Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

Е. Г. Голузина

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots$, регулярных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и типично вещественных в U, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Дженкинс [1], используя лемму Неймана–Пирсона, получил в классе T точные оценки для $f'(r)$ $(|z| = r)$, зависящие от c_2.

В настоящей работе использованы некоторые теоремы из теории моментов для определения множеств значений систем

$$I_1(f) = \{c_2, f(r), f'(r)\}, \quad I_2(f) = \{c_2, c_3, f(r), f'(r)\},$$

$0 < r < 1$, $f \in T$, и, в частности, даны точные оценки для $f'(r)$, зависящие от c_2, $f(r)$ и от c_2, c_3, $f(r)$.

§1. Обозначения и формулировка результатов

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$\zeta = \zeta(z) = z + \frac{1}{z}, \quad \rho = r + \frac{1}{r}, \quad 0 < r < 1,$$
$$x_1 = f(r), \quad x_2 = f'(r), \quad x_3 = c_2, \quad x_4 = c_3,$$
$$x_2' = \frac{-x_2}{\zeta'(r)}, \quad x_3' = \frac{c_2}{2}, \quad x_4' = \frac{c_3 + 1}{4}.$$

Ключевые слова: типично вещественная функция, множество значений систем, оценка производной.

1.1. Множество значений системы $I_1(f)$ на классе T обозначим через D.

Имеет место

Теорема 1. 1. *Множество значений D есть множество всех точек*

$$X = X(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} &|x_3| \leqslant 2, \\ &\varepsilon[(\rho + 2\varepsilon)x_2' - x_1] \geqslant 0, \\ &\varepsilon(2 + \varepsilon x_3)[(\rho + 2\varepsilon)x_2' - x_1] \geqslant [(\rho + 2\varepsilon)x_1 - 1]^2, \\ &\varepsilon = \pm 1. \end{aligned} \tag{2}$$

2. $\operatorname{Int} D$ – *множество внутренних точек D – есть множество всех точек* (1), *удовлетворяющих неравенствам*

$$|x_3| < 2, \ \varepsilon(2 + \varepsilon x_3)[(\rho + 2\varepsilon)x_2' - x_1] > [(\rho + 2\varepsilon)x_1 - 1]^2, \ \varepsilon = \pm 1. \tag{3}$$

Из утверждения 2 теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in T$ и $|c_2| < 2$. Тогда справедливы следующие точные оценки:*

$$f'(r) \leqslant \frac{1 + r}{r(1 - r)} \left\{ f(r) - \frac{[r - (1 - r)^2 f(r)]^2}{r^2(2 - c_2)} \right\}, \tag{4}$$

$$f'(r) \geqslant \frac{1 - r}{r(1 + r)} \left\{ f(r) + \frac{[r - (1 + r)^2 f(r)]^2}{r^2(2 + c_2)} \right\}. \tag{5}$$

Знаки равенства в (4) *и* (5) *имеют место для функций*

$$f_\varepsilon(z) = \frac{z}{(1 - 2\varepsilon z)^2} \left[1 + \frac{(c_2 - 2\varepsilon)z}{z^2 + 1 - \rho z + \frac{(c_2 - 2\varepsilon)z}{f(r)(\rho - 2\varepsilon) - 1}} \right] \tag{6}$$

соответственно при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$.

1.2. Пусть $\widetilde{D}$ – множество значений системы $I_2(f)$ на классе T.

Положим

$$A = A(X) = \begin{pmatrix} 1 & x_3' & x_1 \\ x_3' & x_4' & \frac{\rho x_1 - 1}{2} \\ x_1 & \frac{\rho x_1 - 1}{2} & x_2' \end{pmatrix},$$

$$B = B(X) = \begin{pmatrix} 4(1 - x_4') & \rho + 2x_3' - (\rho^2 - 4)x_1 \\ \rho + 2x_3' - (\rho^2 - 4)x_1 & 2\rho x_1 - 1 - (\rho^2 - 4)x_2' \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

Теорема 3. 1. *Множество значений $\widetilde{D}$ есть множество всех точек*

$$X = \widetilde{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \tag{7}$$

удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\begin{gathered} (x_3')^2 \leqslant x_4' \leqslant 1, \quad x_1^2 \leqslant x_2', \\ x_4' x_2' \geqslant \frac{(\rho x_1 - 1)^2}{4}, \quad 2\rho x_1 - (\rho^2 - 4)x_2' \geqslant 1, \\ \det A(X) \geqslant 0, \quad \det B(X) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8}$$

2. *Множество внутренних точек $\widetilde{D}$ есть множество всех точек (7), удовлетворяющих неравенствам*

$$(x_3')^2 < x_4' < 1, \quad \det A(X) > 0, \quad \det B(X) > 0. \tag{9}$$

Из второго утверждения теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^2 + \dots \in T$ и $c_2^2 - 1 < c_3 < 3$. Тогда справедливы следующие точные оценки:*

$$f'(r) \leqslant \frac{1}{1-r^2} \left\{ \frac{2(1+r^2)f(r)}{r} - 1 - \frac{1}{3 - c_3} \left[\frac{1+r^2}{r} + c_2 - \frac{(1-r^2)^2 f(r)}{r^2} \right]^2 \right\}, \tag{10}$$

$$f'(r) \geqslant \frac{1 - r^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{1 - c_2^2 + c_3} \left[\frac{(1 + r^2) f(r)}{r} - 1 - c_2 f(r) \right]^2 + [f(r)]^2 \right\}. \tag{11}$$

Знак равенства в (10) *имеет место для функции*

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)^2} \left\{ \frac{1 + c_2 z + z^2}{z} + \frac{(c_3 - 3)z}{1 + z^2 - \rho z + (c_3 - 3)z\{\dots\}^{-1}} \right\}, \tag{12}$$

где $\{\dots\} = f(r)(\rho^2 - 4) - \rho - c_2$.

Знак равенства в (11) *имеет место для функции*

$$f_2(z) = \frac{z}{1-2t_1z+z^2}\left[1+\frac{(c_2-2t_1)z}{1+z^2-2t_2z}\right], \quad -1<t_1,t_2<1, \qquad (13)$$

при

$$2t_2 = \frac{2c_2t_1-c_3-1}{2t_1-c_2},$$

где t_1 – *корень уравнения*

$$4t_1^2-2t_1\Big[\rho+\frac{c_2(1-\rho x_1)+x_1(1+c_3)}{1-\rho x_1+c_2x_1}\Big] - \frac{c_2^2+(1-x_1\rho)(\rho c_2-1-c_3)}{x_1\rho-1-x_1c_2}=0.$$

Пусть $T_0=\{f(z)\in T: c_2=c_3=0\}$.

Следствие 1. *Пусть* $f(z)\in T_0$. *Тогда справедливы точные оценки*

$$f'(r)\leqslant\frac{1}{1-r^2}\big\{2\rho f(r)-1-\frac{1}{3}[\rho-(\rho^2-4)f(r)]^2\},\qquad (14)$$

$$f'(r)\geqslant\frac{1-r^2}{r^2}\{f(r)^2-[\rho f(r)-1]^2\}.\qquad (15)$$

Знак равенства в (14) *имеет место для функции*

$$f_1(z)=\frac{\zeta}{\zeta^2-4}-\frac{3}{(\zeta^2-4)\{\zeta-\rho-3[f(r)(\rho^2-4)-\rho]^{-1}\}}, \quad \zeta+z+\frac{1}{z},$$

а в (15) – *для функции*

$$f_2(z)=\frac{1}{\zeta-2t_1}+\frac{-2t_1}{(\zeta-2t_1)(\zeta-2t_2)}, \quad \zeta=z+\frac{1}{z},$$

при

$$2t_2=-1/2t_1,$$

где t_1 – *корень уравнения*

$$4t_1^2-2t_1\Big(\rho+\frac{x_1}{1-\rho x_1}\Big)-1=0.$$

§2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Пусть M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t)=1$.

Для класса T известно [2, 3] интегральное представление:

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots\in T \iff f(z)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{z}{1-2tz+z^2}d\alpha(t),\quad \alpha(t)\in M_1. \tag{16}$$

Из (16) получаем интегральное представление для системы $I_1(f)$:

$$c_2=\int\limits_{-1}^{1}2td\alpha(t),\quad f(r)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\rho-2t},\quad f'(r)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{-\rho'(r)}{(\rho-2t)^2}d\alpha(t),\quad \alpha\in M_1. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что D – замкнутое выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$.

Образуем функцию

$$\varphi(t)=\delta_0+\delta_1t+\delta_2\frac{1}{\rho-2t}+\delta_3\frac{1}{(\rho-2t)^2}\geqslant 0,\quad t\in[-1,1],$$

где $\{\delta_k\}_0^3\in\mathbb{R}$, $\delta_0\neq 0$.

Запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t)=\frac{A_3(t)}{(\rho-2t)^2},$$

где $A_3(t)$ – неотрицательный алгебраический многочлен третьей степени.

Используя представление Маркова–Лукача для неотрицательных алгебраических многочленов (см. [4, с. 89]), получаем

$$\varphi(t)=\frac{1}{(\rho-2t)^2}[(1-t)(X_0+X_1t)^2+(1+t)(Y_0+Y_1t)^2]. \tag{18}$$

Запишем (18) в виде

$$\varphi(t)=(1-t)\Big(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\rho-2t)}\Big)^2+(1+t)\Big(\beta_0+\frac{\beta_1}{\rho-2t}\Big)^2,$$

где α_0, α_1, β_0, β_1 – вещественные числа.

В силу теоремы 1.1 в [4, с. 84–85], из справедливости неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [-1,1]$ следует неотрицательность вещественной квадратичной формы

$$H = H(X) = \alpha_0^2\Big(1 - \frac{x_3}{2}\Big) + \alpha_0\alpha_1[1-(\rho-2)x_1] + \alpha_1^2\frac{x_1-(\rho-2)x_2'}{2}$$
$$+\beta_0^2\Big(1+\frac{x_3}{2}\Big) + \beta_0\beta_1[-1+(\rho+2)x_1] + \beta_1^2\frac{-x_1+(\rho+2)x_2'}{2},$$

что равносильно (см. [5, с. 270]) неотрицательности всех главных миноров следующих двух матриц коэффициентов формы H:

$$\begin{pmatrix} 2-x_3 & 1-(\rho-2)x_1 \\ 1-(\rho-2)x_1 & x_1-(\rho-2)x_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+x_3 & -1+(\rho+2)x_1 \\ -1+(\rho+2)x_1 & -x_1+(\rho+2)x_2' \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Докажем второе утверждение теоремы 1. Пусть X – внутренняя точка множества D. Функция $\alpha_1(t) = \frac{t}{2} \in M_1$ и форма $H(X_1) = \int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)d\alpha_1(t) > 0$. Следовательно, $X_1 \in \operatorname{Int} D$.

На продолжении отрезка, соединяющего точки X_1 и X, возьмем точку $X_2 \in D$ такую, что $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$, $0<\lambda<1$. Пусть точке X_2 соответствуют функции $f_2(z) \in T$ и $\alpha_2(t) \in M_1$ в представлении (16). Тогда точке X будут соответствовать функции

$$f(z) = \lambda f_1(z) + (1-\lambda)f_2(z) \in T \quad \text{и} \quad \alpha(t) = \lambda\alpha_1(t) + (1-\lambda)\alpha_2(t) \in M_1.$$

Функция $\alpha(t)$ не является кусочно-постоянной. Поэтому $H(X) > 0$, квадратичная форма $H(X)$ положительно определенная и в точке X выполнены неравенства (3) (см. [5, с. 269]).

Пусть теперь выполнены неравенства (3). Тогда эти неравенства выполняются и в достаточно малой окрестности точки X, т.е. X – внутренняя точка множества D.

Утверждение 2 теоремы 1 доказано. □

Доказательство теоремы 2. Неравенства (4) и (5) вытекают из неравенств (3) и из того, что $f_1'(r)$ равно правой части неравенства (4), а $f_{-1}'(r)$ – правой части неравенства (5). При этом, в силу неравенства $|c_2| < 2$, $f(r)(\rho - 2\varepsilon) - 1 \neq 0$. □

Доказательство теоремы 3. В силу (16), для системы $I_2(f)$ имеет место интегральное представление

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} 2t d\alpha(t), \quad c_3 = \int\limits_{-1}^{1} (4t^2-1) d\alpha(t), \quad f(r) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\rho - 2t},$$
$$f'(r) = \int_{-1}^{1} \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2t)^2} d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1;$$

$\widetilde{D}$ – замкнутое выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^4$.

Образуем функцию

$$\psi(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 \frac{1}{\rho - 2t} + \delta_4 \frac{1}{(\rho-2t)^2} \geqslant 0, \quad t \in [-1, 1],$$

где $\delta_0 \neq 0$, $\{\delta_k\}_0^4 \in \mathbb{R}$.

Запишем $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t) = \frac{A_4(t)}{(\rho-2t)^2},$$

где $A_4(t)$ – неотрицательный алгебраический многочлен четвертой степени.

По теореме Маркова–Лукача имеем

$$A_4(t) = (1-t^2)(X_0 + X_1 t)^2 + (Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2)^2,$$

где X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2 – вещественные числа.

Следовательно, $\psi(t)$ можно записать в виде

$$\psi(t) = (1-t^2)\Big(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\rho - 2t}\Big)^2 + \Big(\beta_0 + \beta_1 t + \frac{\beta_2}{\rho - 2t}\Big)^2,$$

где $\{\alpha_k\}_0^1$, $\{\beta_k\}_0^2$ – вещественные числа.

В силу теоремы 1.1 в [4, с. 84–85], приходим к неотрицательности вещественной квадратичной формы

$$\begin{aligned} H = H(X) &= \alpha_0^2 4(1 - x_4') + 2\alpha_0\alpha_1[\rho + 2x_3' - (\rho^2 - 4)x_1] \\ &+ \alpha_1^2[2\rho x_1 1 - (\rho^2-4)x_2'] + \beta_0^2 + \beta_1^2 x_4' + \beta_2^2 x_2' + 2\beta_0\beta_1 x_3' \\ &+ 2\beta_0\beta_2 x_1 + 2\beta_1\beta_2 \frac{\rho x_1 - 1}{2}, \end{aligned}$$

что равносильно (см. [5, с. 270]) неотрицательности всех главных миноров матриц $A(X)$ и $B(X)$. Первое утверждение теоремы 3 доказано.

Второе утверждение теоремы 3 доказывется аналогично утверждению 2 теоремы 1. □

Доказательство теоремы 4. Строгие неравенства для $f'(r)$ вытекают из теоремы 3. Нетрудно проверить, что $f_1'(r)$ равно правой части неравенства (10), а $f_2'(r)$ – правой части неравенства (11). Заметим, что $f(r)(\rho^2-4)-\rho-c_2\neq 0$, ибо в случае $|c_2|<2$ справедливо неравенство [6]

$$f(r)<\frac{\rho+c_2}{\rho^2-4}.$$ □

Из теоремы 2 нетрудно получить результат Дженкинса в [1].

Положив $f(r)=x$, обозначим правые части неравенств в (4) и (5) через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

В силу неравенств

$$\frac{1}{\rho+2}\leqslant f(r)\leqslant\frac{1}{\rho-2},\quad f\in T,$$

имеем

$$\varphi'(x)=\frac{1+r}{r(1-r)}\Big\{1+\frac{2(\rho-2)}{2-c_2}\Big[1-(\rho-2)x\Big]\Big\}>0,$$

$$\psi'(x)=\frac{1-r}{r(1+r)}\Big\{1+\frac{2(\rho+2)}{2+c_2}\Big[(\rho+2)x-1\Big]\Big\}>0.$$

В [6, стр. 33] найдено множество значений системы $\{f(r),c_2\}$ в классе T. Из полученного в [6] результата следуют точные оценки для $f(r)$[1]:

$$\frac{1}{\rho-c_2}\leqslant f(r)\leqslant\frac{\rho+c_2}{\rho^2-4},\quad f\in T.$$

Следовательно,

$$\max\varphi(x)=\varphi\Big(\frac{c_2+\rho}{\rho^2-4}\Big)=\frac{1-r^2}{r^2}\cdot\frac{\rho^2+2c_2\rho+4}{(\rho^2-4)^2},$$

$$\min\varphi(x)=\psi\Big(\frac{1}{\rho-c_2}\Big)=\frac{1-r^2}{r^2}\cdot\frac{1}{(\rho-c_2)^2}.$$

Таким образом, получаем

Следствие 2 [1]. *Пусть $f(z)=z+c_2z^2+\cdots\in T$. Тогда справедливы точные оценки*

$$\frac{1-r^2}{(1-c_2r+r^2)^2}\leqslant f'(r)\leqslant\frac{(2+c_2)(1+r)}{4(1-r)^3}+\frac{(2-c_2)(1-r)}{4(1+r)^3}. \qquad (19)$$

Знак равенства в левом неравенстве (19) *имеет место для функции*

$$f(z) = \frac{z}{1 - c_2 z + z^2},$$

а знак равенства в правом неравенстве (19) *– для функции*

$$f(z) = \frac{(2 + c_2)z}{4(1 - z)^2} + \frac{(2 - c_2)z}{4(1 + z)^2}.$$

Литература

1. J. A. Jenkins, *Some problems for typically real functions.* — Canad. J. Math. **13** (1961), 427–431.
2. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 565–572.
3. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27 (69)** (1950), 201–218.
4. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., 1973.
5. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 5-е изд., М., 2010.
6. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стильтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.

Goluzina E. G. On a problem in the class of typically real functions.

Let T be the class of functions $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. In the paper, sharp estimates on the derivative $f'(r)$ $(0 < r < 1)$ for functions in the class T in terms of $f(r)$ and c_2 and also $f(r)$, c_2, and c_3 are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 24 октября 2013 г.