителен, поскольку  $A$  есть  $SDD$ -матрица, и что матрица  $|D|(|D| - |L|)^{-1}$  неотрицательна.

Итак, в силу (2.21) мы имеем

$$\frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leq \frac{1}{\min_{i \in \langle n \rangle} (\mathcal{M}(A)e)_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

что и доказывает неравенство (2.20).

Утверждение, касающееся случая равенства, очевидно.  $\square$

В завершение данной работы приведем результаты для численных примеров, рассмотренных в статье [5], дополнив их данными, полученными с помощью оценки теоремы 2.2.

Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -7 & 1 & -0.2 & 2 \\ 7 & 88 & 2 & -3 \\ 2 & 0.5 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 8 & 1 & -0.2 & 3.3 \\ 7 & 13 & 2 & -3 \\ -1.3 & 6.7 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & 9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.8 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0.2 & 2 \\ 1 & 21 & 1 & -3 \\ 2 & 0.5 & 6.4 & -2 \\ 0.5 & -1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 11 & -8 \\ -7 & -3 & 10 \end{bmatrix}, & A_6 &= \begin{bmatrix} 8 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -9 & 16 & -5 & -5 \\ -6 & -4 & 15 & -3 \\ -4.9 & -0.9 & -0.9 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Точные значения  $\|A_i^{-1}\|_\infty$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , и их верхние оценки представлены в таблице 1. Подчеркнем, что все данные, за исключением оценок (2.4), указанных в последнем столбце, заимствованы из работы [5].



Матрица	Класс	$\ A^{-1}\ _{\infty}$	Оценка Вараха	(2.1)	(2.2)	(2.4)
$A_1$	<i>SDD</i>	0.1921	0.6667	0.3805	0.5263	0.2632
$A_2$	<i>SDD</i>	0.2390	1	0.8848	0.6885	0.5365
$A_3$	<i>SDD</i>	0.8759	1.4286	1.8076	0.9676	0.9676
$A_4$	<i>SDD</i>	0.2707	0.5556	0.6200	0.7937	0.5556
$A_5$	<i>N</i>	1.1519	-	1.4909	2.4848	1.4138
$A_6$	<i>N</i>	0.4474	-	1.1557	0.5702	0.4928

Заметим, что, в соответствии с теоремами 2.3 и 2.4, новая оценка (2.4) либо превосходит как обе оценки (2.1) и (2.2) (для случая *N*-матриц), так и оценку Вараха (для *SDD*-матриц), либо, в худшем случае, совпадает с ними (для *SDD*-матрицы  $A_3$  оценка (2.4) совпадает с оценкой (2.2), а для *SDD*-матрицы  $A_4$  оценка (2.4) совпадает с оценкой Вараха).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц*. — Латвийский математический ежегодник, Рига (1966), 385–390.
2. Р. Мемке, П. А. Некрасовъ, *Решение линейной системы уравнений посредством последовательных приближений*. — Матем. сб. **16** (1892), 437–459.
3. O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1996.
4. D. W. Bailey, D. E. Crabtree, *Bounds on determinants*. — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 303–309.
5. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li. *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices*. — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
6. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale*. — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
7. A. Ostrowski, *Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen*. — Comment. Math. Helv. **30** (1956), 175–210.
8. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative*. — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
9. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix*. — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.

Kolotilina L. Yu. On bounding inverses to Nekrasov matrices in the infinity norm.

A new upper bound on the infinity norm of the inverse to a Nekrasov matrix, improving two recent bounds by L. Cvetković et al. [L. Cvetković,

P.-F. Dai, K. Doroslovački, and Y.-T. Li, Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices, *Appl. Math. Comput.*, **219**, 5020–5024 (2013)], is obtained. Also it is shown that for a strictly diagonally dominant matrix, the bound suggested improves the classical Varah upper bound.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Фонтанка 27, 191023  
Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: lilikona@mail.ru

Поступило 11 февраля 2013 г.