Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

**П. А. Пугач, В. А. Шлык**

# КУСОЧНО ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

## Введение

В. В. Асеев [1] для конформного модуля, а затем Ю. В. Дымченко и В. А. Шлык [2] для весового $p$-модуля, $p > 1$, конденсатора, установили, что при вычислении модуля семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$, $n > 2$, можно считать эти кривые ломаными (свойство достаточности ломаных для первого модуля конденсатора). Для конденсатора можно ввести второй модуль, а именно, модуль семейства поверхностей, отделяющих его пластины (см. [3]). Возникает следующий вопрос: можно ли при нахождении второго модуля конденсатора ограничиться рассмотрением только полиэдральных поверхностей (свойство достаточности полиэдральных поверхностей для второго модуля конденсатора). Один из вариантов достаточности семейства полиэдральных поверхностей в аппроксимативном смысле был предложен в [4, 5]. В его основе лежит теорема Джорджи [6], утверждающая, что приведенную границу конечной $\mathcal{H}^{n-1}$-меры открытого множества из $R^n$ можно надлежащим образом приблизить границами полиэдров.

Ниже реализуется достаточность полиэдральных поверхностей в аппроксимативном смысле для второго модуля конденсатора на основе кусочно линейной аппроксимации допустимых функций в определении емкости конденсатора.

## §1. Терминология и обозначения

Далее $G$ – открытое ограниченное множество в $R^n$, $n \geqslant 2$; $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{H}^k$ – соответственно $k$-мерные меры Лебега и Хаусдорфа; $A_p$ – класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих

---

*Ключевые слова*: модуль семейств поверхностей, емкость конденсатора, кусочно линейная аппроксимация, полиэдральные поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.A18.21.0353), РФФИ (грант 11-01-00038) и ДВО РАН (грант 12-11-СО-01М-002).

условию Макенхаупта [7],

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\,dx \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\,dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$; $p, q \in (1, \infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $D$ – открытое ограниченное множество из $R^n$. Обозначим через $L^{p,w}(D)$ класс функций $f : D \to [-\infty, +\infty]$, для которых $\|f\|_{p,w} = \bigl( \int\limits_D |f|^p\,w\,dx \bigr)^{1/p} < \infty$. Через $L_+^{p,w}(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0, +\infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$. Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(G)$ класс функций $u : G \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в $G$, имеющих в $G$ обобщенные частные производные и таких, что $\int\limits_G |\nabla u|^p\,w\,dx < \infty$. Для множеств $K, F \subset R^n$ через $d(K, F)$ обозначим евклидово расстояние между $K$, $F$. Запись $\overline{F}$, $\partial F$, $\mathrm{int} F$, $\mathrm{diam} F$ обозначает соответственно замыкание, границу, внутренность, диаметр множества $F$.

Пусть в $R^n$ дана совокупность геометрически независимых точек $a^0, a^1, \ldots, a^k$, $k \leqslant n$. Множество $\overline{S^k} = |\overline{a^0, \ldots, a^k}|$ всех точек $x \in R^n$ вида

$$x = \mu_0 a^0 + \mu_1 a^1 + \cdots + \mu_k a^k, \tag{1}$$

где $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k = 1$ и $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k \geqslant 0$, назовем замкнутым $k$-мерным симплексом с вершинами $a^0, a^1, \ldots, a^k$. Коэффициенты $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ в (1) называются барицентрическими координатами точки $x$ в системе $a^0, a^1, \ldots, a^k$. Если в (1) положить $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k > 0$ и $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k = 1$, то совокупность таких точек $x$ назовем $k$-мерным открытым симплексом $S^k = |a^0, \ldots, a^k|$. Под полиэдром в $R^n$ будем понимать объединение конечного числа замкнутых $n$-мерных симплексов.

Пусть $F_0$, $F_1$ – непересекающиеся непустые компакты из $\overline{G}$, $E$ – ограниченное замкнутое относительно $R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ множество, ни одна компонента связности которого не имеет предельных точек на $F_0 \cup F_1$. Набор $(F_0, F_1, G/E)$ назовем конденсатором в $G$. Определим $(p, w)$-емкость конденсатора $(F_0, F_1, G/E)$ как величину

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^p\,w\,dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in L^1_{p,w}(G) \cap C^\infty(G)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ в $G$, равным $j$ в некоторой окрестности $F_j$, $j = 0, 1$; и функция $u$ является постоянной $c(u, \alpha)$ в некоторой окрестности компоненты связности $\alpha$ множества $E$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$.

Компакт $\omega$, расположенный в $R^n \setminus E$, назовем поверхностью, отделяющей $F_0$ от $F_1$ в $R^n/E$, если $R^n \setminus \omega = A \cup B$ и $A$, $B$ – непересекающиеся открытые множества, $F_0 \subset A$, $F_1 \subset B$. Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$. Для $\omega \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$ множество $\sigma = \omega \cap G$ назовем поверхностью, отделяющей $F_0$ от $F_1$ в $G/E$. Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, G/E) = \Sigma(G/E)$. Под полиэдральной поверхностью будем понимать объединение конечного числа $(n-1)$-мерных замкнутых симплексов. Если $\sigma \in \Sigma(G/E)$ и найдется полиэдральная поверхность $\omega$ такая, что $\omega \cap G = \sigma$, то $\sigma$ назовем полиэдральной поверхностью для $\Sigma(G/E)$. Семейство всех таких полиэдральных поверхностей обозначим через $\Sigma^0(F_0, F_1, G/E) = \Sigma^0(G/E)$

В частности, если $\sigma = \varnothing \in \Sigma(G/E)$, то по определению $\varnothing \in \Sigma^0(G/E)$. Положим $\tilde{w} = w^{1-q}$ при $w \in A_p$, что влечет $\tilde{w} \in A_q$. Определим $(q, \tilde{w})$-модуль семейства $\Sigma$ борелевских множеств $\sigma \subset G$ как величину

$$M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = \inf \int\limits_G \rho^q \ \tilde{w} \ dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho \in L^{q,\tilde{w}}_+(G)$ таким, что $\int\limits_\sigma \rho \, d\mathcal{H}^{n-1} \geqslant 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{Adm}_{q,\tilde{w}}(\Sigma)$. Отметим, что если $\varnothing \in \Sigma$, то и $\mathrm{Adm}_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = \varnothing$ и модуль $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma)$ полагаем равным $\infty$. Если $\Sigma = \Sigma(F_0, F_1, G/E)$, то модуль $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma)$ обозначим как $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = M_{q,\tilde{w}}(G/E)$. Соответственно для $\Sigma = \Sigma^0(F_0, F_1, G/E)$ модуль $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma)$ обозначим как $M^0_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = M^0_{q,\tilde{w}}(G/E)$.

Пусть числовая функция $f$ непрерывна на замкнутом множестве $K \subset R^n$ и $K$ – объединение конечного числа $n$-мерных замкнутых симплексов без общих внутренних точек, на каждом из которых $f$ является аффинным отображением. Тогда $f$ назовем кусочно линейной функцией на $K$.

## §2. Кусочно линейная аппроксимация функции $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$

Здесь используем разложение $R^n$ на координатные замкнутые кубы следующего вида. Для каждого натурального $m$ образуем разложение $R^n$ на кубы $[a,b] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \dots, n\}$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ и каждое $a_i$ может принимать любое значение вида $\frac{k}{2^m}$, причем $k$ – любое целое число ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а $b_i = a_i + \frac{1}{2^m}$. Эти кубы назовем кубами $m$-го ранга. Ясно, что два различных куба одного ранга не имеют общих внутренних точек. Кубы $(m+1)$-го ранга получаются в результате разбиения каждого из кубов $m$-го ранга на $2^m$ конгруэнтных частей. Каждый координатный куб можно представить в виде объединения конечного числа симплексов, не имеющих попарно общих внутренних точек. При этом множество вершин этих симплексов совпадает с множеством вершин данного куба (см. [8]). Такое разбиение куба будем называть стандартным. Очевидно, что такого рода разбиений куба имеется конечное число и оно зависит только от размерности евклидова пространства $R^n$.

**Теорема 1.** *Пусть $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать полиэдр $\Pi$ и кусочно линейную функцию $L(x)$ на $\Pi$ такие, что*

$$\int\limits_{\Pi} |u - L|^p \, w \, dx < \varepsilon, \int\limits_{\Pi} |\nabla(u - L)|^p \, w \, dx < \varepsilon, \int\limits_{G \setminus \Pi} |\nabla u|^p \, w \, dx < \varepsilon. \qquad (2)$$

**Доказательство.** Выберем натуральное $m_1$ таким, чтобы совокупность кубов $m_1$-го ранга, содержащихся в $G$, была непустой. Их объединение обозначим $\Pi(1)$. Далее выберем натуральное $m_2 > m_1$ при условии, что диаметр куба $m_2$-го ранга меньше $\frac{1}{2} d(\partial G, \Pi(1))$. Объединение кубов $m_2$-го ранга, содержащихся в $G \setminus \mathrm{int}\Pi(1)$, с полиэдром $\Pi(1)$, обозначим $\Pi(2)$. По построению, $\Pi(1) \subset \mathrm{int}\Pi(2) \subset \Pi(2) \subset G$. Продолжим этот процесс до бесконечности. В результате получим последовательность полиэдров $\Pi(i) \uparrow G$, $\Pi(i-1) \subset \mathrm{int}\Pi(i)$, $i \geqslant 2$. Пусть $u$ – функция из теоремы 1. Тогда по определению функции $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$ найдется покрытие компакта $F_0 \cup F_1 \cup E$ конечным числом попарно непересекающихся областей $B_1, \dots, B_k$, где $\overline{B}_j$ – полиэдр, $j = \overline{1,k}$, образованный объединением кубов $m$-го ранга, и на $\overline{B}_j$ функция $u(x)$ является постоянной $c_j$, $j = 1, \dots, k$.

Объединим открытое множество $G$ с теми областями $B_j$, для которых $B_j \cap G \neq \varnothing$. Полученное открытое множество обозначим $G_0$. Если $B_j \cap G = \varnothing$, то сужая, если требуется, область $B_j$, потребуем выполнения условия $d(B_j, \overline{G}) > 0$. Ясно, что для достаточно больших $i \geqslant i_0$ и заданного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{G \setminus \Pi(i)} |\nabla u|^p\, w\, dx = \int\limits_{G_0 \setminus \Pi(i)} |\nabla u|^p\, w\, dx < \varepsilon. \tag{3}$$

Кроме того, из условия $B_j \cap G \neq \varnothing$ для тех же $j$ следует соотношение $B_j \cap \mathrm{int}\Pi(i) \neq \varnothing$, при достаточно больших $i$. Не ограничивая общности, будем считать, что это выполняется для $i \geqslant i_0$. Объединение полиэдра $\Pi(i)$ с полиэдрами $\overline{B}_j$, где $B_j \cap \mathrm{int}\Pi(i) \neq \varnothing$, обозначим $\widetilde{\Pi}(i)$. Далее положим $i = i_0$. Тогда в силу (3)

$$\int\limits_{G \setminus \Pi(i_0)} |\nabla u|^p\, w\, dx = \int\limits_{G_0 \setminus \widetilde{\Pi}(i_0)} |\nabla u|^p\, w\, dx < \varepsilon. \tag{4}$$

Ясно, что полиэдр $\widetilde{\Pi}(i_0)$ можно представить в виде объединения $\bigcup\limits_{[a,b] \subset \widetilde{\Pi}(i_0)} [a,b]$ кубов $[a,b]$ $\tilde{m}$-го ранга достаточно малого диаметра, где $\tilde{m} \geqslant m$, $\tilde{m} \geqslant m_{i_0}$.

Поскольку $u(x)$, $\nabla u(x)$ равномерно непрерывны на $\widetilde{\Pi}(i_0)$, то для колебаний $\omega(u, [a,b])$, $\omega(\nabla u, [a,b])$ соответственно функции $u$, вектор-функции $\nabla u$ на кубе $[a,b]$ имеем равенства

$$\omega(u, [a,b]) = o(1),\, \omega(\nabla u, [a,b]) = o(1) \tag{5}$$

равномерно по всем кубам $\tilde{m}$-го ранга, расположенным в полиэдре $\widetilde{\Pi}(i_0)$.

Каждый куб $[a,b] \subset \widetilde{\Pi}(i_0)$ $\tilde{m}$-го ранга разобьем стандартным образом на симплексы $S$. Их совокупность обозначим $\{S\}$. Определим кусочно линейную функцию $L(x)$ на $\widetilde{\Pi}(i_0)$ как аффинную на каждом симплексе $S \in \{S\}$ и равную $u(x)$ в каждой из $n+1$ вершин симплекса $S$. В силу (5) это влечет равенство $\sup\limits_S |u(x) - L(x)| = o(1)$ для всех симплексов $S \in \{S\}$ и оценку $\int\limits_{\widetilde{\Pi}(i_0)} |u - L|^p\, w\, dx = o(1) < \varepsilon$ при достаточно больших $\tilde{m}$.

Покажем теперь, что

$$\int\limits_{S} |\nabla(u-L)|^p \, w \, dx = o(1) \tag{6}$$

равномерно по всем симплексам $S \in \{S\}$ при достаточно больших $\widetilde{m}$.

Действительно, пусть симплекс $S$ из (6) натянут на единичные векторы $e_1, \ldots, e_n$. На каждом ребре $l_i$ симплекса $S$, параллельном вектору $e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, найдется точка $M_i$ такая, что

$$\int\limits_{l_i} \big(\nabla(u-L)\big) \, dx = \big(\nabla u(M_i) - \nabla L(M_i)\big) e_i. \tag{7}$$

Поскольку $\nabla L(M_i) = \nabla L(M)$ для всех точек $M \in S$, то из (5), (7), следует, что на симплексе $S$

$$\big(\nabla u(M) - \nabla L(M)\big) e_i = o(1) e_i, i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

независимо от выбора $S \in \{S\}$ Для $n$-мерного вектора $a$ в базисе $\{e_i\}$ имеем $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Поэтому

$$a e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j e_i, i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Система (9) относительно $\alpha_j$, $j = \overline{1,n}$ имеет в качестве определителя $\Delta$ определитель матрицы Грамма системы векторов $e_1, \ldots, e_n$ (см. [9, с. 189]). Как известно, он равен квадрату определителя матрицы координат векторов $e_1, \ldots, e_n$ в ортонормированном базисе. Тогда $\alpha_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, где $\Delta_j$ – определитель, полученный из $\Delta$ заменой $j$-го столбца на столбец из $a e_i, i = \overline{1,n}$.

Подставим вместо $a$ в (9) вектор $\nabla u(M) - \nabla L(M)$. Учитывая конечное число способов выбора базиса $\{e_i\}$ при стандартном разбиении координатного куба на симплексы, из (8) получим, что $\nabla u(M) - \nabla L(M) = o(1)$ равномерно по всем симплексам при $S \in \{S\}$ при $\tilde{m} \geqslant m_0$. Это влечет $\int\limits_{\widetilde{\Pi}(i_0)} |\nabla(u-L)|^p \, w \, dx = o(1) < \varepsilon$, что доказывает соотношение (6) и теорему 1, если взять $\Pi = \widetilde{\Pi}(i_0)$. □

## §3. Аппроксимативная достаточность полиэдральных поверхностей для $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$

**3.1.** Установим апроксимативную достаточность в случае, когда компакт $F_0 \cup F_1 \cup E$ содержится в открытом множестве $G$. Для этого приведем некоторые уточнения в построениях доказательства теоремы 1 для функции $u$. Объединение компактов из набора $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_k$, имеющих общие точки с компактом $F_0$, обозначим $F_0(s)$, считая, что это объединение компактов содержится в $\frac{1}{s}$-окрестности компакта $F_0$, $s \in N$ и $\frac{1}{s} < \frac{1}{2} d(F_0, F_1)$. Аналогично определим компакт $F_1(s)$, полагая, что $F_1 \subset F_1(s)$ и $F_1(s)$ содержится в $\frac{1}{s}$-окрестности компакта $F_1$. По построению, $F_0 \subset \mathrm{int} F_0(s)$, $F_1 \subset \mathrm{int} F_1(s)$, $\big(\partial F_0(s) \cup \partial F_0(s)\big) \cap (F_0 \cup F_1 \cup E) = \varnothing$. Положим $E(s) = \big(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \overline{B}_j\big) \setminus (F_0(s) \cup F_1(s))$. Ясно, что $E(s)$ содержит внутри себя компакт $E_1(s) = E \setminus (F_0(s) \cup F_1(s))$. Сужая, если требуется, множество $E(s)$, будем считать, что $E(s) = \overline{E}(s)$ и $E(s)$ содержится в $\frac{1}{s}$-окрестности компакта $E_1(s)$. Потребуем также, чтобы

$$F_0(s+1) \subset \mathrm{int} F_0(s), \quad F_1(s+1) \subset \mathrm{int} F_1(s),$$

$$\big(F_0(s+1) \cup F_1(s+1) \cup E(s+1)\big) \subset \mathrm{int}\big(F_0(s) \cup F_1(s) \cup E(s)\big), \quad s \geqslant 1;$$

$$F_0(s) \downarrow F_0, \quad F_1(s) \downarrow F_1, \quad \big(F_0(s) \cup F_1(s) \cup E(s)\big) \downarrow \big(F_0 \cup F_1 \cup E\big)$$

при $s \to \infty$. Поскольку $\big(F_0 \cup F_1 \cup E\big) \subset G$ и $\Pi(i) \uparrow G$ при $i \to \infty$, то будем полагать, что $\big(F_0(s) \cup F_1(s) \cup E(s)\big) \subset \mathrm{int}\Pi(i)$, для $s \geqslant 1$ и $i \geqslant 1$. Тем самым $G_0 = G$, $\widetilde{\Pi}(i) = \Pi(i)$, $i \geqslant 1$.

**Теорема 2.** *Для заданного $\delta > 0$ найдется конденсатор $(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \mathrm{int}\,\Pi(i)/\widetilde{E})$ такой, что*

$$\mid M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G) - M^0_{q,\tilde{w}}\big(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \mathrm{int}\,\Pi(i)/\widetilde{E}\big) \mid < \delta \tag{10}$$

*в случае $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G) < \infty$ и*

$$M^0_{q,\tilde{w}}\big(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \mathrm{int}\,\Pi(i)/\widetilde{E}\big) > \delta \tag{11}$$

*в случае $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = \infty$, где $F_0 \subset \widetilde{F}_0$, $F_1 \subset \widetilde{F}_1$, $F_0 \cup F_1 \cup E \subset \widetilde{F}_0 \cup \widetilde{F}_1 \cup \widetilde{E} \subset \mathrm{int}\,\Pi(i_0)$.*

**Доказательство.** Пусть $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) < \infty$. Отсюда в силу ограниченности емкости конденсатора и известного равенства (см. [4, 5])

$$\big(C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)\big)^{-\frac{q}{p}} = M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) \tag{12}$$

следует, что $0 < C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) < \infty$. По определению емкости конденсатора найдется функция $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$, для которой

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) \leqslant \int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx \leqslant C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) + o(1). \tag{12$'$}$$

Это условие и (12) дают неравенство

$$\begin{aligned} M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) + o(1) &\leqslant \bigg(\int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx\bigg)^{-\frac{q}{p}} \\ &\leqslant M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E), \end{aligned} \tag{13}$$

где выбор $u$ подчиняется условию $|o(1)| < \frac{\delta}{4}$. К функции $u$ применим построения доказательства теоремы 1 с учетом условий, указанных в начале §2.

В силу монотонности модуля семейства поверхностей выберем $F_0(s)$, $F_1(s)$, $E(s)$ такими, чтобы

$$M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = M_{q,\tilde{w}}(F_0(s), F_1(s), G/E(s)) + o(1). \tag{14}$$

Фиксируем $s = s_0$, при котором $|o(1)| < \frac{\delta}{4}$ в (14).

Учитывая монотонность модуля семейства составных кривых конденсатора и совпадение этого модуля с емкостью конденсатора (см. [10, теорема 1], [11, теоремы 7.2.9]), подберем натуральное $i_0 = i_0(s_0)$ так, чтобы для полиэдра $\Pi(i_0) = \Pi\big(i_0(s_0)\big)$, выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} M_{q,\tilde{w}}\big(F_0(s_0), F_1(s_0), \mathrm{int}\Pi(i_0)/E(s_0)\big) + o(1) \\ = M_{q,\tilde{w}}\big(F_0(s), F_1(s), G/E(s)\big), \end{aligned} \tag{15}$$

где $|o(1)| < \frac{\delta}{4}$.

Перейдем к рассмотрению функции $u$ на $G_0 = G$. Предположим, что ни одна компонента связности открытого множества $G$ не содержит одновременно компонент связности $F_0$ и $F_1$. Тогда $\partial G \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$, значит, $\partial G \cap G = \varnothing \in \Sigma(F_0, F_1, G/E)$. Следовательно, $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = \infty$, что противоречит ограниченности $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Поэтому существуют компоненты связности открытого множества $G$, которые содержат одновременно компоненты связности $F_0$ и $F_1$. Таких компонент связности множества $G$ имеется конечное число. На остальных компонентах связности множества $G$ положим функцию $u$ равной 0, если на этих компонентах нет точек из $F_1$, и 1 в противном случае. Измененную таким образом функцию $u$ по-прежнему будем обозначать через $u$. Ясно, что это не отразится на включении функции $u$ в класс $\mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$ и оценках (12′), (13). Построим для функции $u$ кусочно линейную функцию $L(x)$ на $\widetilde{\Pi}\big(i_0(s_0)\big) = \Pi(i_0)$ так, чтобы интеграл

$$\int\limits_{\widetilde{\Pi}(i_0)} |\nabla L(x)|^p\, w\, dx$$

в силу теоремы 1 мало отличался от $\int\limits_G |\nabla u(x)|^p\, w\, dx$. По построению, $L(x) = c_i$ на $\overline{B}_i$ $i = \overline{1,k}$, $L(x) = 0$ на $F_0(s_0)$, $L(x) = 1$ на $F_1(s_0)$. Далее для краткости введем обозначения $\Pi(i_0) = \Pi$, $\mathrm{int}\Pi(i_0) = \overset{\circ}{\Pi}$.

Положим $E_t = \{x \in \overset{\circ}{\Pi} : L(x) = t\}$ для $t \in T = (0,1) \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$,

$$\Sigma(s_0) = \Sigma\big(F_0(s_0), F_1(s_0), \overset{\circ}{\Pi}/E(s_0)\big),$$
$$\Sigma^0(s_0) = \Sigma^0\big(F_0(s_0), F_1(s_0), \overset{\circ}{\Pi}/E(s_0)\big).$$

Тогда $E_t \in \Sigma^0(s_0)$, $t \in T$. Возьмем $\rho \in \mathrm{Adm}_{q,\tilde{w}}\Sigma^0(s_0)$. Поскольку $L(x)$ локально липшицева на $\overset{\circ}{\Pi}$, то по теореме Кронрода–Федерера (см. [12, теорема 2.5.1]) имеем

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \int\limits_1^0 dt \int\limits_{E_t} \rho(x)\, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} \rho(x) |\nabla L(x)|\, dx \\ &\leqslant \Big(\int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} \rho^q\, w^{1-q}\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} |\nabla L(x)|^p\, w\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда $\int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} \rho^q \, \tilde{w} \, dx \geqslant \Big( \int\limits_G |\nabla L(x)|^p \, w \, dx \Big)^{-\frac{q}{p}}$. Переход к инфимуму по $\rho$ и выбор $L(x)$ дают оценку

$$M_{q,\tilde{w}}\Big(\Sigma^0(s_0)\Big) \geqslant \Big( \int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} |\nabla L(x)|^p \, w \, dx \Big)^{-\frac{q}{p}}$$

$$= \Big( \int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} |\nabla u(x)|^p \, w \, dx \Big)^{-\frac{q}{p}} + o(1) \qquad (16)$$

где $|o(1)| < \frac{\delta}{4}$. Учитывая, что $M_{q,\tilde{w}}\Big(\Sigma^0(s_0)\Big) \leqslant M_{q,\tilde{w}}\Big(\Sigma(s_0)\Big)$, из (15)–(16) получим требуемую оценку (10).

Перейдем к доказательству неравенства (11) в теореме 2.

Пусть $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = \infty$. Рассмотрим функцию $u$ на $G$. Для нее (см. случай $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) < \infty$) либо ни одна компонента связности множества $G$ не содержит одновременно компонент $F_0$ и $F_1$, либо найдется компонента связности множества $G$ которая содержит одновременно компоненты связности $F_0$ и $F_1$. В первом случае $\varnothing \in \Sigma(s_0)$ и $\varnothing \in \Sigma^0(s_0)$, что влечет

$$M_{q,\tilde{w}}\Big(\Sigma^0(s_0)\Big) = M^0_{q,\tilde{w}}\big(F_0(s_0), F_1(s_0), \overset{\circ}{\Pi}/E(s_0)\big) = \infty.$$

Тогда оценка (11) справедлива, если взять $\widetilde{F}_0 = F_0(s_0)$, $\widetilde{F}_1 = F_1(s_0)$, $\widetilde{E} = E(s_0)$.

Во втором случае, повторяя дословно рассуждения для случая

$$M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) < \infty,$$

получим, что

$$M_{q,\tilde{w}}\Big(\Sigma^0(s_0)\Big) \geqslant \Big( \int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} |\nabla L(x)|^p \, w \, dx \Big)^{-\frac{q}{p}}.$$

Из этого неравенства следует, что $M_{q,\tilde{w}}\Big(\Sigma^0(s_0)\Big) > \delta$, поскольку интеграл $\int\limits_{\overset{\circ}{\Pi}} |\nabla L(x)|^p \, w \, dx$ мало отличается от интеграла $\int\limits_G |\nabla u(x)|^p \, w \, dx$, близкого к нулю. Тем самым мы доказали теорему 2. $\square$

**3.2.** Рассмотрим общий случай, когда компакт $F_0 \cup F_1 \cup E$ не обязательно содержится в открытом множестве $G$. Как и в пункте 3.1 подберем функцию $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$, для которой выполняются соотношения (12′), для этой функции будем использовать обозначения доказательства теоремы 1. Положим $\widetilde{G}_0 = G \cup \big(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\big)$. По построению, $G_0 \subset \widetilde{G}_0$, $(F_0 \cup F_1 \cup E) \subset \widetilde{G}_0$.

Нетрудно заметить, что $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, \widetilde{G}_0/E)$,

$$C_{p,w}(F_0, F_1, \widetilde{G}_0/E) \geqslant C_{p,w}(F_0, F_1, G/E).$$

Отсюда в силу равенств (12), (12′) и

$$M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_0/E) \leqslant M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E),$$

получим, что модуль $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \widetilde{G}_0/E)$ мало отличается от модуля $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Последнее означает, что для заданного $\delta > 0$ можно указать $u \in \mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$ и $\widetilde{G}_0$, для которых:

1) $|M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) - M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \widetilde{G}_0/E)| < \delta$,
   если $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) < \infty$;
2) $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, \widetilde{G}_0/E) > \delta$, если $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = \infty$;

Применяя теорему 2 к конденсатору $(F_0, F_1, \widetilde{G}_0/E)$, найдем компакты $\widetilde{F}_0 \supset F_0$, $\widetilde{F}_1 \supset F_1$, $\widetilde{E} \supset E$, $F_0 \cup F_1 \cup E \subset \widetilde{F}_0 \cup \widetilde{F}_1 \cup \widetilde{E}$ и полиэдр $\widetilde{\Pi} \subset \widetilde{G}_0$ такие, что

$$|M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) - M^0_{q,\tilde{w}}(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \mathrm{int}\widetilde{\Pi}/\widetilde{E})| < \delta, \tag{17}$$

если $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) < \infty$, и

$$M^0_{q,\tilde{w}}(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \mathrm{int}\widetilde{\Pi}/\widetilde{E}) > \delta, \tag{18}$$

если $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = \infty$. Тем самым установлена следующая теорема.

**Теорема 3.** *Для заданного $\delta > 0$ можно указать открытое множество $\widetilde{G}_0$, полиэдр $\widetilde{\Pi}$, $\widetilde{\Pi} \subset \widetilde{G}_0$, и компакты $\widetilde{F}_0 \supset F_0$, $\widetilde{F}_1 \supset F_1$, $\widetilde{E}$, для которых выполняется соотношение (17), если $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) < \infty$, и соотношение* (18), *если $M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = \infty$. При этом $F_0 \cup F_1 \cup E \subset \widetilde{F}_0 \cup \widetilde{F}_1 \cup \widetilde{E} \subset \mathrm{int}\,\widetilde{\Pi}$.*

## Литература


1. В. В. Асеев, *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж. **50:5** (2009), 967–986.
2. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества.* — Сиб. мат. ж. **51:6** (2010), 1298–1315.
3. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Соотношения между весовой емкостью конденсатора и весовым модулем разделяющих поверхностей.* — Дальневосточный мат. ж. вып. 2 (1996), 72–80.
4. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *О достаточности семейства полиэдральных поверхностей в методе модулей и устранимые множества.* — Мат. заметки **90:2** (2011), 216–230.
5. П. А. Пугач, В. А. Шлык, *Обобщенные емкости и полиэдральные поверхности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 148-178.
6. E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad $r$ dimensioni.* — Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.
7. B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1972), 207–226.
8. А. А. Глазырин, *О симплициальных разбиениях многогранников.* — Мат. заметки **85:6** (2009), 840–848.
9. В. А. Зорич, *Математический анализ.* Т. 2, М., 1984.
10. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Обобщенные емкости, составные кривые и устранимые множества.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 100–119.
11. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* — GAKUTO Int. J., Adv. Math. Sci. Appl. **19** (2003), 1–343.
12. В. М. Миклюков, *Введение в негладкий анализ.* Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.


Pugach P. A., Shlyk V. A. Piecewise linear approximation and polyhedral surfaces.

The piecewise linear approximation of admissible functions for the condenser capacity is considered. By means of this approximation, the approximate sufficiency of polyhedral surfaces for the module of a condenser is established.

Поступило 20 июня 2013 г.

Владивостокский филиал
Российской Таможенной Академии,
ул. Стрелковая, 16в,
690034 Владивосток, Россия
*E-mail*: 679097@mail.ru

Дальневосточный
государственный университет,
ул. Суханова, 8,
690950 Владивосток, Россия
*E-mail*: shlykva@yandex.ru