Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

О. М. Фоменко

ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ В КРУГЕ И ШАРЕ

Введение

Пусть $P(x)$ и $P_3(x)$ – остаточные члены в проблемах круга и шара соответственно. Изучаются суммы

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\ k\equiv 0 \pmod p}} P(k) =: S(x,p)$$

и

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\ k\equiv 0 \pmod p}} P_3(k) =: S_3(x,p),$$

где $p\geqslant 2$ – простые числа.

В частности, в случае круга для $p\equiv 1 \pmod 4$ и $x\gg p^{6+\varepsilon}$

$$S(x,p)=\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\pi\frac{x}{p}+O\big(x^{5/6}\big),$$

в то время как для $p\equiv 3 \pmod 4$ и $x\gg p^{12+\varepsilon}$

$$S(x,p)=\frac{1}{2p}\pi\frac{x}{p}+O\big(x^{5/6}\big).$$

В случае шара для $x\gg p^4$

$$S_3(x,p)=\big(1+2L(p)p^{-2}\big)\frac{2}{3}\pi\frac{x^{3/2}}{p}+O\Big(\frac{x^{5/4+\varepsilon}}{p}\Big)+O\big(x^{7/6}\big),$$

где для $p=2$ и $p\equiv 1 \pmod 4$ $L(p)=0$; $L(3)=1$, а в случае $p\equiv 3 \pmod 4$ и $p\geqslant 7$ $L(p)=ph(-p)$, причем, как обычно, $h(-p)$ означает число классов мнимого квадратичного поля дискриминанта $-p$.

O-константы от p не зависят.

Ключевые слова: проблема круга, проблема шара, асимптотика, дзета-функция Эпштейна.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00239а).

§1

Введем хорошо известные арифметические функции

$$r_2(n) := \Big|\{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : n_1^2 + n_2^2 = n\}\Big| =: r(n),$$

$$r_3(n) := \Big|\{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} : n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}\Big|.$$

Пусть

$$A(x) := \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant x} r(\nu),$$

$$A_3(x) := \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant x} r_3(\nu);$$

положим

$$P(x) := A(x) - \pi x,$$

$$P_3(x) := A_3(x) - \frac{4}{3}\pi x^{3/2}.$$

Известно, что $P(x) = O(x^{1/2})$ (Гаусс),
$P(x) = O(x^{1/3})$ (Серпинский),…,
$P(x) = O(x^{23/73}(\log x)^{315/146}$ (Хаксли [1]).

Аналогично, $P_3(x) = O\big(x^{5/6+\varepsilon}\big)$ (Пфейфер),
$P_3(x) = O\big(x^{3/4}\big)$ (Ландау),…,
$P_3(x) = O\big(x^{21/32+\varepsilon}\big)$ (Хис-Браун [2]).

Известно, что $P(x) \neq O(x^{\alpha})$, где α – любое число, не превосходящее $1/4$, и $P_3(x) \neq O(x^{\beta})$, где β – любое число, не превосходящее $1/2$. Отметим, что гипотетическая оценка $P_3(x) = O(x^{1/4+\varepsilon})$ составляет проблему круга, а гипотетическая оценка $P_3(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$ – проблему шара.

Ландау [3, 4] принадлежит следующая формула

$$\int_0^x P(y)(y)\,dy = -\frac{1}{\pi^2}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^{5/4}}\cos\Big(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\Big) + O\big(x^{1/4}\big), \quad (1.1)$$

тесно связанная с известной формулой Вороного. Несложными вычислениями из (1.1) получаем асимптотику

$$\sum_{k \leqslant x} P(k) = \frac{\pi}{2}x + O\big(x^{3/4}\big). \quad (1.2)$$

Для доказательство достаточно рассмотреть целые положительные x. Очевидно,

$$\int\limits_0^x A(y)\,dy = \sum_{k=0}^{x-1} \int\limits_{[k,k+1)} A(y)\,dy = \sum_{k=0}^{x-1} A(k);$$

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} k + \frac{1}{2}x = \int\limits_0^x y\,dy.$$

Пользуясь (1.1) и этими соотношениями, имеем

$$O\bigl(x^{3/4}\bigr) = \int\limits_0^x \bigl(A(y)-\pi y\bigr)\,dy = \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} A(k) - \pi \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} k - \frac{\pi}{2}x$$
$$= \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} P(k) - \frac{\pi}{2}x,$$

откуда следует (1.2).

Ниже $p \geqslant 2$ означают простые числа, $w \geqslant 1$ – целые числа. В §2 настоящей работы изучаются суммы

$$\sum_{k\leqslant x} P(pk),$$

а в §3 – суммы $\sum\limits_{k\leqslant x} P_3(k)$, $\sum\limits_{k\leqslant x} P_3(pk)$.

В теореме 1 доказывается оценка

$$\sum_{k\leqslant pw^2} P(pk) \ll pw^2 \log^2 p, \tag{1.3}$$

где $\ll$-константа абсолютная. При доказательстве (1.3) используется формула Ландау (1.1) и результаты И. М. Виноградова [5] о распределении дробных частей значений функции от двух переменных. В случае $w=1$ оценка (1.3) получена в [6].

В теореме 2 получено соотношение

$$\sum_{k\leqslant x} P(pk) = C_p \pi x + O\Bigl(\bigl(px\bigr)^{5/6}\Bigr), \tag{1.4}$$

где значение константы $C_p > 0$ приводится во введении, а также в теореме 2, O-константа является абсолютной. Если x растет быстрее некоторой степени числа p, то (1.4) становится асимптотикой. При доказательстве (1.4) используются свойства L-функций квадратичных форм [7].

Переходим к P_3-результатам. В теореме 3 получен аналог асимптотики (1.2):

$$\sum_{k\leqslant x} P_3(k) = \frac{2}{3}\pi x^{3/2} + O\big(x^{5/4+\varepsilon}\big). \tag{1.5}$$

Доказательство опирается на формулу Перрона и зависит от средних значений дзета-функции Эпштейна, ассоциированной с суммой трех квадратов.

Затем, следуя схеме доказательства теоремы 2 и используя (1.5), получим асимптотику (подробности в теореме 4)

$$\sum_{k\leqslant x} P_3(pk) = \Big(1 + 2L(p)p^{-2}\Big)\frac{2}{3}\pi p^{1/2}x^{3/2}$$
$$+ O\Big(p^{1/4+\varepsilon}x^{5/4+\varepsilon}\Big) + O\Big(\big(px\big)^{7/6}\Big) + O\Big(p^{7/4}x^{3/4}\Big),$$

где $x \gg p^2$ и O-константы абсолютные.

Отметим, что в теоремах 1, 2 и 4 простые числа p взяты лишь для упрощения выкладок, вместо них можно взять целые положительные числа.

§2

Основой доказательства теорем 1 и 2 является обобщение соотношения (2.7) работы [6]. К выводу этого обобщения мы переходим.

Пусть $\psi(x) := x - [x] - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}$, где $[x]$ – целая часть числа x, $\{x\}$ – его дробная часть. Обозначим через Ω круг $x^2 + y^2 < (pw)^2$,

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{p};$$

как и выше, p – простое число; $w \geqslant 1$ – целое число. Ниже

$$\sum_{\Omega}\sum$$

означает суммирование по всем целым точкам (x, y) круга Ω.

Легко видеть, что

$$\sum_{\Omega}\sum\{f(x,y)\} = \sum_{1\leqslant n<(pw)^2} r(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\}$$

$$= \sum_{1\leqslant n<p} r_2(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\} + \sum_{p+1\leqslant n<2p} r(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\}$$

$$+ \sum_{2p+1\leqslant n<3p} r(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\} + \dots + \sum_{p(pw^2-1)+1\leqslant n<p(pw^2)} r(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\}$$

$$= \Bigg(\sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n)\frac{n}{p} + \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)\frac{n-p}{p} + \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)\frac{n-2p}{p}$$

$$+ \dots + \sum_{p(pw^2-1)+1\leqslant n\leqslant p(pw^2)} r(n)\frac{n-p(pw^2-1)}{p}\Bigg)$$

$$- \Big(r(p)+r(2p)+r(3p)+\dots+r(pw^2\cdot p)\Big) =: S - S_0,$$

где

$$S_0 = r(p)+r(2p)+r(3p)+\dots+r(pw^2\cdot p).$$

Далее,

$$S = \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r(n)n - 0 - \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)\cdot 1$$

$$- \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)\cdot 2 - \dots - \sum_{p(pw^2-p)+1\leqslant n\leqslant p\cdot(pw^2)} r(n)\cdot(pw^2-1).$$

Обозначим

$$S_1 := \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r(n)\cdot n =: \frac{1}{p}S_1'.$$

Очевидно,

$$-\Bigg(0+1\cdot\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)+2\cdot\sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)+\dots+(pw^2-1)\sum_{(pw^2-1)p+1\leqslant n\leqslant (pw^2)p} r(n)\Bigg)$$

$$= -pw^2\Bigg(\sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n)+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)+\sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)+\dots+\sum_{p(pw^2-1)+1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r(n)\Bigg)$$

$$+ \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n) + \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n) + \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n) + \dots + \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n)$$

$$+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)\cdots+\sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)$$
$$+\sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)+\cdots+\sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\sum_{p(pw^2-1)+1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r(n).$$

Отметим, что количество сумм в каждой из последних pw^2 строк равно последовательно pw^2, pw^2-1, $pw^2-2,\ldots,1$. Обозначим

$$S_2 := pw^2 \sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r(n);$$

тогда

$$S = S_1 - S_2 + S_3,$$

где

$$S_3 := \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r(n)+\sum_{1\leqslant n\leqslant 2p} r(n)+\sum_{1\leqslant n\leqslant 3p} r(n)+\cdots+\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r(n).$$

Введем обозначение

$$\sum := \sum_{1\leqslant n< p^2w^2} r(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\}.$$

Мы только что доказали соотношение

$$\sum = S_1 - S_2 + S_3 - S_0, \qquad (2.1)$$

обобщающее соотношение (2.7) из [6].

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2} P(pk) \ll pw^2\log^2 p,$$

где $\ll$-константа абсолютная.

Доказательство. Будем последовательно вычислять члены в правой части соотношения (2.1). Начнем с S_1. К сумме S_1' сначала применим абелево суммирование, а затем используем формулу Ландау (1.1). Имеем

$$\begin{aligned}
S_1' &= -\int\limits_0^{pw^2} \Big(\pi x + P(x) - 1\Big)\cdot 1 \cdot dx + \Big(\pi p^2w^2 + P(p^2w^2) - 1\Big)\cdot p^2w^2 \\
&= -\frac{\pi}{2}\, x^2\Big|_0^{p^2w^2} - \int\limits_0^{p^2w^2} P(x)\,dx + p^2w^2 + \pi p^4w^4 + p^2w^2P(p^2w^2) - p^2w^2 \\
&= O\Big(p^{3/2}w^{3/2}\Big) + \frac{\pi}{2}p^4w^4 + +p^2w^2P(p^2w^2),
\end{aligned}$$

откуда

$$S_1 = \frac{\pi}{2}p^3w^4 + pw^2P(p^2w^2) + O\Big(p^{1/2}w^{3/2}\Big).$$

Очевидно,

$$-S_2 = -pw^2\Big(\pi p^2w^2 + P(p^2w^2) - 1\Big).$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
S_3 &= \big(\pi p + P(p) - 1\big) + \big(\pi 2p + P(2p) - 1\big) \\
&\quad + \big(\pi 3p + P(3p) - 1\big) + \dots + \big(\pi p^2w^2 + P(p^2w^2) - 1\big) \\
&= \frac{\pi}{2}(p^3w^4 + p^2w^2) + \sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2} P(pk) - pw^2.
\end{aligned}$$

Тем самым, доказано следующее соотношение

$$\sum = \frac{\pi}{2}p^2w^2 + \sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2} P(pk) + O\Big(p^{1/2}w^{3/2}\Big) - S_0. \tag{2.2}$$

Получим теперь точную по порядку оценку сверху для S_0. По поводу свойств функции $r(n)$ см. [8, с. 253]. Сначала рассмотрим простые $p \equiv 1 \pmod 4$. Имеем

$$S_0 = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant pw^2\\(k,p)=1}} r(pk) + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant pw^2\\ p\| k}} r(pk) + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant pw^2\\ p^2\| k}} r(pk) + \dots + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant pw^2\\ p^l\| k}} r(pk),$$

где $p^t \| k$ означает, что $p^t \mid k$, но $p^{t+1} \nmid k$; $l = l(p,w)$ – максимальный показатель степени со свойством $p^l \| k$, где k – одно из чисел $1, 2, \dots, pw^2$.

В силу мультипликативности функции $r(n)$ и свойства

$$r(p^t) = 4(t+1) \quad \big(\text{для} \;\; p \equiv 1 \pmod 4\big),$$

имеем

$$\begin{aligned} S_0 &\ll r(p)\sum_{k\leqslant pw^2} r(k) + r(p^2)\sum_{k\leqslant w^2} r(k) + \dots + r(p^{l+1})\sum_{k\leqslant \frac{w^2}{p^{l-1}}} r(k) \\ &\ll 2\sum_{k\leqslant pw^2} r(k) + 3\sum_{k\leqslant w^2} r(k) + \dots + (l+2)\sum_{k\leqslant \frac{w^2}{p^{l-1}}} r(k) \\ &\ll 2pw^2 + 3w^2 + \dots + (l+2)\frac{w^2}{p^{l-1}} \ll pw^2. \end{aligned}$$

В случаях $p=2$ и $p\equiv 3 \pmod 4$ справедлива оценка $S_0 \ll w^2$. Таким образом,

$$S_0 \ll \begin{cases} pw^2, & \text{если } p\equiv 1 \pmod 4, \\ w^2, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4, \\ w^2, & \text{если } p=2, \end{cases} \tag{2.3}$$

причем $\ll$-константа абсолютная.

Остается оценить величину $\sum$ в левой части соотношения (2.1). Применим теорему 1 [6], по которой, в частности, можно оценить сумму

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(f(x,y)),$$

где

$$\Omega : x^2+y^2 < (pw)^2,$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{p}.$$

Имеем

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(f(x,y)) \ll pw^2\cdot \log^2 p,$$

откуда

$$\sum = \sum_{\Omega}\sum \{f(x,y)\} = \frac{\Pi}{2} + O(pw^2\cdot\log^2 p). \tag{2.4}$$

Здесь Π (число целых точек в круге Ω) $=\pi(pw)^2 + O(p^{2/3}w^{2/3})$. Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), доказываем теорему 1. □

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant x} P(pk) = C_p\pi x + O\Big(\big(px\big)^{5/6}\Big), \tag{1.4}$$

где $p \geqslant 2$ – простое число, $x \geqslant p$,

$$C_p = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2p}\right), & \textit{если} \;\; p \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{1}{2p}, & \textit{если} \;\; p \equiv 3 \pmod 4, \\ \frac{1}{2}, & \textit{если} \;\; p = 2, \end{cases}$$

В случае $x = pw^2$, $w \geqslant 1$ – целое число, (1.4) *заменяется несколько более точным соотношением*

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant pw^2} P(pk) = C_p \pi p w^2 + O\big(p^{1/2} w^{3/2}\big) + O\big(p^{5/3} w^{2/3}\big). \tag{2.5}$$

Все O-константы абсолютные.

Доказательство. Сначала получим (2.5). Воспользуемся соотношением (2.2), однако теперь нам необходимо асимптотическое поведение сумм S_0 и $\sum$. Начнем с вычисления

$$S_0 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant pw^2} r(pk).$$

Применим результаты работы [7] к квадратичной форме

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Обозначим

$$A_Q(y; l, k) := \sum_{\substack{n \leqslant y \\ n \equiv l \pmod k}} r(n),$$

где $y \geqslant 1$ и k, l – любые целые числа с условием $1 \leqslant k \leqslant y^{1/2}$. Тогда по теореме 2 [7]

$$A_Q(y; l, k) = c_Q N_Q(l, k) k^{-2} y + O\big(k^{1/3} y^{1/3} d(k)\big),$$

где

$$N_Q(l, k) = \operatorname{card}\big\{(x_1, x_2) \bmod k : x_1^2 + x_2^2 \equiv l \pmod k\big\};$$

в нашем случае $c_Q = \pi$, $k = p$, $l = 0$, $y = p^2 w^2$. По [9, с. 16],

$$B_p := N_Q(0, p) = \begin{cases} 2p - 1, & \text{если} \;\; p \equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & \text{если} \;\; p \equiv 3 \pmod 4, \\ 2, & \text{если} \;\; p = 2. \end{cases}$$

Тем самым,

$$S_0 = \pi B_p w^2 + O\big(p w^{2/3}\big). \tag{2.6}$$

Вычислим теперь $\sum$. Применительно к нашей форме $Q(x_1,x_2)$ сформулируем теорему 3 [7], сохраняя прежний смысл $A_Q(y;l,k)$; теперь, однако, k,l – любые целые числа с $k\geqslant 1$, для которых $(k,2)=1$ и $k(l,k)^{1/3}\leqslant y^{2/3}$. Тогда

$$A_Q(y;l,k)=c_QN_Q(l,k)k^{-2}y+O\big((l,k)^{1/3}y^{1/3}d(k)\big).$$

Отметим, что $N_Q(l,k)$ вычислено в [10], причем нами будет использоваться лишь случай $k=p$, $(l,p)=1$. Пусть $p\equiv 1 \pmod 4$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum &= \sum_{1\leqslant n\leqslant (pw)^2} r(n)\Big\{\frac{n}{p}\Big\} = \sum_{1\leqslant l\leqslant p-1}\frac{l}{p}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant (pw)^2\\ n\equiv l \pmod p}} r(n)\\
&= \sum_{1\leqslant l\leqslant p-1}\frac{l}{p}\Big[\pi p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)p^{-2}(pw)^2+O\big(p^{2/3}w^{2/3}\big)\Big]\\
&= \frac{p(p-1)}{2p}\Big[\pi(p-1)w^2+O\big(p^{2/3}w^{2/3}\big)\Big]\\
&= \frac{\pi}{2}(p^2-2p+1)w^2+O\big(p^{5/3}w^{2/3}\big)\\
&= \frac{\pi}{2}p^2w^2-\pi pw^2+\frac{\pi}{2}w^2+O\big(p^{5/3}w^{2/3}\big).
\end{aligned}\tag{2.7}$$

С другой стороны, по (2.2) и (2.6) для $p\equiv 1 \pmod 4$ имеем

$$\sum = \frac{\pi}{2}p^2w^2+\sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2}P(pk)+O\big(p^{1/2}w^{3/2}\big) - \Big[\pi(2p-1)w^2+O\big(pw^{2/3}\big)\Big].\tag{2.8}$$

Сравнение (2.7) и (2.8) дает (2.5) в случае $p\equiv 1 \pmod 4$.

Пусть теперь $p\equiv 3 \pmod 4$. Сходным образом, имеем

$$\begin{aligned}
\sum &= \sum_{1\leqslant l\leqslant p-1}\frac{l}{p}\Big[\pi p\Big(1+\frac{1}{p}\Big)p^{-2}(pw)^2+O\big(p^{2/3}w^{2/3}\big)\Big]\\
&= \frac{\pi}{2}(p^2-1)w^2+O\big(p^{5/3}w^{2/3}\big).
\end{aligned}\tag{2.9}$$

С другой стороны, по (2.2) и (2.6) для $p\equiv 3 \pmod 4$ имеем

$$\sum = \frac{\pi}{2}p^2w^2+\sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2}P(pk)+O\big(p^{1/2}w^{3/2}\big)-\Big[\pi w^2+O\big(pw^{2/3}\big)\Big].\tag{2.10}$$

Сравнивая (2.9) и (2.10), получаем (2.5) в случае $p\equiv 3 \pmod 4$.

Остается рассмотреть $p=2$. Очевидно,

$$\sum+\frac{1}{2}S_0=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant n\leqslant(2w)^2}r(n)=\frac{1}{2}\Bigl[\pi(2w)^2+O\bigl(w^{2/3}\bigr)\Bigr]. \tag{2.11}$$

С другой стороны, используя (2.2) и (2.6), имеем

$$\sum+\frac{1}{2}S_0=\frac{\pi}{2}(2w)^2+\sum_{1\leqslant k\leqslant 2w^2}P(2k) \\ +O\bigl(w^{3/2}\bigr)-\frac{1}{2}\Bigl[\pi\cdot 2w^2+O\bigl(w^{2/3}\bigr)\Bigr]. \tag{2.12}$$

Сравнивая (2.11) и (2.12), получаем (2.5) в случае $p=2$.

Вторая часть теоремы 2 доказана. Выведем из нее первую часть. Сначала заметим, что каждое число $x\geqslant p$ содержится в интервале вида $[pw^2,p(w+1)^2)$, откуда следует, что

$$w\leqslant\sqrt{\frac{x}{p}}<w+1; \tag{2.13}$$

напомним, что $w\geqslant 1$ – целое число. Имеем

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant x}P(pk)=\sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2}P(pk)+\sum_{pw^2<k\leqslant x}P(pk) \\ =\sum_{1\leqslant k\leqslant pw^2}P(pk)+O\bigl(p^{5/6}x^{5/6}\bigr),$$

поскольку с учетом оценки Серпинского и (2.13)

$$\sum_{pw^2<k\leqslant x}P(pk)\ll p(2w+1)(px)^{1/3}\ll(px)^{5/6}.$$

Поэтому в силу (2.5) имеем

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant x}P(pk)=C_p\pi pw^2+O\bigl((px)^{5/6}\bigr) \\ +O\bigl(p^{5/3}w^{2/3}\bigr)+O\bigl(p^{1/2}w^{3/2}\bigr). \tag{2.14}$$

Но по (2.13),

$$C_p\pi pw^2=C_p\pi x+C_p\pi(pw^2-x)=C_p\pi x+O\bigl(p^{1/2}x^{1/2}\bigr),$$

и, с учетом (2.13), из (2.14) следует (1.4). □

Замечание 1. Напомним сначала теорему 1 [6]. Пусть Ω – выпуклая область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная замкнутым контуром, U и W – её горизонтальный и вертикальный диаметры соответственно. Обозначим через Π число целых точек в области Ω, причем предполагается, что $\Pi \asymp UW$. Пусть в области Ω функция $f(x,y)$ имеет первые вторые производные и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \asymp A^{-1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \asymp B^{-1},$$

$$U \geqslant A \geqslant 2, \quad W \geqslant B \geqslant 2, \quad A \asymp B.$$

Тогда (при выполнении еще некоторых условий) справедлива следующая оценка, доказанная в теореме 1 [6],

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(f(x,y)) \ll \frac{UW\log^2 A}{A}. \tag{2.15}$$

Покажем, что оценка (2.15) близка к неулучшаемой. Действительно, если в качестве области Ω взять круг $x^2+y^2<(pw)^2$, а

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{p},$$

то из соотношения (2.7) следует, что при $p \equiv 1 \pmod 4$ и $w \gg \sqrt{p}$

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(f(x,y)) = -\pi p w^2(1+o(1)) = -\frac{pw\cdot pw}{p}(1+o(1)).$$

§3

В настоящем параграфе доказываются теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x} P_3(n) = \frac{2}{3}\pi x^{3/2} + O\Big(x^{5/4+\varepsilon}\Big). \tag{1.5}$$

Доказательство. Сначала изложим вариант доказательства, дающий несколько более слабый остаток. Второй вариант, дающий (1.5), отличается от первого лишь в самом конце доказательства. Для удобства введем величину $E(x)$:

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} r_3(n) =: \frac{4}{3}\pi x^{3/2} + E(x). \tag{3.1}$$

Без потери общности можно предположить, что x – целое положительное число. Тогда

$$\sum_{1\leqslant n<x}\Bigg(\sum_{1\leqslant m\leqslant n} r_3(m)\Bigg)=\sum_{1\leqslant m\leqslant x}(x-m)r_3(m). \qquad (3.2)$$

Из (3.1) следует, что левая часть соотношения (3.2) равна

$$\sum_{1\leqslant n<x}\Big(\frac{4}{3}\pi n^{3/2}+E(n)\Big)=\frac{4}{3}\pi\sum_{1\leqslant n<x} n^{3/2}+\sum_{1\leqslant n<x}E(n).$$

По формуле Эйлера–Маклорена [11, с. 26] вычисляем сумму $\sum_{1\leqslant n\leqslant x-1} n^{3/2}$.

В результате, левая часть соотношения (3.2) равна

$$\frac{8\pi}{15}x^{5/2}-\frac{2}{3}\pi x^{3/2}+O(\sqrt{x})+\sum_{1\leqslant n<x}E(n).$$

По формуле Перрона, правая часть соотношения (3.2) равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\zeta_3(s)\,ds=:I_1,$$

где

$$\zeta_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3(n)}{n^s}\qquad\Big(\sigma>\frac{3}{2}\Big)$$

обозначает дзета-функцию Эпштейна, ассоциированную с суммой трех квадратов. Свойства $\zeta_3(s)$ сформулированы, в частности, в [12, II]. Отметим, что функция $\zeta_3(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s=\frac{3}{2}$ с вычетом 2π. Она обладает функциональным уравнением

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_3(s)=\pi^{-(\frac{3}{2}-s)}\Gamma\Big(\frac{3}{2}-s\Big)\zeta_3\Big(\frac{3}{2}-s\Big).$$

Определим функцию $\mu_3(\sigma)$ для каждого вещественного σ как инфимум чисел $c\geqslant 0$ таких, что

$$\zeta_3(\sigma+it)\ll t^c,$$

или альтернативно как

$$\mu_3(\sigma)=\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\zeta_3(\sigma+it)|}{\log t}$$

(нам достаточно брать $t > 0$). Очевидно, всегда $\mu_3(\sigma) \geqslant 0$. Используя сформулированные свойства $\zeta_3(s)$ и доказанную в [12, I] оценку $\mu_3(1) \leqslant \frac{1}{4}$, можно вывести следующий факт: график функции $y = \mu_3(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 3/2)$ расположен под ломаной L с вершинами в точках $(0, 3/2)$, $(1, 1/4)$ и $(3/2{,}0)$.

Заметим, что точка $(2/5, 1)$ лежит на ломаной L. Поэтому легко видеть, что если $\alpha = 2/5 + \varepsilon$ (где, как обычно, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число), то

$$\zeta_3(\sigma + it) = O(|t|^{\beta}),$$

где $\beta = 1 - \varepsilon_0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon) > 0$. В интеграле I_1 сдвинем прямую интегрирования на $\sigma = \alpha$. Тогда по теореме Коши о вычетах получим

$$I_1 = \frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)} 2\pi + O\left(x^{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^{\beta}\,dt}{1+t^2}\right),$$

причем значение β гарантирует сходимость интеграла. Левая и правая части соотношения (3.2) вычислены. Отсюда следует первый (более слабый) вариант:

$$\sum_{1 \leqslant n < x} E(n) = \frac{2}{3}\pi x^{3/2} + O\left(x^{7/5+\varepsilon}\right).$$

Доказательство второго варианта основано на наблюдении, что на самом деле нам нужно поведение $|\zeta_3(s)|$ в среднем. Ниже $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – любые сколь угодно малые положительные константы. В работе [13] было доказано: пусть δ – любая фиксированная константа такая, что $1/2 + \varepsilon \leqslant 1 - \delta \leqslant 1 - \varepsilon$. Тогда для $T \geqslant 100$

$$\frac{1}{T} \int_{T}^{2T} \left|\zeta_3(1 - \delta + it)\right|^2 dt \ll T^{2\delta}.$$

Этот результат вместе с $\mu_3(0) = 3/2$ дает с помощью теоремы о средних значениях аналитических функций [14, с. 149] оценку

$$\int_{T/2}^{T} \left|\zeta_3\left(\frac{1}{4} + \varepsilon_1 + it\right)\right| \ll T^{2-\varepsilon_2},$$

где ε_2 зависит от ε_1. Эта оценка позволяет показать, что

$$\int_{-T}^{T} \frac{\left|\zeta_3\left(\frac{1}{4}+\varepsilon_1+it\right)\right|}{1+t^2}\,dt \ll 1,$$

если $T > C$, где $C > 0$ – некоторая константа; в частности, интеграл при $T = \infty$ сходится. Поэтому сдвигая в интеграле I_1 прямую интегрирования на $\sigma = 1/4 + \varepsilon_1$ и применяя последний факт, получаем теорему 3. □

Следствие 1.

$$\int_0^x P_3(y)\,dy \ll x^{5/4+\varepsilon}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть целое x. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^x P_3(y)\,dy &= \int_0^x \left(A_3(y) - \frac{4}{3}\pi y^{3/2}\right) dy \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} A_3(k) - \frac{4}{3}\pi \int_0^x y^{3/2}\,dy =: K.\end{aligned}$$

По формуле Эйлера–Маклорена,

$$\int_0^x y^{3/2}\,dy = \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} k^{3/2} + \frac{\pi}{2}x^{3/2} + O(\sqrt{x}),$$

откуда

$$\begin{aligned}K &= \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} A_3(k) - \frac{4}{3}\pi \sum_{0\leqslant k\leqslant x-1} k^{3/2} - \frac{2}{3}\pi x^{3/2} + O(\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{2}{3}\pi x^{3/2} + O\left(x^{5/4+\varepsilon}\right)\right) - P_3(x) - \frac{2}{3}\pi x^{3/2} + O(\sqrt{x}) \\ &= O\left(x^{5/4+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

□

Замечание 2. (i) Мы хотели бы исправить неточность в формулировке гипотезы Линделёфа для $\zeta_3(s)$ (см. [12, II]). Гипотезой Линделёфа для $\zeta_3(s)$ назовем следующее гипотетическое утверждение: график функции $y = \mu_3(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$ есть ломаная с вершинами в точках

$\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, 0)$. Отсюда следует, что гипотетически $\mu_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$. Все это согласуется с результатами о средних значениях, полученными в [13].

(ii) Мы можем довести результат следствия 1 до

$$\int_0^x P_3(y)\,dy \ll x^{1+\varepsilon}.$$

Соответственно, остаточный член в теореме 3 тоже будет усилен. Однако это усиление сложнее доказывается, а выгоды от его применения в теореме 4 минимальны. Поэтому мы предпочли тот вариант, который изложен в работе.

Прежде чем формулировать теорему 4, дадим еще раз определение величины $L(p)$:

$L(p) = 0$, если $p = 2$ или $p \equiv 1 \pmod 4$;

$L(3) = 1$;

$L(p) = p \cdot h(-p)$, если $p \geqslant 7$ и $p \equiv 3 \pmod 4$, причем $h(-p)$ обозначает, как обычно, число классов мнимого квадратичного поля дискриминанта $-p$.

Теорема 4. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant x} P_3(pk) = \left(1 + 2L(p)p^{-2}\right)\frac{2}{3}\pi p^{1/2}x^{3/2} + O\left(p^{1/4+\varepsilon}x^{5/4+\varepsilon}\right) + O\left((px)^{7/6}\right) + O\left(p^{7/4}x^{3/4}\right), \tag{3.3}$$

где $p \geqslant 2$ – простое число, $x \geqslant p$.

В случае $x = pw^2$, $w \geqslant 1$ – целое число, (3.3) *заменяется несколько более точным соотношением*

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant pw^2} P_3(pk) = \left(1 + 2L(p)p^{-2}\right)\frac{2}{3}\pi p^2 w^3 + O\left(p^{3/2+\varepsilon}w^{5/2+\varepsilon}\right) + O\left(p^{5/2}w^{3/2}\right), \tag{3.4}$$

Все O-константы абсолютные.

Доказательство. Пусть пока $p > 2$. Сначала получим (3.4). Для этого используем соображения, уже примененные в доказательствах теорем 1 и 2. Пусть Ω означает шар

$$x^2 + y^2 + z^2 < (pw)^2,$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{p}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\sum\sum_{\Omega}\sum\bigl\{f(x,y,z)\bigr\} =: \sum = \sum_{1\leqslant n<(pw)^2} r_3(n)\Bigl\{\frac{n}{p}\Bigr\}\\ = \Biggl(\sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_3(n)\frac{n}{p} + \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_3(n)\frac{n-p}{p}\\ + \dots + \sum_{p^2w^2-p+1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n)\frac{n-p(pw^2-1)}{p}\Biggr)\\ - \Bigl(r_3(p) + r_3(2p) + \dots + r_3(p^2w^2)\Bigr) =: S - S_0.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}S = \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n)\cdot n - \Biggl(0 + \sum_{p+1\leqslant n\leqslant 2p} r_3(n)\cdot 1 + \sum_{2p+1\leqslant n\leqslant 3p} r_3(n)\cdot 2\\ + \dots + \sum_{p^2w^2-p+1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n)\cdot\bigl(pw^2-1\bigr)\Biggr).\end{aligned}$$

Обозначим

$$S_1 = \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n)\cdot n.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, имеем

$$S = S_1 - S_2 + S_3,$$

где

$$\begin{aligned}
S_2 &:= pw^2 \sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n),\\
S_3 &:= \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_3(n) + \sum_{1\leqslant n\leqslant 2p} r_3(n) + \dots + \sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n).
\end{aligned}$$

Тем самым, мы доказали соотношение

$$\sum = S_1 - S_2 + S_3 - S_0, \tag{3.5}$$

аналогичное (2.1). Будем последовательно вычислять суммы S_1, $-S_2$, S_3. Начнем с S_1. Положим

$$W_m := \sum_{1\leqslant h\leqslant m} r_3(h); \quad W_m =: \frac{4}{3}\pi m^{3/2} + E(m);$$

используя абелево суммирование, имеем

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{p}\Biggl(\sum_{1\leqslant m\leqslant p^2w^2} W_m(m-(m+1)) + W_{p^2w^2}(p^2w^2+1)\Biggr)\\
&= \frac{1}{p}\Biggl[\sum_{1\leqslant m\leqslant p^2w^2} -\biggl(\frac{4}{3}\pi m^{3/2} + E(m)\biggr)\\
&+ \biggl(\frac{4}{3}\pi p^3w^3 + E(p^2w^2)\biggr)(p^2w^2+1)\Biggr]\\
&= \frac{1}{p}\Biggl[-\frac{4}{3}\pi\biggl(\frac{2}{5}(p^2w^2)^{5/2} + \frac{1}{2}(p^2w^2)^{3/2} + O(pw)\biggr) - \sum_{1\leqslant m\leqslant p^2w^2} E(m)\\
&+ \biggl(\frac{4}{3}\pi p^5w^5 + E(p^2w^2)p^2w^2 + \frac{4}{3}\pi p^3w^3 + E(p^2w^2)\biggr)\Biggr].
\end{aligned}$$

Очевидно,

$$-S_2 = -pw^2\biggl(\frac{4}{3}\pi(p^3w^3) + E(p^2w^2)\biggr).$$

Используя теорему 3, имеем

$$\begin{aligned}S_1 - S_2 &= \frac{1}{p}\biggl[-\frac{4}{3}\pi\Bigl(\frac{2}{5}(p^2w^2)^{5/2} + O(pw)\Bigr) \\ &\quad - \Bigl(\frac{2}{3}\pi(p^2w^2)^{3/2} + O\Bigl((p^2w^2)^{5/4+\varepsilon}\Bigr)\Bigr) + \frac{2}{3}\pi p^3w^3 + E(p^2w^2)\biggr] \\ &= -\frac{8}{15}\pi p^4w^5 + O\Bigl(p^{3/2+\varepsilon}w^{5/2+\varepsilon}\Bigr).\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{1\leqslant n\leqslant p} r_3(n) + \sum_{1\leqslant n\leqslant 2p} r_3(n) + \dots + \sum_{1\leqslant n\leqslant p^2w^2} r_3(n) \\ &= \frac{4}{3}\pi p^{3/2}\Bigl(1 + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \dots + (pw^2)^{3/2}\Bigr) \\ &\quad + \Bigl(E(p) + E(2p) + \dots + E(p^2w^2)\Bigr) \\ &= \frac{4}{3}\pi p^{3/2}\Bigl(\frac{2}{5}(pw^2)^{5/2} + \frac{1}{2}(pw^2)^{3/2} + O(p^{1/2}w)\Bigr) \\ &\quad + \Bigl(E(p) + E(2p) + \dots + E(p^2w^2)\Bigr).\end{aligned}$$

Тем самым, эти вычисления и (3.5) дают

$$\begin{aligned}S_1 - S_2 + S_3 = \sum + S_0 &= \frac{2}{3}\pi p^3w^3 + O\Bigl(p^{3/2+\varepsilon}w^{5/2+\varepsilon}\Bigr) + O(p^2w) \\ &\quad + \Bigl(E(p) + E(2p) + \dots + E(p^2w^2)\Bigr). \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Теперь мы вычислим $\sum + S_0$ другим путем, опираясь на результаты работы [7]. К сумме

$$\sum = \sum_{1\leqslant n\leqslant (pw)^2} r_3(n)\Bigl\{\frac{n}{p}\Bigr\}$$

применим теорему 3 [7], в которой получена асимптотика для величины

$$A(x;l,k) = \sum_{n\leqslant x,\, n\equiv l \pmod{k}} r_3(n).$$

Для всех целых k, l с $k \geqslant 1$, $(k,2) = 1$, и $(l,k)^{1/4}k \leqslant x^{3/4}$ имеем

$$A(x;l,k) = \frac{4}{3}\pi N(l,k)k^{-3}x^{3/2} + O\Bigl((l,k)^{1/4}x^{3/4}d(k)\Bigr),$$

где
$$N(l,k)=\operatorname{card}\Big\{(x_1,x_2,x_3)\bmod k:x_1^2+x_2^2+x_3^2\equiv l \pmod k\Big\}.$$
Имеем
$$\sum=\sum_{1\leqslant k_0\leqslant p-1}\frac{k_0}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant (pw)^2}r_3(n)$$
$$=\sum_{1\leqslant k_0\leqslant p-1}\frac{k_0}{p}\Big\{\frac{4}{3}\pi N(k_0,p)p^{-3}(p^2w^2)^{3/2}+O\Big(p^{3/2}w^{3/2}\Big)\Big\}.$$
Величина $N(k_0,p)$ вычисляется с помощью гауссовых сумм. В результате имеем (см. [15, с. 35])
$$N(k_0,p)=p^2\bigg(1+\Big(\frac{-k_0}{p}\Big)\bigg),$$
где $\left(\frac{-k_0}{p}\right)$ – символ Лежандра. Следовательно,
$$\sum=\frac{4}{3}\pi w^3\bigg(\sum_{1\leqslant k_0\leqslant p-1}\frac{k_0}{p}\cdot p^2+\sum_{1\leqslant k_0\leqslant p-1}k_0\Big(\frac{-k_0}{p}\Big)\bigg)+O\Big(p^{5/2}w^{3/2}\Big).$$
Введем обозначение
$$L(p):=\sum_{1\leqslant k_0\leqslant p-1}k_0\Big(\frac{-k_0}{p}\Big).$$
Легко показать, что $L(p)=0$, если $p\equiv 1 \pmod 4$; $L(3)=1$; если же $p\equiv 3 \pmod 4$ и $p\geqslant 7$, то, как следует из [9, с. 381], $L(p)=ph(-p)$, где $h(-p)$ – число классов мнимого квадратичного поля дискриминанта $-p$.

Поэтому
$$\sum=\frac{2}{3}\pi p^3w^3-\frac{2}{3}p^2w^3+\frac{4}{3}\pi L(p)w^3+O\Big(p^{5/2}w^{3/2}\Big).$$
Сумма
$$S_0=\sum_{1\leqslant n\leqslant (pw)^2,\,n\equiv 0 \pmod p}r_3(n)$$
вычисляется с помощью теоремы 2 [7]. Все вполне аналогично случаю суммы $\sum$, но теперь $N(p,p)=p^2$ (см. [15, с. 35]) и несколько другой остаток. Имеем
$$S_0=\frac{4}{3}\pi p^2w^3+O\Big(p^{7/4}w^{3/2}\Big).$$

Поэтому

$$\sum + S_0 = \frac{2}{3}\pi p^3 w^3 + \frac{2}{3} p^2 w^3 + \frac{4}{3}\pi L(p) w^3 + O\Big(p^{5/2} w^{3/2}\Big). \qquad (3.7)$$

Приравнивая правые части соотношений (3.6) и (3.7), получаем

$$E(p) + E(2p) + \dots + E(pw^2 \cdot p)$$
$$= \frac{2}{3}\pi p^2 w^3 + \frac{4}{3}\pi L(p) w^3 + O\Big(p^{3/2+\varepsilon} w^{5/2+\varepsilon}\Big) + O\Big(p^{5/2} w^{3/2}\Big). \qquad (3.8)$$

Переход от (3.8) к асимптотике для $\sum_{1\leqslant k\leqslant x} P_3(pk)$ не представляет труда, причем мы воспользуемся старой оценкой И. М. Виноградова [16]

$$P_3(x) \ll x^{2/3}.$$

Случай $p = 2$ рассматривается аналогично. □

Замечание 3. (i) Ярник [17] доказал асимптотику

$$\int_0^x P_3(y)^2\, dy = c_1 x^2 \log x + O\big(x^2 \log^{1/2} x\big);$$

Лау [18] довел остаточный член до $O(x^2)$. Используя эти результаты и теорему 3, можно показать, что

$$\sum_{k\leqslant x} P_3(k)^2 = c_1 x^2 \log x + O(x^2). \qquad (3.9)$$

Аналогично, можно вывести асимптотику

$$\sum_{k\leqslant x} P(k)^2 = c_1' x^{3/2} + O(x \log^3 x)$$

из асимптотики для

$$\int_0^x P(y)^2\, dy$$

(по поводу последнего факта см. книгу А. З. Вальфиша [19]).

(ii) Сформулируем теперь теорему 3 как утверждение об асимптотике для сумматорной функции коэффициентов ряда Дирихле. Рассмотрим сумматорную функцию

$$A_3^{(0)}(x) = {\sum_{n\leqslant x}}' r_3(n)$$

для коэффициентов дзета-функции Эпштейна $\zeta_3(s)$; здесь $\sum'$ означает, что последний член суммы равен $\frac{1}{2}r_3(x)$, если x целое, и равен 0, если x нецелое. Имеем [20]

$$A_3^{(0)}(x) = Q^{(0)}(x) + P_3^{(0)}(x),$$

где $Q^{(0)}(x)$ – вычетная функция, $P^{(0)}(x)$ – остаточный член. В нашем случае

$$A^{(0)}(x) = \frac{4}{3}\pi x^{3/2} + P_3^{(0)}(x).$$

При целом k

$$P_3^{(0)}(k) = A_3(k) - \frac{1}{2}r_3(k) - \frac{4}{3}\pi k^{3/2} = P_3(k) - \frac{1}{2}r_3(k).$$

Теперь теорема 3 формулируется иначе:

$$\sum_{k\leqslant x} P_3^{(0)}(k) = O\big(x^{5/4+\varepsilon}\big)$$

(оценку можно довести до $O\big(x^{1+\varepsilon}\big)$). Справедлива также асимптотика

$$\sum_{k\leqslant x} P_3^{(0)}(k)^2 = c_1 x^2 \log x + O\big(x^2 \log^{1/2} x\big).$$

Аналогичным образом вводится функция $P^{(0)}(x)$.

(iii) Сочетая (3.9) и теорему 3 легко доказать, что

$$\operatorname{card}\Big\{k \leqslant x \mid P_3(k) > 0\Big\} \gg \frac{x}{\log x}.$$

Соответственно, для круга

$$\operatorname{card}\Big\{k \leqslant x \mid P(k) > 0\Big\} \gg \sqrt{x}.$$

Литература

1. M. N. Huxley, *Area, lattice points, and exponential sums.* Oxford, 1996.
2. D. R. Heath-Brown, *Lattice points in the sphere*, — Number theory in progress. Vol. 2, de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 883–892.
3. E. Landau, *Über die Gitterpunkte in einem Kreise.* — Math. Zeit. **5** (1919), 319–320.
4. G. H. Hardy, E. Landau, *The lattice points of a circle.* — Proc. Royal Soc., A **105** (1924), 244–258.
5. И. М. Виноградов, *Избранные труды.* М., 1952.
6. О. М. Фоменко, *О распределении дробных частей многочленов от двух переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 222–232.

7. R. A. Smith, *The average order of a class of arithmetic functions over arithmetic progressions with application to quadratic forms.* — J. für die reine und angew. Math. **317** (1980), 74–87.
8. E. Landau, *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre.* Berlin, 1962.
9. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* М., 1985.
10. R. A. Smith, *The circle problem in an arithmetic progression.* — Canad. Math. Bull. **11** (1968), 175–184.
11. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М., 1979.
12. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Эпштейна, I, II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 169–178; **371** (2009), 157–170.
13. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **106**, No. 3 (1996), 217–226
14. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
15. С. А. Степанов, *Арифметика алгебраических кривых*, М., 1991.
16. И. М. Виноградов, *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, М., 1976.
17. V. Jarnik, *Über die Mittelwertsätze der Gitterpuntlehre, 5 Abhandlung..* — Časopis pro pěst. mat. a fys. **69** (1940), 148–174.
18. Y.-K. Lau, *On the mean square formula of the error term for a class of arithmetical functions.* — Monatsh. Math. **128** (1999), 111–129.
19. А. З. Вальфиш, *Целые точки в многомерных шарах.* Тбилиси, 1959.
20. J. L. Hafner, *On the average order of a class of arithmetical functions.* — J. Number Theory **15** (1982), 36–76.

Fomenko O. M. Lattice points in the circle and the sphere.

Let $P(x)$ and $P_3(x)$ be the error terms in the Gaussian circle problem and the sphere problem, respectively.

We investigate the asymptotic behavior of the sums

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\ k\equiv 0 \pmod p}} P(k), \qquad \sum_{\substack{k\leqslant x\\ k\equiv 0 \pmod p}} P_3(k).$$

Here $p \geqslant 2$ is a prime number.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 22 сентября 20013 г.