Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

Ю. К. Демьянович, Л. М. Романовский

СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВОЕ УКРУПНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ КУРАНТОВА ТИПА

Имеется большое число исследований всплескового (вэйвлетного) разложения числовых информационных потоков (см. [1, 2] и имеющуюся там библиографию). Большинство исследований относится к числовым потокам, ассоциированным с равномерной сеткой на вещественной оси. Всплесковые разложения потоков, связанных с неравномерными сетками, исследованы меньше. В многомерном случае в работе [3] рассмотрены всплесковые разложения. Локальные аппроксимации на многообразии рассмотрены в [4], однако всплесковые разложения потоков, связанных с неравномерной сеткой на многообразии, исследованы недостаточно. При поступлении исходного плотного информационного потока важно выделить из него основную информацию (основной поток) и иметь возможность его локально уточнить с помощью всплескового (уточняющего) потока. Поскольку исходный поток естественным образом ассоциирован с некоторой сеткой, то появляется задача укрупнения сетки, с которой ассоциирован основной поток. Заметим, что желательно рассматривать алгоритмы адаптивного локального укрупнения в зависимости от свойств исходного потока. В одномерном случае локальное укрупнение сетки не вызывает затруднений. В многомерном случае сеткой является совокупность вершин симплициального подразделения многообразия (см. [5]), и ее локальное укрупнение не всегда возможно (в том числе, и в двумерном случае на плоскости); таким образом, возникает задача найти варианты сеток и алгоритмов их локального укрупнения в многомерном случае.

В данной работе эта задача решается в двумерном случае применительно к областям на плоскости. Здесь рассматриваются сплайн-всплесковые разложения цепочек вложенных пространств курантова

Ключевые слова: сплайны, всплески, вэйвлеты, декомпозиция, калибровочные соотношения, реконструкция, укрупнение триангуляции.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 13-01-00096.

типа на неравномерной сетке в двумерной области. Упомянутые пространства определяются аппроксимационными соотношениями, триангуляцией и генерирующей вектор-функцией, а вложенность ассоциируется с укрупнением триангуляции. Здесь предлагается триангуляция, допускающая локальное укрупнение, и для соответствующего вложения пространств строится всплесковое разложение. Устанавливается, что предлагаемый алгоритм укрупнения обладает свойством инвариантности структуры и может быть использован для получения вэйвлет-пакета. Результаты проиллюстрированы на модельных примерах. Заметим, что полученные результаты могут быть распространены на двумерные цилиндр, тор и сферу.

1. Первоначальные обозначения

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(\mathbf{t})$ класса $C^1(\Omega)$; здесь Ω – некоторая область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Будем считать область Ω триангулированной; пусть $\mathcal{T}$ – соответствующий комплекс (возможно, криволинейный) с конечным или счетным множеством (открытых) треугольников $\mathbb{T}$. Множество вершин (нульмерный остов комплекса) обозначим X, а сами вершины $\mathbf{t}_j$, $j \in J_0$, где J_0 – некоторое (не более, чем счетное) множество индексов; множество X называется сеткой, а вершины $\mathbf{t}_j$ – узлами этой сетки. Множество вершин треугольника $\mathbb{T}$ обозначим $X_{\mathbb{T}}$, а множество индексов, соответствующих этим вершинам, обозначим $J_{\mathbb{T}}$; таким образом,

$$X_{\mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{t}_j \mid \mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T}), j \in J_0\}, \qquad J_{\mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T}), j \in J_0\},$$

где символ Cl означает замыкание множества в топологии пространства $\mathbb{R}^2$. Число треугольников, инцидентных каждому узлу, предполагается конечным.

Объединение $\mathfrak{S}_j$ замкнутых треугольников, инцидентных узлу $\mathbf{t}_j$, называется телом барицентрической звезды для вершины (узла) $\mathbf{t}_j$. Совокупность внутренних точек из $\mathfrak{S}_j$ обозначается $\mathfrak{S}'_j$. Некоторые узлы $\mathbf{t}_i$ могут оказаться на гранце области Ω; в этом случае $\mathbf{t}_i$ лежит на границе своей барицентрической звезды. Пусть J – множество индексов j, для которых $\mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j$ – внутренняя точка своей барицентрической звезды, $\mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j$; таким образом, $J \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \in J_0,\ \mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j\}$.

Матрицу с вектор-столбцами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ обозначим $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{f})$, а для квадратной матрицы $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ через $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначим ее определитель; i-ю компоненту вектора будем обозначать квадратными скобками с нижним индексом i, где $i = 1, 2, 3$; например, $[\mathbf{a}]_i$ означает i-ю компоненту вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, так что $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. Аналогичным образом, если B – матрица, то ее элементы будем иногда обозначать $[B]_{ij}$.

На каждом треугольнике $\mathbb{T}$ введем локальную нумерацию, используя числа $0, 1, 2$; соответствующее взаимно-однозначного отображение (биекцию) обозначим $\chi_{\mathbb{T}}$,

$$\chi_{\mathbb{T}}: \quad \{0, 1, 2\} \to J_{\mathbb{T}}.$$

Пусть

$$d_{\varphi,\mathbb{T}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)})),$$
$$d_{\varphi,\mathbb{T},i}(\mathbf{t}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)}) \;||\;'^{\,i}\; \varphi(\mathbf{t})),$$

где символ $||\;'^{\,i}\; \varphi(\mathbf{t})$ означает замену i-го столбца $\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(i)})$ в рассматриваемом определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$, $i = 0, 1, 2$.

Предположим, что выполнено условие

(A) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого треугольника $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ справедливо неравенство $|d_{\varphi,\mathbb{T}}| \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим функции $\omega_j(\mathbf{t})$, определяемые из соотношений

$$\sum_j \varphi(\mathbf{t}_j)\omega_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T},\ \mathbb{T} \subset \mathfrak{S}_j, \tag{1.1}$$

$$\omega_j(\mathbf{t}) = 0 \qquad \text{при} \quad \mathbf{t} \notin \mathfrak{S}_j. \tag{1.2}$$

Благодаря соотношению (1.2) тождества (1.1) можно переписать в виде

$$\sum_{\mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T})} \varphi(\mathbf{t}_j)\omega_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T}; \tag{1.3}$$

из предположения (A) следует, что функции $\omega_j(\mathbf{t})$ однозначно определены на всех треугольниках $\mathbb{T}$ подразделения $\mathcal{T}$. Вектор-функция $\varphi(t)$ называется *генератором* (генерирующей функцией) семейства функций $\{\omega_j\}$.

Из (1.3) получаем

$$\omega_{\chi_{\mathbb{T}}(i)}(\mathbf{t}) = d_{\varphi,\mathbb{T},i}(\mathbf{t})/d_{\varphi,\mathbb{T}} \qquad \mathbf{t} \in \mathbb{T} \quad \forall i \in \{0, 1, 2\},$$

так что, используя соотношение (1.2), выводим

$$\omega_j(\mathbf{t}) = \begin{cases} d_{\varphi,\mathbb{T},\chi_{\mathbb{T}}^{-1}(j)}(\mathbf{t})/d_{\varphi,\mathbb{T}} & \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T} \subset \mathfrak{S}_j, \\ 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T} & \text{для} \quad \mathbb{T} \cap \mathfrak{S}_j = \varnothing, \ \mathbb{T} \in \mathfrak{T}. \end{cases} \tag{1.4}$$

2. Вспомогательные утверждения

Предположм, что векторы $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ линейно независимы, $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^2$. Обозначим $\mathcal{L}$ множество точек $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению

$$\det\left(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)\right) = 0. \tag{2.1}$$

Очевидно, что $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathcal{L}$.

Лемма 1. *Если точка $\overline{\mathbf{t}}_0$ принадлежит $\mathcal{L}$, а $\overline{\mathcal{L}}$ – множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0, \tag{2.2}$$

то $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ и предположения $\overline{\mathbf{t}}_0 \in \mathcal{L}$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\varphi(\overline{\mathbf{t}}_0) = \alpha_0 \varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_1 \varphi(\mathbf{t}_1).$$

Пусть $\mathbf{t}_* \in \mathcal{L}$; тогда

$$\det\left(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)\right) = 0. \tag{2.3}$$

Подставляя точку $\mathbf{t}_*$ в левую часть уравнения (2.2), получаем

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = \det(\varphi(\mathbf{t}_*), \alpha_0\varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_1\varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_1)).$$

Последнее выражение ввиду свойств определителя и соотношения (2.3) равно нулю. Итак, $\mathbf{t}_* \in \overline{\mathcal{L}}$. □

Следствие 1. *Если точки $\overline{\mathbf{t}}_0, \overline{\mathbf{t}}_1$ принадлежат $\mathcal{L}$, а $\overline{\mathcal{L}}$ – множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_1)) = 0,$$

то $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$; если $\varphi(\overline{t}_0)$ и $\varphi(\overline{t}_1)$ линейно независимы, то $\mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ совпадают.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Пусть $\mathbf{t}_* \in \mathcal{L}$; заменим в определителе $\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_0), \varphi(\overline{\mathbf{t}}_1))$ вектор-столбцы $\varphi(\overline{\mathbf{t}}_s)$ суммами $\alpha_{0s}\varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_{1s}\varphi(\mathbf{t}_1)$, $s = 0, 1$, а затем отбросим слагаемые, в которых определители имеют одинаковые столбцы. В результате придем к сумме слагаемых, в каждом из которых (с точностью до порядка столбцов) присутствует равный нулю определитель $\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\mathbf{t}_j), \varphi(\mathbf{t}_1))$. Последнее утверждение леммы очевидно. □

Введем обозначения

$$\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)), \tag{2.4}$$

$$B_\delta(\mathbf{t}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{t} \mid ||\mathbf{t} - \mathbf{t}_0||_{\mathbb{R}^2} < \delta\}; \tag{2.5}$$

в случае, когда положение центра круга значения не имеет, для него используется символ B_δ без указания его центра.

Пусть

$$\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2, -[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1)^T. \tag{2.6}$$

В дальнейшем символ D_i означает первую частную производную по i-й координате $[\mathbf{t}]_i$ переменной $\mathbf{t}$, а символ $\nabla_{\mathbf{t}}$ означает градиент, $\nabla_{\mathbf{t}} \stackrel{\text{def}}{=} (D_1, D_2)$.

Лемма 2. *Если $\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \in B_\delta(\mathbf{t}_0) \subset \Omega$, то при $\delta \to 0$ справедлива формула*

$$\nabla_{\mathbf{t}}\psi(\mathbf{t}_0) = -\,\mathbf{g} \cdot \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + \widetilde{\mathbf{o}}(\delta), \tag{2.7}$$

где через $\widetilde{\mathbf{o}}(\tau)$ обозначаются двухкомпонентные вектор-функции со свойством

$$\lim_{\tau \to 0} ||\widetilde{\mathbf{o}}(\tau)||_{\mathbb{R}^2}/\tau = 0.$$

Доказательство. Дифференцированием функции $\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1)$ (см. (2.4)) по переменной $[\mathbf{t}]_1$ получаем

$$\begin{aligned} D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= \det(D_1\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) \\ &= \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0), \\ &\qquad \varphi(\mathbf{t}_0) + D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\mathbf{o}(1)$ и $\mathbf{o}(\delta)$ означают трехкомпонентные вектор-функции, для которых $\lim_{\delta\to 0} ||\mathbf{o}(1)||_{\mathbb{R}^3} = 0$ и $\lim_{\delta\to 0} ||\mathbf{o}(\delta)||_{\mathbb{R}^3}/\delta = 0$. Используя элементарные преобразования столбцов (не меняющие значение определителя), из (2.8) найдем

$$D_1\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0)+\mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$

$$D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big)$$

$$= \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0)+\mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$

$$-\mathbf{o}(1)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big).$$

Отсюда получаем

$$D_1\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2\Big) + o(\delta)$$

$$= [\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2 \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big) + o(\delta),$$

так что

$$D_1\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = -[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2 \det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big) + o(\delta). \quad (2.9)$$

Аналогичным образом имеем

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = \det\Big(D_2\varphi(\mathbf{t}_0)+\mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$

$$\varphi(\mathbf{t}_0) + D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1 + \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big),$$

и дальше с помощью элементарных преобразований столбцов определителя выводим

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = \det\Big(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0),$$
$$\mathrm{D}_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1 - \mathbf{o}(1)[\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\Big).$$

Отсюда находим

$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = [\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0]_1 \det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big) + o(\delta). \quad (2.10)$$

Благодаря обозначению (2.6), формулы (2.9) и (2.10) можно записать в виде

$$D_1\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = [\mathbf{g}]_1 \det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big) + o(\delta),$$
$$D_2\psi(\mathbf{t},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1) = [\mathbf{g}]_2 \det\Big(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \mathrm{D}_2\varphi(\mathbf{t}_0)\Big) + o(\delta);$$

таким образом, формула (2.7) доказана. □

Предположим, что выполнено условие

(C_ε) существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что

$$|\det(\varphi(\mathbf{t}), D_1\varphi(\mathbf{t}), D_2\varphi(\mathbf{t}))| \geqslant \varepsilon \quad \forall \mathbf{t} \in Cl(\Omega).$$

Лемма 3. *Если $\varphi \in C^1(Cl(\Omega))$ и $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \bigcap \Omega$, то при $\delta \to 0$ справедлива формула*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2)) = \det(\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2-\mathbf{t}_0)$$
$$\times \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + o(\delta^2), \quad (2.11)$$

где B_δ – любой шар радиуса $\delta > 0$, имеющий непустое пересечение с областью Ω. Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ – компакт и выполнено условие (C_ε), то каково бы ни было число $c > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ такое, что при любых векторах $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \bigcap \Omega$, удовлетворяющих неравенству

$$|\det(\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2-\mathbf{t}_0)| \geqslant c\delta^2, \quad (2.12)$$

верно соотношение

$$|\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2))| \geqslant \varepsilon/2.$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$\varphi(\mathbf{t}_i) = \varphi(\mathbf{t}_0) + \sum_{j=1}^{2} D_j\varphi(x_0)[\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_0]_j + \mathbf{o}(\delta), \quad i = 1, 2,$$

так что находим

$$\begin{aligned}
&\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2)) \\
&\quad = \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta), \\
&D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) = \det(\varphi(\mathbf{t}_0), \\
&D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1, D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) \\
&\quad + \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2, D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 \\
&\quad + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) + o(\delta^2).
\end{aligned}$$

Вынося множитель второго столбца за знак соответствующего определителя и проводя элементарные преобразования, последовательно выводим

$$\begin{aligned}
&\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_2), \varphi(\mathbf{t}_2)) \\
&= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) \\
&\quad + [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 \\
&\quad + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) + o(\delta^2) \\
&= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2) \\
&\quad + [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1) + o(\delta^2) \\
&= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 [\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) \\
&\quad + [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 [\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)) + o(\delta^2) \\
&= \det(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0) \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + o(\delta^2).
\end{aligned}$$

Формула (2.11) установлена. Второе утверждение получается, если учесть равномерную малость остатка в упомянутой формуле. Лемма доказана. □

Следствие 2. *Если выполнены условия леммы* 3 *и* $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in B_\delta \bigcap \Omega$, $\mathbf{t}' \neq \mathbf{t}''$, *то* $\varphi(\mathbf{t}')$ *и* $\varphi(\mathbf{t}'')$ *– линейно независимые векторы.*

Доказательство вытекает из (2.11). □

Лемма 4. *Если* $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ *– компакт, выполнено условие* (C_ε), *а множество* $\mathcal{L}$ *задается уравнением* (2.1), *то каково* *бы ни было число $c > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ такое, что при любых векторах $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \bigcap \Omega$, удовлетворяющих неравенству*

$$||\mathbf{g}|| \geqslant c\delta, \tag{2.13}$$

множество $\mathcal{L} \bigcap B_\delta \bigcap \Omega$ представляет собой простую кривую класса C^S.

Доказательство сводится к применению леммы 2 и теоремы о неявно заданной функции. □

Пусть T – прямолинейный треугольник с вершинами $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$. Радиусы вписанного и описанного кругов для треугольника T обозначим r_T и R_T соответственно.

Введем условие

(D_η) существует константа $\eta > 0$ такая, что $r_T/R_T \geqslant \eta$.

Замечание 1. Две стороны треугольника T, инцидентные одной вершине, назовем *соседними.* Условие (D_η) эквивалентно условию: углы между соседними сторонами треугольника T лежат в интервале $(\epsilon_\eta, \pi - \epsilon_\eta)$, где $\epsilon_\eta \in (0, \pi/2)$. Если выполнено условие (D_η), то при некотором числе $c > 0$ справедливы неравенства (2.12) и (2.13).

3. Непрерывность функций курантова типа

Теорема 1. *Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ – компакт и выполнено условие (C_ε), то каково бы ни было $\eta > 0$, найдется $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ такое, что для любой прямолинейной триангуляции $\mathcal{T}$, все треугольники T которой удовлетворяют условию (D_η), существует криволинейная триангуляция $\mathfrak{T}$ с теми же вершинами, криволинейные треугольники $\mathbb{T}$ которой определяются кривыми класса C^S, задаваемыми уравнениями вида* (2.1).

Доказательство легко получается применением лемм 1–4. □

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *выполнено условие (A); на криволинейной триангуляции $\mathfrak{T}$ функции ω_j определены и непрерывны в области $Cl(\Omega)$.*

Доказательство. Для доказательства заметим, что согласно лемме 3 условие (A) выполнено, и потому функции ω_j определены однозначно. Используя формулы (1.4), видим, что функция ω_j обращается в нуль на границе своего носителя. Применяя аппроксимационные тождества (1.1), отсюда выводим непрерывность функций ω_j на сторонах треугольников. В остальных точках области Ω непрерывность вытекает из непрерывности вектор-функции $\varphi(\mathbf{t})$ и из формул (1.4). $\square$

4. Укрупнение триангуляции. Калибровочные соотношения

Дальше будем считать, что выполнены предположения предыдущего пункта. Из условия (C_ε) следует, что система функций $[\varphi]_0$, $[\varphi]_1$, $[\varphi]_2$ линейно независимая на любом треугольнике $\mathbb{T}$ подразделения $\mathcal{T}$; благодаря этому система функций $\{\omega_j\}_{j\in J}$ также является линейно независимой системой.

Рассмотрим систему функционалов $\{g_i\}_{i\in J}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами

$$\langle g_i, u\rangle = u(\mathbf{t}_i) \quad \forall i \in J \quad \forall u \in C(\Omega). \tag{4.1}$$

Поскольку носителем функции ω_j служит тело барицентрической звезды $\mathfrak{S}_j$, то ввиду непрерывности ω_j на области Ω ее значения на границе множества $\mathfrak{S}_j$ равны нулю. Внутри этого множества лежит узел $\mathbf{t}_j$; остальные узлы сетки X лежат на границе или вне носителя функции ω_j. Ввиду этого

$$\langle g_i, \omega_j\rangle = 0 \quad i \neq j \quad \forall i, j \in J. \tag{4.2}$$

Используя свойство (4.2) в тождестве (1.3), записанном для $\mathbf{t} = \mathbf{t}_j$, имеем

$$\langle g_j, \omega_j\rangle = 1 \quad \forall j \in J. \tag{4.3}$$

Соотношения (4.2)–(4.3) показывают, что формулы (4.1) задают продолжение на $C(\Omega)$ системы функционалов, биортогональной системе функций $\{\omega_j\}_{j\in J}$.

Рассмотрим триангуляцию $\widetilde{\mathcal{T}}$ области Ω, которая является укрупнением подразделения $\mathcal{T}$.[1] Будем считать, что здесь справедливы предположения предыдущего пункта для исходной триангуляции; учитывая теорему 1, а также используя лемму 1 и следствие из нее, построим триангуляцию $\widetilde{\mathcal{T}}$ таким образом, чтобы стороны треугольников подразделения $\widetilde{\mathcal{T}}$ определялись уравнениями вида (2.1).

[1] Укрупнением $\widetilde{\mathcal{T}}$ триангуляции $\mathcal{T}$ называем такую триангуляцию, измельчением которой является $\mathcal{T}$ (понятие измельчения триангуляции известно).

Для подразделения $\widetilde{\mathfrak{T}}$ рассмотрим построения, аналогичные тем, которые были сделаны для подразделения $\mathfrak{T}$; для удобства читателя повторим эти построения.

Нульмерный остов (множество вершин) триангуляции $\widetilde{\mathfrak{T}}$ обозначим $\widetilde{X}$, а сами вершины – символами $\widetilde{\mathbf{t}}_j$, $j \in \widetilde{J}$, где $\widetilde{J}$ – некоторое множество индексов; множество $\widetilde{X}$ называется сеткой для нового подразделения $\widetilde{\mathfrak{T}}$, а вершины $\widetilde{\mathbf{t}}_j$ – узлами этой сетки. Телом барицентрической звезды $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$ вершины (узла) $\widetilde{\mathbf{t}}_j$ является объединение замыканий треугольников, инцидентных этому узлу,

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\widetilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\widetilde{\mathbb{T}})} Cl(\widetilde{\mathbb{T}}).$$

Пусть множество индексов, соответствующих вершинам треугольника $\widetilde{\mathbb{T}}$, обозначено $\widetilde{J}_{\mathbb{T}}$,

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\mathbb{T}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \widetilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\widetilde{\mathbb{T}}), j \in \widetilde{J}\}.$$

На каждом треугольнике $\widetilde{\mathbb{T}}$, как и прежде, вводится локальная нумерация числами $0, 1, 2$; обозначим соответствующую биекцию $\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}$,

$$\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}: \quad \{0, 1, 2\} \to \widetilde{J}_{\widetilde{\mathbb{T}}}.$$

Положим

$$\widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}}} \stackrel{\text{def}}{=} \det\left(\varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(0)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(1)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(2)})\right),$$
$$\widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}},i}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \det\left(\varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(0)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(1)}), \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(2)}) \mid\mid'^{\,i} \varphi(\mathbf{t})\right),$$

где символ $\mid\mid'^{\,i} \varphi(\mathbf{t})$, как и прежде, означает замену i-го столбца $\varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(i)})$ в последнем определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$, $i = 0, 1, 2$.

Рассмотрим функции $\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t})$, определяемые из соотношений

$$\sum_{\widetilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\widetilde{\mathbb{T}})} \varphi(\widetilde{\mathbf{t}}_j)\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}}, \ \ \widetilde{\mathbb{T}} \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_j,$$
$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_j.$$

Из этих соотношений при сделанных предположениях функции $\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t})$ определяются однозначно:

$$\widetilde{\omega}_{\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}(i)}(\mathbf{t}) = \widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}},i}(\mathbf{t}) / \widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}}} \qquad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}} \quad \forall i \in \{0, 1, 2\},$$

откуда легко выводим

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = \widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}},\widetilde{\chi}_{\widetilde{\mathbb{T}}}^{-1}(j)}(\mathbf{t})/\widetilde{d}_{\varphi,\widetilde{\mathbb{T}}} \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}} \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_j,$$

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t} \in \widetilde{\mathbb{T}} \quad \text{для} \quad \mathbb{T} \cap \widetilde{\mathfrak{S}}_j = \varnothing, \quad \widetilde{\mathbb{T}} \in \widetilde{\mathfrak{T}}.$$

Ввиду упомянутых предположений функции $\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t})$ непрерывны в области Ω.

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\widetilde{J}}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами

$$\langle \widetilde{g}_i, u\rangle = u(\widetilde{\mathbf{t}}_i) \qquad \forall i \in \widetilde{J} \quad \forall u \in C(\Omega). \tag{4.4}$$

Аналогично формулам (4.2)–(4.3) имеем соотношения биортогональности

$$\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j} \qquad \forall i,j \in \widetilde{J}.$$

Будем считать множества J и $\widetilde{J}$ упорядоченными; введем вектор-столбцы

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_j)_{j\in J}, \quad g \stackrel{\text{def}}{=} (g_i)_{i\in J}, \quad \widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_j)_{j\in\widetilde{J}}, \quad \widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{g}_i)_{i\in\widetilde{J}}$$

и рассмотрим матрицу $\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_{i,j})_{i\in\widetilde{J},j\in J}$ вида

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (g\widetilde{\omega}^T)^T, \qquad \mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \widetilde{\omega}_i\rangle, \qquad i \in \widetilde{J}, \quad j \in J. \tag{4.5}$$

Дальше понадобится следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *и при предположениях*

$$[\mathfrak{P}\omega]_j(\mathbf{t}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{t} \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_j \quad \forall j \in \widetilde{J} \tag{4.6}$$

справедливо соотношение

$$\widetilde{\omega}(\mathbf{t}) \equiv \mathfrak{P}\omega(\mathbf{t}). \tag{4.7}$$

Доказательство. В рассматриваемых условиях доказываемое утверждение вытекает из теорем 4 и 5 работы [6]. □

Покажем, что в рассматриваемом случае справедливы предположения (4.6). Для этого заметим, что j-й столбец ($j \in \widetilde{J}$) матрицы $g\widetilde{\omega}^T$ получается применением функционалов g_i, $i \in J$, к функции $\widetilde{\omega}_j$. Ввиду непрерывности функции $\widetilde{\omega}_j$ и в соответствии с определением (4.4) функционалов g_i, значения на $\widetilde{\omega}_j$ тех функционалов, которые соответствуют узлам $\mathbf{t}_i$, лежащим на границе или вне носителя $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$ функции $\widetilde{\omega}_j$, равны нулю. Таким образом, неравными нулю могут быть лишь значения на $\widetilde{\omega}_j$ тех функционалов g_i, которые соответствуют узлам $\mathbf{t}_i$, лежащим внутри барицентрической звезды $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$; функции ω_i, соответствующие только что упомянутым узлам (по построению триангуляции $\widetilde{\mathfrak{T}}$), непрерывны и имеют носители, содержащиеся в барицентрической звезде $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$. Итак, $\operatorname{supp} \sum\limits_{i\in J} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle \omega_i \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_j$; последнее означает, что выполнено условие (4.6). Учитывая непрерывность рассматриваемых функций в области Ω, видим, что установлено следующее утверждение.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 1 *при* $\mathbb{T} \in \mathfrak{T}$ *для систем* ω_j *и* $\widetilde{\omega}_i$ *справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_j(\mathbf{t}) \equiv \sum_{i\in J_{\mathbb{T}}} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle \omega_i(\mathbf{t}) \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{T}.$$

5. Вложенность пространств и всплесковое разложение

Рассмотрим пространства $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\mathcal{L}(\{\omega_i\}_{i\in J})$ и $\widetilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\mathcal{L}(\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\widetilde{J}})$, где символ $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку функций, заключенных в фигурные скобки, а символ Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Ввиду теоремы 4 верно соотношение $\widetilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S} \subseteq C(\Omega)$. Пусть $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{g}\omega^T$ – матрица с элементами $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j\rangle$, $i \in \widetilde{J}$, $j \in J$.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 1 *матрица* $\mathfrak{Q}$ *является левой обратной к матрице* $\mathfrak{P}^T$.

Доказательство. Транспонируем соотношение (4.7) и умножим его на одностолбцовую матрицу $\widetilde{g}$ слева; ввиду очевидного равенства $\widetilde{g}\widetilde{\omega}^T = I$ (где I – единичная матрица) получаем $I = \widetilde{g}\omega^T\ \mathfrak{P}^T$, что и требовалось. Теорема доказана. $\square$

Определим линейную операцию проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{S}$ на $\widetilde{\mathbb{S}}$ равенством[2]

$$\mathcal{P}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\widetilde{J}} \langle \widetilde{g}_i, u\rangle\, \widetilde{\omega}_i \quad \forall u \in \mathbb{S} \tag{5.1}$$

[2]Фигурирующие дальше бесконечные суммы понимаются в топологии поточечной сходимости (легко видеть, что при фиксированном $\mathbf{t} \in \Omega$ каждая из этих сумм имеет конечное число ненулевых слагаемых).

и рассмотрим линейное пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{I} - P)\,\mathbb{S}$, где $\mathcal{I}$ – тождественная операция. Очевидно, что пространство $\mathbb{S}$ может быть представлено в виде прямой суммы: $\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dot{+} \mathbb{W}$. Эта формула дает искомое всплесковое разложение пространства $\mathbb{S}$; первое слагаемое в этом разложении называется *основным* пространством, а второе – *всплесковым* пространством.

Если $u \in \mathbb{S}$ и $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbb{S}}$, то с некоторыми коэффициентами $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in J$, и $\widetilde{c}_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in \widetilde{J}$, верны представления $u = \sum\limits_{j\in J} \omega_j c_j$ и $\widetilde{u} = \sum\limits_{j\in \widetilde{J}} \widetilde{\omega}_j \widetilde{c}_j$; вводя вектор-столбцы $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_j)_{j\in J}$ и $\widetilde{\mathbf{c}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{c}_j)_{j\in \widetilde{J}}$, запишем эти соотношения в виде $u = \omega^T \mathbf{c}$, $\widetilde{u} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{\mathbf{c}}$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Если элемент* $u \in \mathbb{S}$ *представлен в виде суммы* $u = \widetilde{u} + w$, $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbb{S}}$, $w \in \mathbb{W}$, *то для векторов* $\widetilde{\mathbf{c}}$, $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{b}$ *таких, что* $\widetilde{u} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{\mathbf{c}}$, $u = \omega^T \mathbf{c}$, $w = \omega^T \mathbf{b}$, *справедливы формулы декомпозиции*

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c} \tag{5.2}$$

и формулы реконструкции

$$\mathbf{c} = \mathfrak{P}^T \widetilde{\mathbf{c}} + \mathbf{b}. \tag{5.3}$$

Доказательство.[3] Из определения (5.1) для $u = \omega^T \mathbf{c}$ имеем

$$\widetilde{u} = \mathcal{P}u = \sum_{i\in \widetilde{J}} \widetilde{\omega}_i \sum_{j\in J} \langle \widetilde{g}_i, \omega_j \rangle c_j = \widetilde{\omega}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c},$$

откуда благодаря единственности разложения по базису $\widetilde{\omega}$ выводим первое из соотношений (5.2). Из (4.5) получаем $\mathfrak{P}^T = g\widetilde{\omega}^T$. Переписывая представление $u = \widetilde{u} + w$ в виде $\omega^T \mathbf{c} = \widetilde{\omega}^T \widetilde{\mathbf{c}} + \omega^T \mathbf{b}$ и умножая последнее соотношение слева на g, а затем используя определение матрицы $\mathfrak{Q}$, находим (5.3). Благодаря применению в формуле (5.3) только что установленного первого из соотношений (5.2), получаем второе соотношение в (5.2). Теорема доказана. □

Матрица $\mathfrak{Q}$ называется *матрицей продолжения*, а матрица $\mathfrak{P}$ – *матрицей сужения*.

[3]Доказательство аналогично доказательству теоремы 7 из [6] и приводится здесь для удобства читателя.

6. О матрицах всплескового разложения пространств аппроксимаций курантова типа

Рассмотрим сначала матрицу $\mathfrak{P}$, обозначая ее элементы $(\mathfrak{p}_{ji})$: согласно определению $\mathfrak{P}^T = g\widetilde{\omega}^T$, так что $\mathfrak{p}_{ji} = \langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle$, $i \in J$, $j \in \widetilde{J}$.

Ввиду определения (4.4) с учетом расположения носителя функции $\widetilde{\omega}_j$ и принимая во внимание непрерывность этой функции, приходим к выводу, что в j-м столбце матрицы $\mathfrak{P}^T$ ненулевыми окажутся разве лишь те элементы p_{ji} с номерами $i \in J$ из рассматриваемого столбца, которым соответствуют узлы $\mathbf{t}_i$, являющиеся внутренними точками упомянутого носителя, т.е. внутренними точками тела звезды $\widetilde{\mathfrak{S}}_j$: $\mathbf{t}_i \in \widetilde{\mathfrak{S}}'_j$. Итак,

$$\mathfrak{p}_{ji} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t}_i \notin \widetilde{\mathfrak{S}}'_j. \tag{6.1}$$

$$[\mathfrak{P}\mathbf{c}]_j = \sum_{\substack{i \in J, \\ \mathbf{t}_i \in \mathfrak{S}'_j}} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j \rangle \mathbf{c}_i. \tag{6.2}$$

Обратимся теперь к матрице $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}_{j'k})_{j' \in \widetilde{J}, k \in J}$, где $\mathfrak{q}_{j'k} = \langle \widetilde{g}_{j'}, \omega_k \rangle$; очевидно, что в каждой строке этой матрицы имеется лишь одна единица, а остальные элементы – нули: в строке с номером $j' \in \widetilde{J}$ единица находится на том месте, номер k которого является номером удаляемой вершины $\mathbf{t}_k$ исходной триангуляции $\mathcal{T}$. Номерам вершин укрупненной триангуляции $\widetilde{\mathcal{T}}$ поставим в соответствие номера вершин исходной триангуляции $\mathcal{T}$ и это соответствие обозначим ϑ; итак,

$$\vartheta: \quad \widetilde{J} \to J, \quad \widetilde{\mathbf{t}}_j = \mathbf{t}_{\ \vartheta(j)}. \tag{6.3}$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathfrak{q}_{j'k} = \delta_{\vartheta(j'),k} \quad j\,' \in \widetilde{J}, \quad k \in J. \tag{6.4}$$

Непосредственным вычислением покажем, что произведение $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$ представляет собой единичную матрицу. Имеем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{j'j} = \sum_{k \in J} \mathfrak{q}_{j'k}\mathfrak{p}_{jk} = \sum_{k \in J} \delta_{\vartheta(j'),k}\mathfrak{p}_{jk} = \mathfrak{p}_{j\vartheta(j')}. \tag{6.5}$$

Ввиду соотношений (6.3) находим

$$\mathbf{t}_{\vartheta(j')} \in \widetilde{\mathfrak{S}}'_j \quad \Longleftrightarrow \quad j' = j,$$

так что из (6.5) благодаря соотношениям (4.1) и (4.5) получаем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{j'j} = \delta_{j',j};$$

последнее соответствует тому, что матрица $\mathfrak{Q}$ – левая обратная к матрице $\mathfrak{P}^T$ (см. теорему 5).

Теорема 7. *В условиях теоремы* 1 *формулы декомпозиции* (5.2) *могут быть записаны в виде*

$$\widetilde{c}_j = c_{\vartheta(j)} \quad \forall j \in \widetilde{J}, \tag{6.6}$$

$$b_i = c_i - \sum_{\substack{j\in\widetilde{J},\\ \mathbf{t}_i\in\widetilde{\mathfrak{S}}'_j}} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle c_{\vartheta(j)} \quad \forall i \in J, \tag{6.7}$$

а формулам реконструкции (5.3) *можно придать форму*

$$c_i = \sum_{\substack{j\in\widetilde{J},\\ \mathbf{t}_i\in\widetilde{\mathfrak{S}}'_j}} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle \widetilde{c}_j + b_i \quad \forall i \in J. \tag{6.8}$$

Доказательство. Соотношения (6.6) получаются применением свойства (6.4) к первой из формул (5.2).

Для второй формулы (5.2) с учетом соотношения (6.2) получаем

$$b_i = c_i - [\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{c}]_i = c_i - [\mathfrak{P}^T\widetilde{\mathbf{c}}]_i = c_i - \sum_{\substack{j\in\widetilde{J},\\ \mathbf{t}_i\in\widetilde{\mathfrak{S}}'_j}} \langle g_i, \widetilde{\omega}_j\rangle \widetilde{c}_j \quad \forall i \in J,$$

откуда, учитывая (6.6), выводим (6.7). Формулы реконструкции (6.8) очевидным образом получаются из (6.7). □

7. Триангуляция, допускающая локальное укрупнение

В дальнейших рассуждениях ограничиваемся прямолинейной триангуляцией и кусочно-линейной аппроксимацией Куранта, т.е. в качестве генерирующей функции берем $\varphi(\mathbf{t}) = (1, [\mathbf{t}]_1, [\mathbf{t}]_2)^T$.

Для определения подходящего варианта сплайн-всплескового разложения важно иметь возможность локально укрупнять триангуляцию (т.е. укрупнять ее лишь в некоторой подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$, оставляя нетронутыми треугольники вне этой подобласти); при этом результирующая триангуляция области Ω должна оставаться правильной (т.е. любая вершина любого треугольника не должна лежать на стороне другого треугольника). Оказывается, не каждую триангуляцию можно локально укрупнять.

В этом пункте рассмотрена локально укрупняемая триангуляция, причем в области укрупнения укрупненная триангуляция снова может укрупняться; таким образом, предлагаемый алгоритм укрупнения обладает рекуррентными свойствами: укрупнение можно проводить многократно. Предлагаемый далее алгоритм применим не только к плоской области, но и к некоторым двумерным поверхностям: он годится для аппроксимаций курантова типа в случае цилиндрической поверхности, тора и сферы.

Сначала рассмотрим правильную триангуляцию плоскости $\{t \mid t = (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ (эта триангуляция может состоять из конечного или бесконечного числа треугольников). Нас интересуют локальные укрупнения исходной правильной триангуляции (т.е. объединения конечного числа треугольников), приводящие снова к правильной триангуляции.

Для описания триангуляции будем использовать таблицу инциденций, каждая строка которой описывает треугольник перечнем инцидентных ему вершин. Иногда рассматривается таблица инциденций, получающаяся объединением нескольких таблиц инциденций. Заметим, что порядок объединения таблиц несуществен; несуществен также порядок строк и порядок следования вершин в строках рассматриваемых таблиц.

Введем обозначения

$$\mathbb{Z}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(i,j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i,2j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i+1,2j+1) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}, \quad \widehat{\mathbb{Z}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}} \cup \mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}}.$$

Пусть фиксированы числа $h' > 0, h'' > 0$. Обозначим $\mathbf{r}_{i,j}$ точки с координатами (ih', jh''), $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, и рассмотрим прямоугольники вида $\Pi_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid ih' \leqslant x \leqslant (i+2)h',\ jh'' \leqslant x \leqslant (j+2)h''\}$, где $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$.

Пусть триангуляция $\mathcal{T}^*$ описывается трехстолбцовой таблицей (с бесконечным числом строк), получающейся объединением таблиц

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{r}_{i,j+1} \\ \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{r}_{i,j+1} \end{matrix} \right\|$$

при $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$; здесь строка $\mathbf{r}_{i,j}\ \mathbf{r}_{i+1,j}\ \mathbf{r}_{i,j+1}$ означает, что рассматривается треугольник с вершинами $\mathbf{r}_{i,j}$, $\mathbf{r}_{i+1,j}$, $\mathbf{r}_{i,j+1}$, а строка $\mathbf{r}_{i+1,j+1}\ \mathbf{r}_{i+1,j}\ \mathbf{r}_{i,j+1}$ означает, что рассматривается треугольник, у которого вершинами служат точки $\mathbf{r}_{i+1,j+1}$, $\mathbf{r}_{i+1,j}$, $\mathbf{r}_{i,j+1}$. Легко видеть, что триангуляция $\mathcal{T}^*$ не допускает локального укрупнения с сохранением правильности; дальше предлагается триангуляция, свободная от этого недостатка.

Пусть $\mathbb{X}^*$ – некоторое (конечное или бесконечное) множество пар четных целочисленных индексов: $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$; рассмотрим замкнутую область

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{X}^*} \Pi_{i,j}$$

(в частности, если $\mathbb{X}^* = \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$, то Ω совпадает со всей плоскостью $\mathbb{R}^2$).

Через $\mathbb{X}$ обозначим множество индексов $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}} \cup \mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}}$ таких, что точки $\mathbf{r}_{i,j} = (ih', jh'')$ лежат в Ω; только что упомянутые точки $\mathbf{r}_{i,j}$ будем называть узлами исходной сетки, они являются вершинами определяемой ниже исходной триангуляции.

Узел $\mathbf{r}_{2i_0,2j_0}$ называется внутренним узлом для Ω, если он является внутренней точкой в Ω (таким образом, в Ω содержатся прямоугольники $\Pi_{i,j}$ при $i \in \{2i_0, 2i_0-2\}$, $j \in \{2j_0, 2j_0-2\}$; здесь же заметим, что вводимое понятие относится только к узлам с четными индексами). Множество пар $(i,j) \in \mathbb{X}^*$, для которых $\mathbf{r}_{i,j}$ – внутренний узел, обозначим $\mathbb{X}_0$. Очевидно, что

$$\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}^* \subset \mathbb{X} \subset \widehat{\mathbb{Z}}^2.$$

Рассмотрим триангуляцию, которая получается объединением таблиц

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \end{matrix} \right\| \qquad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}. \tag{7.1}$$

Укрупнение триангуляции будем производить объединением двух соседних (т.е. имеющих общую сторону) треугольников. Полученные в результате треугольники будем называть *укрупненными* треугольниками.

Не нарушая общности, в дальнейшем предполагаем, что $\mathbf{r}_{0,0}$ – внутренний узел в Ω, т.е. $(0,0) \in \mathbb{X}_0$. Рассмотрим такое укрупнение, при котором вершину $\mathbf{r}_{0,0}$ окружают лишь укрупненные треугольники. Для этого заменим перечисленные ниже соседние треугольники на треугольник, получающийся их объединением. Эквивалентное преобразование таблицы инциденций состоит в том, что из нее исключаются строки, соответствующие объединяемым треугольникам и добавляются строки, соответствующие результатам такого объединения – укрупненным треугольникам. Как было отмечено выше, расположение строк в таблице инциденций не существенно, и потому строки могут быть добавлены между любыми строками упомянутой таблицы. Таким образом, достаточно перечислить выбрасываемые строки таблицы и указать вставляемые в нее строки. Однако для наглядности преобразования будем задавать таблицы инциденций указанием двух строк заменяемых треугольников (в левой от стрелки части формулы) и указанием строки укрупненного треугольника (в правой части формулы).

Итак, укрупнение зададим следующим преобразованием таблицы инциденций:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,1} \\ \mathbf{r}_{-2,2} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.2}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{-2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-1,1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-1,1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-2,2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.3}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{1,1} \\ \mathbf{r}_{2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{1,1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{2,2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.4}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{2,2} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.5}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,-1} \\ \mathbf{r}_{2,-2} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,-1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,-2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.6}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{1,-1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{1,-1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{2,-2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.7}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-1,-1} \\ \mathbf{r}_{-2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-1,-1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{matrix} \right\|, \tag{7.8}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{-2,-2} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,-1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,-1} \end{matrix} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{matrix} \right\|. \tag{7.9}$$

Легко видеть, что в результате получается правильная триангуляция.

Исходную триангуляцию (7.1) обозначим $\mathcal{T}$, описанную только что укрупненную (согласно формулам (7.2) – (7.9)) триангуляцию обозначим $\mathcal{T}_{\mathbf{0}}$, а переход от исходной триангуляции к укрупненной обозначим $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathbf{0}}]$.

8. Структура барицентрических звезд исходной триангуляции

Для построения аппроксимации Куранта важна структура барицентрических звезд, соответствующих вершинам рассматриваемой триангуляции.

Для исходной триангуляции имеется два типа барицентрических звезд: к первому типу отнесем барицентрические звезды, содержащие четыре треугольника, а ко второму типу отнесем барицентрические звезды с восемью треугольниками.

8.1. Барицентрические звезды с четырьмя треугольниками соответствуют вершинам $\mathbf{r}_{i,j}$ при $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{1}}$; каждой такой вершине соответствует барицентрическая звезда, описываемая следующей таблицей инциденций:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \end{matrix} \right\|.$$

8.2. Вершинам $\mathbf{r}_{i,j}$ при $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_{\mathbf{0}}$ соответствуют барицентрические звезды с таблицей инциденций вида

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{-2+i,j} & \mathbf{r}_{-1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,-2+j} & \mathbf{r}_{1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,-2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{-2+i,2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,-1+j} \end{matrix} \right\|.$$

9. Структура барицентрических звезд локально укрупненной триангуляции

При локальном укрупнении триангуляции на “границе укрупнения” появляются дополнительно новые типы барицентрических звеэд, содержащих по шесть и по восемь треугольников, а внутри зоны укрупнения типы барицентрических звезд сохраняются.

9.0. Барицентрическая звезда точки $\mathbf{r}_{0,0}$ состоит из восьми треугольников; она определяются следующей таблицей:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{matrix} \right\| .$$

9.1. Барицентрические звезды из шести треугольников определяются следующими таблицами.

Таблицы для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{0,\pm 2}$ имеют вид

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,\pm 4} & \mathbf{r}_{-1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{-2,\pm 2} & \mathbf{r}_{-1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{2,\pm 2} & \mathbf{r}_{1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,\pm 4} & \mathbf{r}_{1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,\pm 2} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,\pm 2} \end{matrix} \right\| ;$$

здесь знаки $\pm$ означают, что во всех случаях нужно брать либо знак $+$, либо во всех случаях брать знак $-$ (аналогичное соглашение используется также в дальнейшем).

Таблицы для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{\pm 2,0}$ получаются перестановкой индексов каждой вершины в таблицах для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{0,\pm 2}$:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 4,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 4,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,-2} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,2} \end{Vmatrix}.$$

9.2. Барицентрические звезды из восьми треугольников определяются следующими таблицами.

Барицентрические звезды вершины $\mathbf{r}_{\pm 2,2}$ имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{\pm 1,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,4} & \mathbf{r}_{\pm 1,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,4} & \mathbf{r}_{\pm 3,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 4,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 4,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} \end{Vmatrix}.$$

Барицентрические звезды вершин $\mathbf{r}_{\pm 2,-2}$ получаются сменой знака второго индекса у точек предыдущей таблицы

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{\pm 1,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,-4} & \mathbf{r}_{\pm 1,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,-4} & \mathbf{r}_{\pm 3,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 4,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 4,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} \end{Vmatrix}.$$

10. Калибровочные соотношения для функций Куранта

Как известно, функцией Куранта, ассоциированной с выделенной вершиной правильной триангуляции, называется непрерывная функция, равная единице в упомянутой вершине, линейная на каждом треугольнике барицентрической звезды этой вершины и равная нулю вне указанной барицентрической звезды. Система функций Куранта – линейно независимая система.

Функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $\mathbf{r}_{i,j}$ исходной триангуляции, обозначим $\omega_{i,j}(t)$, $(i,j) \in \mathbb{X}$, $t \in \mathbb{R}^2$. На исходной триангуляции имеется два типа функций Куранта, соответствующих рассмотренным выше двум типам барицентрических звезд (см. пункты 2.1 и 2.2): у функций Куранта с нечетными индексами носитель состоит из четырех треугольников, а у функций Куранта с четными индексами носитель состоит из восьми треугольников.

Введем обозначения

$$\mathbb{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(0,0),(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}, \quad \mathbb{I}_1' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_1 \setminus (0,0).$$

Для укрупненной триангуляции функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $\mathbf{r}_{i,j}$, будем обозначать $\widetilde{\omega}_{i,j}$; заметим, что не все вершины исходной триангуляции участвуют в укрупненной триангуляции, а именно, индексы (i,j) пробегают не все множество $\mathbb{X}$, а лишь его часть: $(i,j) \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1'$; обозначим $\mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1'$.

Теорема 8. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\widetilde{\omega}_{i,j}(t) \equiv \omega_{i,j}(t) \quad \forall (i,j) \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \setminus 2\mathbb{I}_1, \tag{10.1}$$

$$\widetilde{\omega}_{0,0}(t) \equiv \omega_{0,0}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t), \tag{10.2}$$

$$\widetilde{\omega}_{2,2}(t) \equiv \omega_{2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t), \qquad \widetilde{\omega}_{-2,2}(t) \equiv \omega_{-2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t), \tag{10.3}$$

$$\widetilde{\omega}_{2,-2}(t) \equiv \omega_{2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t), \quad \widetilde{\omega}_{-2,-2}(t) \equiv \omega_{-2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t). \tag{10.4}$$

Доказательство соотношений (10.1)–(10.4) легко получается, если учесть линейность функций Куранта на треугольниках, содержащихся в их носителе. □

В дальнейшем вектор (i,j) будем обозначать через α (впрочем, для краткости иногда скобки в обозначении вектора будем опускать); положим

$$\mathbf{r}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{i,j}, \quad \omega_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{i,j}, \quad \widetilde{\omega}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\omega}_{i,j},$$

$$\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0,0), \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} (1,1), \quad \mathbf{e}^* \stackrel{\text{def}}{=} (-1,1).$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, -\mathbf{e}, -\mathbf{e}^*\}, \quad \mathbb{I}_1' = \mathbb{I}_1 \setminus \mathbf{0}, \quad 2\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, -2\mathbf{e}^*\},$$

так что формулы (10.1)–(10.4) принимают вид

$$\widetilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \omega_\alpha(t) \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \setminus 2\mathbb{I}_1, \quad \alpha \in \mathbb{X}, \tag{10.5}$$

$$\widetilde{\omega}_{\mathbf{0}}(t) \equiv \omega_{\mathbf{0}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}^*}(t), \tag{10.6}$$

$$\widetilde{\omega}_{2\mathbf{e}}(t) \equiv \omega_{2\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}}(t), \quad \widetilde{\omega}_{-2\mathbf{e}}(t) \equiv \omega_{-2\mathbf{e}}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}}(t), \tag{10.7}$$

$$\widetilde{\omega}_{2\mathbf{e}^*}(t) \equiv \omega_{2\mathbf{e}^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{e}^*}(t), \quad \widetilde{\omega}_{-2\mathbf{e}^*}(t) \equiv \omega_{-2\mathbf{e}^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-\mathbf{e}^*}(t). \tag{10.8}$$

Краткая запись формул (10.5)–(10.8) такова:

$$\widetilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{X}} \mathfrak{p}_{\alpha,\gamma}\ \omega_\gamma(t) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \tag{10.9}$$

где

$$\mathfrak{p}_{\alpha,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\alpha,\gamma} \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \backslash 2\mathbb{I}_1, \quad \gamma \in \mathbb{X}, \tag{10.10}$$

$$p_{2\alpha,2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \text{при } \alpha \in \mathbb{I}_1, \quad p_{\mathbf{0},\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1/2,\ p_{2\alpha,\alpha} = 1/2 \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{I}_1'; \tag{10.11}$$

здесь $\delta_{\alpha,\alpha'}$ – символ Кронекера.

Заметим, что формула (10.9) охватывает все функции $\widetilde{\omega}_\alpha$, соответствующие укрупненной триангуляции, а формула (10.10) учитывает все случаи (10.5) совпадения функций $\widetilde{\omega}_\alpha$ и ω_γ; кроме того, первая формула в (10.11) охватывает коэффициенты первых слагаемых в правых частях всех формул (10.6)–(10.8), а вторая формула в (10.11) дает значения коэффициентов всех слагаемых правой части формулы (10.6), кроме первого. Наконец, третья формула в (10.11) задает вторые слагаемые в правых частях формул (10.7)–(10.8).

Полностью упорядочим (произвольным образом) множество $\{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{X}\}$ мультииндексов γ (т.е. упорядочим множество $\mathbb{X}$), зафиксируем этот порядок и будем использовать его в дальнейшем; в подмножестве $\mathbb{Y}$ введем упорядочение, индуцированное упорядоченностью во множестве $\mathbb{X}$.

В соответствии с этой упорядоченностью введем вектор-столбцы

$$\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}, \qquad \omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{X}}, \tag{10.12}$$

а также рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{\alpha,\gamma}), \tag{10.13}$$

где $\alpha \in \mathbb{Y}$ – номер строки, а $\gamma \in \mathbb{X}$ – номер столбца.

Из теоремы 8 получаем

Следствие 3. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{\omega} = \mathfrak{P}_{\mathbf{0}}\omega. \tag{10.14}$$

Доказательство соотношения (10.14) очевидным образом следует из формул (10.9)–(10.13). □

Для иллюстрации обратимся к случаю, когда

$$\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{-\mathbf{i}^*, -\mathbf{i}, -2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, \mathbf{e}^*, \mathbf{e}, \mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, \mathbf{i}, \mathbf{i}^*\}, \tag{10.15}$$

где $\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} (2,0)$, $\mathbf{i}^* \stackrel{\text{def}}{=} (0,2)$. В этом случае

$$\mathbb{Y} = \{-\mathbf{i}^*, -\mathbf{i}, -2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, \mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, \mathbf{i}, \mathbf{i}^*\}, \tag{10.16}$$

$\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}$ – прямоугольная матрица размеров 9×13 вида

$\mathfrak{P}_{\mathbf{0}} =$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} -\mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i} \\ -2\mathbf{e}^* \\ -2\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ 2\mathbf{e} \\ 2\mathbf{e}^* \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
\end{array}$$

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}(\{\omega_\gamma \mid \forall \gamma \in \mathbb{X}\}), \quad \widetilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p\, \mathcal{L}(\{\widetilde{\omega}_\alpha \mid \forall \alpha \in \mathbb{Y}\}). \tag{10.17}$$

Следствие 4. *Линейное пространство* $\widetilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{0}}$ *является подпространством в* $\mathbb{S}$:

$$\widetilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{0}} \subset \mathbb{S}. \tag{10.18}$$

Доказательство соотношения (10.18) следует из формул (10.14) и (10.17). □

11. Биортогональная система и ее значения на базисных функциях объемлющего пространства

В пространстве $C(\mathbb{R}^2)$ зададим систему линейных функционалов g_γ для $\forall\gamma \in \mathbb{X}$ формулами

$$\langle g_\gamma, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\mathbf{r}_\gamma). \tag{11.1}$$

Ясно, что система $\{g_\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{X}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{\gamma'}\}_{\gamma'\in\mathbb{X}}$:

$$\langle g_\gamma, \omega_{\gamma'}\rangle = \delta_{\gamma,\gamma'}. \tag{11.2}$$

Аналогичным образом система функционалов $\widetilde{g}_\alpha$ для $\forall\alpha \in \mathbb{Y}$ задается формулами

$$\langle \widetilde{g}_\alpha, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\widetilde{\mathbf{r}}_\alpha); \tag{11.3}$$

она оказывается биортогональной системе функций $\{\widetilde{\omega}_{\alpha'}\}_{\alpha'\in\mathbb{Y}}$:

$$\langle \widetilde{g}_\alpha, \widetilde{\omega}_{\alpha'}\rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \quad \forall\alpha,\alpha' \in \mathbb{Y},$$

и, кроме того,

$$\langle \widetilde{g}_\alpha, u\rangle = \langle g_\alpha, u\rangle \quad \forall\alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall u \in C(\Omega). \tag{11.4}$$

Пусть $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$ – матрица с элементами

$$\mathfrak{q}_{\alpha,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_\alpha, \omega_\gamma\rangle \quad \forall\alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall\gamma \in \mathbb{X}, \tag{11.5}$$

где α – номер строки, а β – номер столбца.

Теорема 9. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{\alpha,\gamma} = \delta_{\alpha,\gamma} \quad \forall\alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall\gamma \in \mathbb{X}. \tag{11.6}$$

Доказательство. С учетом расположения носителей функций $\omega_{\alpha'}$ из (11.1)–(11.4) получаем

$$\langle \widetilde{g}_\alpha, \omega_\gamma\rangle = \delta_{\alpha,\gamma} \quad \forall\alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall\gamma \in \mathbb{X};$$

отсюда, принимая во внимание обозначения (11.5), приходим к (11.6). □

В случае (10.15)–(10.16) $\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}$ – прямоугольная матрица размеров 9×13; она имеет вид

$$\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}} = \begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \end{array} \\
\begin{array}{r} -\mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i} \\ -2\mathbf{e}^* \\ -2\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ 2\mathbf{e} \\ 2\mathbf{e}^* \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Введем вектор-столбцы, компонентами которых являются функционалы $\widetilde{g}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Y}$: $\widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{g}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}$.

Благодаря свойству биортогональности имеем

$$\widetilde{g}\,\widetilde{\omega}^T = I, \tag{11.7}$$

где I – единичная матрица с элементами $\delta_{\alpha,\alpha'}$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Y}$ (здесь $\delta_{\alpha,\alpha'}$ – символ Кронекера).

Применяя теорему 5, получаем следующее утверждение

Теорема 10. *Матрица* $\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}$ *является левой обратной для матрицы* $\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^T$, *т.е.*

$$\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}} \mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^T = I. \tag{11.8}$$

Для случая (10.15)–(10.16) формула (11.8) проверяется непосредственным подсчетом произведения прямоугольных матриц $\mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}$ и $\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^T$ (размеров 9×13 и 13×9 соответственно); в результате получается квадратная единичная матрица одиннадцатого порядка.

12. Общая структура всплескового разложения

Аналогично пунктам 5 и 6 для рассматриваемых триангуляций рассмотрим оператор $P_{\mathbf{0}}$ проектирования пространства $C(\Omega)$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}_{\mathbf{0}}$, задаваемый формулой

$$P_{\mathbf{0}} u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \mathbb{Y}} \langle \widetilde{g}_\alpha, u \rangle\, \widetilde{\omega}_\alpha \qquad \forall u \in C(\Omega), \tag{12.1}$$

и введем оператор $Q_{\mathbf{0}} = I - P_{\mathbf{0}}$, где I – тождественный в $C(\Omega)$ оператор.

В данном случае пространством всплесков является пространство $\mathbb{W}_\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} Q_\mathbf{0}\mathbb{S}$.

Благодаря соотношениям (10.18) и (12.1) получаем прямое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}_\mathbf{0} \tag{12.2}$$

– *сплайн-всплесковое разложение* пространства $\mathbb{S}$. Как и прежде, рассматривая вектор-столбцы $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Y}}$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_\beta)_{\beta\in\mathbb{X}}$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{X}}$, получаем следующие утверждения.

Теорема 11. *Формулы декомпозиции имеют вид*

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{c}, \quad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{c}, \tag{12.3}$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T\mathbf{a}. \tag{12.4}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6. □

Теорема 12. *Пространство $\mathbb{W}_\mathbf{0}$ изоморфно ядру оператора $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$:*

$$\mathbb{W}_\mathbf{0} = \{w \,|\, w = \sum_{\beta\in\mathbb{X}} b_\beta\omega_\beta \quad \forall\mathbf{b} \in \ker \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\}. \tag{12.5}$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки эквивалентных формул

$$u = \sum_{\gamma\in\mathbb{X}} c_\gamma\omega_\gamma \in \mathbb{W}_\mathbf{0} \iff P_\mathbf{0}u = 0 \iff \langle\widetilde{g}_\alpha, u\rangle = 0 \quad \forall \in \mathbb{Y} \iff$$

$$\iff \langle\widetilde{g}_\alpha, \sum_{\gamma\in\mathbb{X}} c_\gamma\omega_\gamma\rangle = 0 \quad \forall \in \mathbb{Y} \iff \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{c} = 0 \iff \mathbf{c} \in \ker \mathfrak{Q}_\mathbf{0}.$$

Заметим, что первая эквивалентность следует из определения (12.1) оператора $P_\mathbf{0}$, предпоследняя эквивалентность следует из определения матрицы $\mathfrak{Q}_\mathbf{0}$, а остальные эквивалентности очевидны. Формула (12.5) и упомянутый в теореме изоморфизм установлены. □

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a} \,|\, \mathbf{a} = (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Y}}\}, \quad \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \ker \mathfrak{Q}_\mathbf{0}, \quad \mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a} \,|\, \mathbf{a} = (a_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{X}}\}.$$

Пусть $\mathcal{E}$ – прямое произведение пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$: $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, так что

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{a} \in \mathcal{A},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D}_\mathbf{0} : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \end{pmatrix};$$

для него верна эквивалентность

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{c} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0})\mathbf{c} \end{cases};$$

этот оператор называется *оператором декомпозиции.*

Оператор $\mathfrak{R}_\mathbf{0} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}, \quad \mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I \end{pmatrix}$, удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_\mathbf{0} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

он называется *оператором реконструкции.*

Теорема 13. *Операторы $\mathfrak{D}_\mathbf{0}$ и $\mathfrak{R}_\mathbf{0}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} + I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} = I.$$

С другой стороны, с учетом свойства (11.8) имеем

$$\mathfrak{D}_\mathbf{0}\mathfrak{R}_\mathbf{0} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \\ \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T & I - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}_\mathbf{0}^T \mathfrak{Q}_\mathbf{0}\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана. □

13. Всплесковое разложение при локальном укрупнении триангуляции

Здесь применим полученные в предыдущих пунктах формулы для отыскания всплескового разложения пространства $\mathbb{S}$ при локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_\mathbf{0}]$, описанном в пунктах 7–9.

Теорема 14. *При локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_\mathbf{0}]$ во всплесковом разложении* (12.2) *формулы декомпозиции* (12.3) *имеют* *вид*

$$b_\alpha = 0, \quad a_\alpha = c_\alpha \quad \alpha \in \mathbb{Y}, \tag{13.1}$$

$$b_{-\mathbf{e}^*} = c_{-\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\, c_{-2\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\, c_{\mathbf{0}}, \quad b_{-\mathbf{e}} = c_{-\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\, c_{-2\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\, c_{\mathbf{0}}, \tag{13.2}$$

$$b_{\mathbf{e}} = c_{\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\, c_{2\mathbf{e}} - \frac{1}{2}\, c_{\mathbf{0}}, \qquad b_{\mathbf{e}^*} = c_{\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\, c_{2\mathbf{e}^*} - \frac{1}{2}\, c_{\mathbf{0}}. \tag{13.3}$$

Доказательство. Используя формулы (10.10)–(10.11) и (11.6) в соотношениях (12.3), получаем равенства (13.1)–(13.3). □

Заметим, что в случае (10.15)–(10.16) формулы (13.2)–(13.3) можно проиллюстрировать первым из соотношений (12.3), где $\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^T \mathfrak{Q}_{\mathbf{0}}$ – квадратная матрица размеров 13×13 вида

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{0}}^T \mathfrak{Q}_{\mathbf{0}} =$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} -\mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i} \\ -2\mathbf{e}^* \\ -2\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^* \\ -\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^* \\ 2\mathbf{e} \\ 2\mathbf{e}^* \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{i}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Теорема 15. *Для локального укрупнения* $[\mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathbf{0}}]$ *всплесковому разложению* (12.2) *соответствуют формулы реконструкции*

$$c_\alpha = a_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \tag{13.4}$$

$$c_{-\mathbf{e}^*} = b_{-\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{-2\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}, \quad c_{-\mathbf{e}} = b_{-\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{-2\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}, \tag{13.5}$$

$$c_{\mathbf{e}} = b_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{2\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}, \qquad c_{\mathbf{e}^*} = b_{\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{2\mathbf{e}^*} + \frac{1}{2}\, a_{\mathbf{0}}. \tag{13.6}$$

Доказательство выражений (13.4)–(13.6) вытекает из соотношений (12.4), если подставить в них значения коэффициентов $\mathfrak{p}_{\alpha,\gamma}$ из равенств (10.10)–(10.11). $\square$

14. Структура локального укрупнения

Исследуем структуру предложенного укрупнения исходной триангуляции. При фиксированных $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ введем обозначения

$$\mathbf{o} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+1,2j+1}, \quad \mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j}, \quad \mathbf{y} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j+2}, \quad \mathbf{z} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+2,2j+2},$$
$$\mathbf{w} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+2,2j}, \quad \mathbf{y}' \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j-2}, \quad \mathbf{z}' \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i-2,2j-2}, \quad \mathbf{o}' \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+1,2j-1}.$$

Прямоугольник с вершинами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ назовем исходным прямоугольником.

В соответствии с рассматриваемым алгоритмом триангуляция исходного прямоугольника преобразуется следующим образом:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{o} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y} & \mathbf{o} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z} & \mathbf{o} & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{o} & \mathbf{w} \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{x} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{matrix} \right\|, \tag{14.1}$$

а триангуляция симметричного относительно прямой $\mathbf{xw}$ прямоугольника преобразуется по правилу

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{o}' & \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' & \mathbf{o}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{z}' & \mathbf{o}' & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{o}' & \mathbf{w} \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{x} & \mathbf{z}' & \mathbf{w} \end{matrix} \right\|. \tag{14.2}$$

В дальнейшем рассматриваются также соответствующие преобразования прямоугольников, симметричных упомянутым относительно прямой $\mathbf{yy}'$.

Прямоугольники $\mathbb{R}_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid (2i-2)h' \leqslant x \leqslant (2i+2)h', (2i-2)h'' \leqslant y \leqslant (2i+2)h''\}$, рассматриваемые для всех $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, заполняют всю плоскость. Очевидно, что

$$\mathbb{R}_{i,j} = \bigcup_{\substack{i'=i-1,i \\ j'=j-1,j}} \Pi_{i',j'}.$$

Для $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ каждый прямоугольник $\Pi_{i,j}$ триангулирован согласно таблице

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{r}_{2i,2j} & \mathbf{r}_{2i,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i,2j} & \mathbf{r}_{2i+2,2j} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i+2,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+2,2j} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i+2,2j+2} & \mathbf{r}_{2i,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \end{matrix} \right\| \qquad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2. \tag{14.3}$$

Рассмотрим укрупнение вида (14.1)–(14.2) соответствующего подразделения прямоугольника $\mathbb{R}_{i,j}$ и покажем, что результат изоморфен подразделению (14.3); тем самым будет установлено, что структура локального укрупнения подразделения в подобласти совпадает со структурой исходного подразделения. Таким образом, будет показано (см. теорему 16), что в подобласти, где произведено укрупнение, возможно использование предлагаемого алгоритма для дальнейшего локального укрупнения. Отсюда видно, что можно получить цепочку вложенных пространств с локальным укрупнением триангуляции и сгенерировать всплесковый (вэйвлетный) пакет.

Для удобства введем обозначения

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{2i-2,2j-2},\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{2i+2,2j-2},\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_{2i+2,2j+2},\ \mathbf{a}_4 = \mathbf{r}_{2i-2,2j+2},$$
$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_{2i,2j-2},\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{r}_{2i+2,2j},\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{r}_{2i,2j+2},\ \mathbf{b}_4 = \mathbf{r}_{2i-2,2j},$$
$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_{2i-1,2j-1},\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{r}_{2i+1,2j-1},\ \mathbf{c}_3 = \mathbf{r}_{2i+1,2j+1},\ \mathbf{c}_4 = \mathbf{r}_{2i-1,2j+1},$$
$$\mathbf{o} = \mathbf{r}_{2i,2j}.$$

Рассмотрим преобразование, описываемое соотношениями (14.4)–(14.7) (см. ниже):

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{a}_1 \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_4 \end{matrix} \right\|, \tag{14.4}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{o} \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \end{matrix} \right\|, \tag{14.5}$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{a}_3 \end{matrix} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{o} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_3 \end{matrix} \right\|, \tag{14.6}$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{a}_4 \end{array} \right\| \quad ==> \quad \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_4 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_4 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_4 \end{array} \right\|. \tag{14.7}$$

Итак, в результате получаем триангуляцию

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{array} \right\|^T, \tag{14.8}$$

где символ $\|\cdot\|^T$ означает транспонирование таблицы, рассматриваемой как матрица. Выделим фрагмент исходной триангуляции топологически изоморфный результату, полученному применением преобразования (14.4)–(14.7):

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_4 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{array} \right\|^T. \tag{14.9}$$

Из формул (14.8)–(14.9) видно, что установлено следующее утверждение.

Теорема 16. *Исходное и укрупненное подразделения изоморфны; изоморфизм, сохраняющий величины углов треугольников, определяется отображением*

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{b}_i \longrightarrow \mathbf{c}_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{b}_4 \longrightarrow \mathbf{c}_1. \tag{14.10}$$

Замечание 2. Другой изоморфизм (без сохранения величин углов) может быть задан соотношениями

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{b}_i \longrightarrow \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Литература

1. С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов.* М., 2003.
2. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* М., 2005.
3. И. Е. Максименко, М. А. Скопина, *Многомерные периодические всплески.* — Алгебра и анализ **15**, No. 2 (2003), 1–39.
4. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* СПб., 1994.
5. Ю. К. Демьянович, А. В. Зимин, *Аппроксимации курантова типа и их вэйвлетные разложения.* — Сб. Проблемы математического анализа **37** (2008), 3–22.

6. Ю. К. Демьянович, *Сплайн-вэйвлетные разложения на многообразии.* — Сб. Проблемы математического анализа **36** (2007), 15–22.

Dem′yanovich Yu. K., Romanovskiĭ L. M. Spline-wavelet coarsening of Courant-type approximations.

Spline-wavelet coarsening of Courant-type approximations (not necessarily piecewise-linear) is considered, and the wavelet decomposition of the corresponding embedded spaces is constructed. The coarsening suggested possesses the property of structure invariance and can be used for obtaining wavelet packages. The results presented are illustrated on model examples.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Yuri.Demjanovich@gmail.com
E-mail: lromanovskey@gmail.com

Поступило 31 октября 2013 г.