Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

О. М. Фоменко

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ДЕДЕКИНДА

§1.

Пусть K_n – поле алгебраических чисел степени $n = [K : \mathbb{Q}]$; дзета-функция Дедекинда поля K_n задается посредством

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{\mathfrak{A}} (N\mathfrak{A})^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где суммирование идёт по всем целым ненулевым идеалам $\mathfrak{A}$ в K_n, $s = \sigma + it$. Можно записать

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k, K_n)}{k^s},$$

где $d(k, K_n)$ – количество целых идеалов в K_n нормы k. Известно, что $\zeta_{K_n}(s)$ – мероморфная функция во всей комплексной плоскости с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$ с вычетом, скажем, Λ_n; она удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа $\ll s \to 1 - s \gg$. Представим

$$D(x, K_n) := \sum_{k \leqslant x} d(k, K_n)$$

в виде суммы главного и остаточного членов

$$D(x, K_n) =: M(x, K_n) + \Delta(x, K_n) = \Lambda_n x + \Delta(x, K_n),$$

где, как доказал Ландау [1],

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{2}{n+1}}. \tag{1.1}$$

Ландау получил также Ω-результат, сформулировав его так: асимптотика вида

$$D(x, K_n) = \Lambda_n x + O(x^{\theta}), \tag{1.2}$$

где $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, невозможна.

Ключевые слова: дзета-функция Дедекинда, распределение идеалов, L-функции Артина.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00239-а).

Асимптотика для среднего квадратичного

$$\int_1^x \Delta(y, K_2)^2 dy$$

получена в [2]; в этой же работе для $n \geqslant 3$ доказана оценка сверху

$$\int_1^x \Delta(y, K_n)^2 dy \ll x^{3-\frac{4}{n}} \log^n x \tag{1.3}$$

(степень логарифма до $\log^{n-1} x$ снизил Лау [3]). Автор [4] заменил оценку сверху (1.3) асимптотикой в случае кубического поля K_3 отрицательного дискриминанта, нормальное замыкание которого K_6 имеет группу Галуа $\mathrm{Gal}(K_6/\mathbb{Q}) = S_3$ (если коротко: в случае поля K_3 отрицательного дискриминанта с группой Галуа S_3).

Очевидное уточнение асимптотики (1.1) можно сделать для абелевых расширений $K_n/\mathbb{Q}$. Хорошо известно, что в этом случае

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi), \tag{1.4}$$

где произведение берется по всем L-функциям с различными примитивными характерами Дирихле, произведение кондукторов которых равно $|D|$, где D – дискриминант поля K_n; при этом один характер тривиален. Поэтому $\Delta(x, K_n)$ исследуется теми же способами, что и остаток в проблеме делителей

$$\sum_{k \leqslant x} d_n(k),$$

где $d_n(k)$ – количество представлений k в виде произведения n факторов (см. [5]). В результате получаем: если $K_n/\mathbb{Q}$ – абелево расширение, то при $n \geqslant 4$

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{3}{n+2}+\varepsilon}. \tag{1.5}$$

Уточнениями оценки Ландау (1.1) для $n = 2$ занимались многие авторы, особенно в случае $K_2 = \mathbb{Q}(i)$ (проблема круга!). В случае произвольного квадратичного поля лучший результат получили Хаксли и Ватт [6]:

$$\Delta(x, K_2) \ll x^{\frac{23}{73}} (\log x)^{\frac{461}{146}}.$$

Мюллер [7] улучшил (1.1) для кубического поля, доказав теорему: для каждого K_3 над $\mathbb{Q}$ и каждого $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\Delta(x, K_3) \ll x^{\frac{43}{96}+\varepsilon}.$$

В настоящей работе мы дополняем наш прежний результат [4] об интегральном среднем квадратичном остатка $\Delta(y, K_3)$, а затем уточняем результат Ландау (1.1) в случае неабелевых расширений: для поля K_4, нормальное замыкание которого K_8 имеет группу Галуа D_4; для поля K_6, нормального замыкания поля K_3 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3. Кроме того, мы дополняем результат Ландау (1.2) в случае указанных выше полей K_3 и K_4.

§2.

В этом параграфе рассматриваются кубические поля K_3 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3 (дискриминант $D = df^2$, $d \neq 1$ бесквадратно) или с группой Галуа C_3 (дискриминант $D = f^2$ (см. [8])).

Случай K_3 с группой Галуа S_3 является более сложным. Нормальным замыканием такого поля K_3 является поле $K_6 = K_3(\sqrt{D})$ с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K_6/\mathbb{Q}) = S_3$ (см. по этому поводу [9–11]). Среди промежуточных полей между $\mathbb{Q}$ и K_6, наряду с полем K_3 и сопряженными с ним полями K_3', K_3'', имеется квадратичное поле $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Пусть H – группа идеалов индекса 3 в K_2, для которой K_6 является полем классов над $\mathbb{Q}$ ("Umkehrsatz" теории полей классов (см. [12])), $\mathfrak{f}$ – её ведущий идеал. Тогда H делит множество $A^{\mathfrak{f}}$ всех идеалов $\mathfrak{a} \subseteq K_2$ с $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1$ на три класса:

$$A^{\mathfrak{f}} = H \cup C \cup C'.$$

$\tau = (\sqrt{d} \to -\sqrt{d})$ отображает в K_2 C на C'. Пусть $\omega = e^{2\pi i/3}$; введем характер Гекке

$$\chi_2(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{a} \in H \\ \omega, & \mathfrak{a} \in C \\ \overline{\omega}, & \mathfrak{a} \in C' \\ 0, & (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим L-ряд Гекке

$$L(s, \chi_2) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi_2(\mathfrak{a}) N_{K_2}(\mathfrak{a})^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где суммирование идет по всем целым идеалам $\mathfrak{a} \neq 0$ в K_2 и N_{K_2} означает (абсолютную) норму идеалов в K_2. Как доказано в [10],

$$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s)L(s, \chi_2). \tag{2.1}$$

Можно также вывести (2.1) из результатов, приведенных в [9], как это делается в [7].

Отметим, что в случае $D < 0$ равенство (2.1) доказано в [13] в другой форме:

$$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s)L(s, F), \tag{2.2}$$

где $L(s, F)$ – L-функция Гекке голоморфной параболической собственной формы Гекке F веса 1 относительно когруэнц-подгруппы $\Gamma_0(|D|)$.

Используя работу Хассе [9], сформулируем предложение о разложении простых рациональных чисел на простые идеалы в K_2 и K_3 (напомним, что они являются подполями K_6).

Предложение 1. 1) *Пусть* $(d/p) = -1$, *тогда в* K_2 $p = \mathfrak{p}$, $\deg \mathfrak{p}/p = 2$, *при этом* $\mathfrak{p}$ *принадлежит* H; *в* K_3 $p = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$, $\deg \mathfrak{P}/p = 1$, $\deg \mathfrak{P}_1/p = 2$, $d(p, K_3) = 1$.

2) *Пусть* $(d/p) = 1$, *тогда в* K_2 $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, *при этом*:

а) *если* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ *принадлежат* H, *то в* K_3 $p = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\deg \mathfrak{P}/p = \deg \mathfrak{P}_1/p = \deg \mathfrak{P}_2/p$, $d(p, K_3) = 3$;

в) *если* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ *не принадлежат* H, *то в* K_3 $p = \mathfrak{P}$, $\deg \mathfrak{P}/p = 3$, $d(p, K_3) = 0$.

В следующем предложении дополняется утверждение Ландау (1.2) в случае поля K_3 с группой Галуа C_3 или S_3. Это предложение необходимо для доказательства теоремы 1.

Предложение 2. *Найдутся положительные константы* c_1 *и* c_2 *такие, что для любого* $T > T_0$ *каждый интервал* $[T, T + c_1T^{2/3}]$ *содержит две точки* t_1, t_2, *для которых*

$$\Delta(t_1, K_3) > c_2 t_1^{1/3}, \quad \Delta(t_2, K_3) < -c_2 t_2^{1/3}.$$

Доказательство. В частном случае поля K_3 отрицательного дискриминанта с группой Галуа S_3 результат был получен в [4]. Предложение следует из общего результата Ивича [14] при выполнении некоторых условий. Эти условия в нашем случае выполняются автоматически, кроме условия (i) (см. [14, с. 142]), которое ещё надо проверить.

Условие (i): $d(n,K_3) \ll n^{K+\varepsilon}$ для некоторой константы $K \geqslant 0$ и $d(n,K_3) \gg n^K$ для бесконечного множества целых n.

Оценка сверху $d(n,K_3) \ll n^{\varepsilon}$ общеизвестна. Докажем оценку снизу. Рассмотрим сначала абелево поле K_3 с группой Галуа C_3. Тогда дискриминант поля равен $D = f^2$. Поэтому из (1.4) следует, что

$$d(n,K_3) = 1 + \chi_1(n) + \overline{\chi_1(n)},$$

где χ_1 – примитивный характер Дирихле по модулю f. Следовательно, для простых чисел p в арифметической прогрессии $n \equiv 1 \pmod f$ имеем $d(p,K_3) = 3$. По теореме Дирихле таких простых чисел бесконечное количество.

В случае поля K_3 дискриминанта df^2 с группой Галуа S_3 $d(p,K_3) = 1$ для всех простых p с $(d/p) = -1$, как это следует из предложения 1. Бесконечность множества таких p следует из теоремы Дирихле. □

Пусть $\sigma(K_n)$ – нижняя грань таких σ, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^T |\zeta_{K_n}(\sigma + it)|^2\, dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Известно [15], что

$$\sigma(K_n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Теорема 1. *При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\int_1^x \Delta(y,K_3)^2\, dy = \frac{|D|^{1/3}}{10\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n,K_3)^2}{n^{4/3}} x^{5/3} + R(x,K_3) \tag{2.3}$$

с

$$R(x,K_3) \ll x^{c+\varepsilon},$$

где

$$c = 2 - \frac{3 - 4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3)) - 1}.$$

В случаях поля K_3 с группой Галуа C_3 и поля K_3 дискриминанта $D < 0$ с группой Галуа S_3 имеем $\sigma(K_3) \leqslant \frac{5}{8}$, что дает $c \leqslant \frac{8}{5}$, и соотношение (2.3) *становится асимптотикой.*

Теорема является обобщением теоремы 1 [4] и доказывается точно так же, поэтому доказательство мы опустим. При этом используется предложение 2. Если взять $\sigma(K_3) \leqslant \frac{2}{3}$, то вместо асимптотики получаем почти точную по порядку оценку сверху, практически совпадающую с результатом Чандрасекхарана и Нарасимхана (1.3) при $n = 3$. Покажем, как получается оценка $\sigma(K_3) \leqslant 5/8$ в случаях, о которых говорилось выше.

Рассмотрим сначала поле K_3 с группой Галуа C_3. Тогда из (1.4) следует, что при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

$$\begin{aligned}\int\limits_1^T |\zeta_{K_3}(\sigma+it)|^2\,dt &= \int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)L(\sigma+it,\chi_1)L(\sigma+it,\overline{\chi}_1)|^2\,dt \\ &\leqslant \left\{\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^4\,dt\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_1^T |L(\sigma+it,\chi_1)|^8\,dt\right\}^{1/4} \\ &\quad\times\left\{\int\limits_1^T |L(\sigma+it,\overline{\chi}_1)|^8\,dt\right\}^{1/4}.\end{aligned}$$

Справедливы следующие неравенства

$$\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^4\,dt \ll T \qquad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right),$$

$$\int\limits_1^T |L(\sigma+it,\chi_1)|^8\,dt \ll T^{1+\varepsilon} \qquad \left(\sigma \geqslant \frac{5}{8}\right).$$

Первое является классическим, второе в случае $\zeta(s)$ доказал Хис–Браун [16]; перенос на случай L-функций Дирихле является стандартным. Отсюда следует неравенство $\sigma(K_3) \leqslant \frac{5}{8}$ для полей K_3 с группой Галуа C_3.

В случае K_3 с $D < 0$ и группой Галуа S_3 используем (2.2) и действуем по той же схеме, но теперь нам необходимо неравенство

$$\int\limits_1^T |L(\sigma+it,F)|^4\,dt \ll T^{1+\varepsilon} \qquad \left(\sigma \geqslant \frac{5}{8}\right),$$

доказанное Ивичем [17].

§3.

В этом параграфе для поля K_4 с диэдральной группой Галуа D_4 и для нормального поля K_6 с группой Галуа S_3 улучшапется оценка Ландау (1.1).

Существует пять типов полей K_4, тип зависит от группы Галуа нормального замыкания поля K_4. Пусть $H(G)$ – собрание полей K, нормальных над $\mathbb{Q}$, с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = G$. Возможны следующие типы полей K_4:

1) $K_4 < K_{24} \in H(S_4)$, S_4 – симметрическая группа,

2) $K_4 < K_{12} \in H(A_4)$, A_4 – знакопеременная группа,

3) $K_4 < K_8 \in H(D_4)$, D_4 – диэдральная группа,

4) K_4 – нормальное поле с $\mathrm{Gal}(K_4/\mathbb{Q}) = V_4$ (четверная группа Клейна),

5) K_4 – нормальное поле с $\mathrm{Gal}(K_4/\mathbb{Q}) = C_4$ (циклическая группа).

Мы не будем рассматривать поля типов 4) и 5), поскольку для них дзета-функция Дедекинда выражается в виде произведения четырех L-рядов Дирихле. Оценка $\Delta(x, K_4)$ для таких полей, улучшающая (1.1), уже получена в (1.5). Из оставшихся типов полей K_4 мы можем трактовать тип 3).

Поля K_4 типа 3) порождаются корнями неприводимых биквадратных полиномов вида $x^4 + ax^2 + b$, a, $b \in \mathbb{Z}$. Для простоты мы выберем поле $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, где m – неквадратное целое положительное число, $m_0 > 1$ – свободная от квадратов часть m. Само поле K_4 не является нормальным, его нормальное замыкание $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$ имеет группу Галуа $G = \mathrm{Gal}(K_8/\mathbb{Q}) = D_4$ (см. [18]).

Теорема 2. *Для поля $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ справедлива оценка*

$$\Delta(x, K_4) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Среди промежуточных полей между $\mathbb{Q}$ и K_8, наряду с K_4, имеется еще три квадратичных подполя $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ и подполе $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{m})$. С полем K_8 свяжем голоморфную параболическую форму $\varphi(\tau, K_8)$ веса 1.

Пусть ψ – двумерное комплексное неприводимое представление группы Галуа $G = D_4$ (подробности см. в [18]). Определим L-функцию Артина, ассоциированную с ψ:

$$L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}.$$

Имеет место разложение в эйлеровское произведение

$$L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) = \prod_{p|N}(1 - a(p)p^{-s})^{-1} \times \prod_{p\nmid N}(1 - a(p)p^{-s} + \varepsilon(p)p^{-2s})^{-1},$$

где N – кондуктор представления ψ и $\varepsilon(n)$ означает характер $(-1/n)$. Определим функцию $\varphi(\tau, K_8)$ посредством

$$\varphi(\tau, K_8) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \quad q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau).$$

Из теории Гекке–Вейля–Ленглендса следует, что $\varphi(\tau, K_8)$ является голоморфной параболической собственной формой Гекке веса 1 и характера $\varepsilon(n)$ относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$ (подробности см. в [19]).

В [18] найдены три выражения для $\varphi(\tau, K_8)$, соответствующие трем промежуточным квадратичным подполям.

Основой нашего доказательства оценки (3.1) является следущее разложение, аналогичное (2.2):

$$\zeta_{K_4}(s) = \zeta(s)L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right) L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi). \tag{3.2}$$

Оно выводится с помощью результатов работы [18] и соображений, изложенных в главе 8 книги [10]. Имея разложение (3.2), дальше будем действовать методами, заимствованными у проблемы делителей [5, с. 314–317].

Пусть $c = 1 + \varepsilon > 1$, x – половина нечетного числа. По формуле Перрона,

$$D(x, K_4) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \zeta_{K_4}(s)\frac{x^s}{s}\,ds + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right),$$

где $O(\dots) = O_\varepsilon(\dots)$. Рассмотрим интеграл по прямоугольнику Γ с вершинами в точках

$$\frac{1}{2} - iT, c - iT, c + iT, \frac{1}{2} + iT : \tag{3.3}$$

$$\int_\Gamma \zeta_{K_4}(s)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Вычет подынтегрального выражения в точке $s = 1$ равен $\Lambda_4 x$. Как доказали Р. М. Кауфман [20, 21] и Хис–Браун [22], при $\lambda = \frac{2}{3} + \varepsilon$

$$\zeta_{K_4}\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\lambda} \quad (t \geqslant 1).$$

По принципу Фрагмена–Линделёфа,

$$\zeta_{K_4}(s) \ll |t|^{\lambda\left(c-\sigma\right)/\left(c-\frac{1}{2}\right)}$$

равномерно в прямоугольнике Γ, если исключить окрестность полюса $s = 1$. Вклад горизонтальных сторон составляет

$$O\left(\int\limits_{1/2}^{c} T^{\lambda\left(c-\sigma\right)/\left(c-\frac{1}{2}\right)} x^{\sigma}\, d\sigma\right) = O\left(T^{\lambda-1} x^{\frac{1}{2}}\right) + O(T^{-1} x^{c}).$$

Далее,

$$\int\limits_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \zeta_{K_4}(s) \frac{x^s}{s}\, ds = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \int\limits_{1}^{T} |\zeta_{K_4}(\frac{1}{2} + it)|\, \frac{dt}{t}\right).$$

Имеем в силу (3.2),

$$\int\limits_{1}^{T} |\zeta_{K_4}(\frac{1}{2} + it)| \frac{dt}{t} \leqslant \left\{ \int\limits_{1}^{T} \left|\zeta(\frac{1}{2} + it) L(\frac{1}{2} + it, (\frac{m_0}{\cdot})\right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$
$$\times \left\{ \int\limits_{1}^{T} |L(\frac{1}{2} + it, K_8/\mathbb{Q}, \psi)|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}.$$

Из результата Рамачандры [23] следует, что

$$\int\limits_{1}^{T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) L\left(\frac{1}{2} + it, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right)\right|^2 dt \sim C' T \log^2 T,$$

откуда

$$\int\limits_{1}^{T} \left|\zeta(\frac{1}{2} + it) L(\frac{1}{2} + it, (\frac{m_0}{\cdot}))\right|^2 \frac{dt}{t} \ll T^{\varepsilon}.$$

Также имеет место результат Гуда [24]

$$\int\limits_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it, K_8/\mathbb{Q}, \psi\right|^2 dt \sim C''T\log T,$$

откуда

$$\int_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it, K_8/\mathbb{Q}, \psi\right)\right|^2 \frac{dt}{t} \ll T^{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^T \left|\zeta_{K_4}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \frac{dt}{t} \ll T^{\varepsilon}.$$

Теперь имеем

$$\Delta(x, K_4) = O(T^{-1}x^c) + O(x^{\frac{1}{2}}T^{\lambda-1}) + O(x^{\frac{1}{2}}T^{\varepsilon}).$$

Беря $T = x^{1/2}$, получаем (3.1). □

Сформулируем теперь аналог предложения 2 для поля $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$.

Предложение 3. *Найдутся положительные константы c_1 и c_2 такие, что для любого $T > T_0$ каждый интервал $[T, T + c_1T^{3/4}]$ содержит две точки t_1, t_2, для которых*

$$\Delta(t_1, K_4) > c_2t_1^{3/8}, \quad \Delta(t_2, K_4) < -c_2t_2^{3/8}.$$

Доказательство. Сохраним обозначения, использованные в доказательстве теоремы 2. Для простого p введем величину

$$S(p) = \#\left\{a \in \mathbb{F}_p | f(a) \equiv 0 \pmod p\right\},$$

где $f(x) = x^4 - m$. В работе [18] показано, что для $p \nmid N$

$$S(p) = 1 + (m_0/p) + a(p).$$

Поэтому из (3.2) следует, что

$$d(p, K_4) = S(p),$$

если $p \nmid N$. Как показано в [18], $\frac{1}{2}a(p) = (m/p)_4$, если $(-1/p) = (m/p) = 1$; следовательно, $S(p) = 4$, если $(-1/p) = (m/p)_4 = 1$. Если же $(-1/p) = -1$ и $(m/p)_4 = 1$, то $S(p) = 2$. Для полноты отметим, что $S(p) = 0$ в остальных случаях.

Известно, что $(m/p)_4 = 1$ для бесконечного множества простых p. Теперь заканчиваем доказательство так же, как в случае предложения 2. □

Переходим к полю K_6 (см. §2).

Теорема 3. *Для поля K_6, нормального замыкания поля K_3 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3, справедлива оценка*

$$\Delta(x, K_6) \ll x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}.$$

Доказательство. Мы следуем доказательству теоремы 2 и используем разложение [10]

$$\zeta_{K_6}(s) = \zeta(s) L\left(s, \left(\frac{d}{\boldsymbol{\cdot}}\right)\right) L(x, \chi_2)^2; \tag{3.4}$$

при этом мы сохраняем обозначения из §2, в частности, $L(s, \chi_2)$ означает L-ряд Гекке, указанный там. Напомним, что в случае $d < 0$

$$L(s, \chi_2) = L(s, F)$$

(см. (2.2)). Как и выше,

$$D(x, K_6) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \zeta_{K_6}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right),$$

где $c = 1 + \varepsilon > 1$, x – половина нечетного числа. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta_{K_6}(s) \frac{x^s}{s}\, ds$$

по прямоугольнику Γ с вершинами в точках (3.3). Вычет подынтегрального выражения в точке $s = 1$ равен $\Lambda_6 x$. Из [20–22] следует, что

$$\zeta_{K_6}\big(\frac{1}{2} + it\big) \ll t^{\lambda_1} \quad (t \geqslant 1),$$

где $\lambda_1 = 1 + \varepsilon$. По принципу Фрагмена–Линделёфа отсюда следует равномерная оценка $\zeta_{K_6}(s)$ в прямоугольнике Γ, используемая для подсчета вклада горизонтальных сторон:

$$O(T^{\lambda_1 - 1} x^{1/2}) + O(T^{-1} x^c).$$

Далее,

$$\int\limits_{1/2-iT}^{1/2+iT} \zeta_{K_6}(s) \frac{x^s}{s}\, ds = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \int\limits_1^T \big|\zeta_{K_6}\big(\frac{1}{2} + it\big)\big| \, \frac{dt}{t}\right).$$

Имеем в силу (3.4)

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_6}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant t\leqslant T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it,\left(\frac{d}{\cdot}\right)\right)\right|\int\limits_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_2\right)\right|^2\frac{dt}{t}.$$

Из классических оценок следует, что

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it,\left(\frac{d}{\cdot}\right)\right)\right| \ll T^{1/3}.$$

Для оценки второго множителя используем асимптотику

$$\int\limits_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_2\right)\right|^2 dt \ \sim\ C'''T\log T. \tag{3.5}$$

Отметим, что в случае отрицательного дискриминанта $D<0$ асимптотику (3.5) доказал Гуд [24], а в случае любого дискриминанта – Вайнштейн [25]. Теперь получаем

$$\int\limits_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_2\right)\right|^2\frac{dt}{t} \ll T^{\varepsilon}.$$

Собирая полученные оценки, имеем

$$\Delta(x,K_6)=O(T^{\lambda_1-1}x^{1/2})+O(T^{-1}x^c)+O(x^{1/2}T^{1/3}T^{\varepsilon}).$$

Полагая $T=x^{3/8}$, доказываем теорему. □

Литература

1. E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*. Leipzig, 1927.
2. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *On the mean value of the error term of a class of arithmetical functions*. — Acta Math. **112** (1964), 41–67.
3. Y.-K. Lau, *On the mean square formula of the error term for a class of arithmetical functions*. — Monatsh. Math. **128** (1999), 111–129.
4. О. М. Фоменко, *Теоремы о средних значениях для одного класса рядов Дирихле*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 201–223.
5. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.

6. M. N. Huxley, N. Watt, *The number of ideals in a quadratic field.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **104** (1994), 157–165.
7. W. Müller, *On the distribution of ideals in cubic number fields.* — Monatsh. Math. **106** (1988), 211–219.
8. H. Hasse, *Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen, kubischen und biquadratischen Zahlkörpern.* Berlin, 1950.
9. H. Hasse, *Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage.* — Math. Z. **31** (1930), 565–582.
10. *Алгебраическая теория чисел.* Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха, М., 1969.
11. H. Cohn, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields.* New York etc., 1978.
12. H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme auf der Theorie der algebraischen Zählkörper.* Teil I, Teil Ia, Würzburg-Wien, 1965.
13. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight* 1 *and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
14. A. Ivić, *Large values of certain number-theoretic error terms.* — Acta Arithm. **56** (1990), 135–159.
15. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions.* — Math. Ann. **152** (1963), 30–64.
16. D. R. Heath-Brown, *Mean values of the zeta-function and divisor problems.* — Recent Progress in Analytic Number Theory (Durham, 1979) Vol. 1, London, 1981, 115–119.
17. A. Ivić, *On zeta-functions associated with Fourier coefficients of cusp forms.* — Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), Salerno, 1992, 231–246.
18. N. Ishii, *Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
19. J.-P. Serre, *Modular forms of weight one and Galois representations.* — Algebraic Number Fields, L-functions and Galois Properties (Durham, 1975), London, 1977, 193–268.
20. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **76** (1978), 124–158.
21. Р. М. Кауфман, *Оценка L-функций Гекке на половинной прямой.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 40–51.
22. D. R. Heath-Brown, *The growth rate of the Dedekind zeta-function on the critical line.* — Acta Arithm. **49** (1988), 323–339.
23. K. Ramachandra, *Application of a theorem of Montgomery and Vaughan to the zeta-function.* — J. London Math. Soc. (2) **10** (1975), 482–486.
24. A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind.* — Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 327–361.
25. L. Weinstein, *The mean value of the Artin L-series and its derivative of a cubic field.* — Glasgow Math. J. **21** (1980), 9–18.

Fomenko O. M. On the Dedekind zeta function.

Let K_n be a number field of degree n over $\mathbb{Q}$. Denote by $A_{K_n}(x)$ the number of ideal with norm $\leqslant x$. Landau's classical estimate is

$$A_{K_n}(x) = \Lambda_n x + O(x^{(n-1)/(n+1)}).$$

In this paper the error term is improved for the non-normal field $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ and for K_6, the normal closure of a cubic field K_3 with the Galois group S_3.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 26 августа 2013 г.