

Н. В. Проскурин

## О НУЛЯХ ПРОИЗВОДНОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ОДНОЙ ТЕРНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим дзета-функцию Эпштейна  $\zeta_3$  тернарной квадратичной формы  $x^2 + y^2 + z^2$ . Это мероморфная функция на  $\mathbb{C}$  с единственной особенностью – простым полюсом в точке 1. Для  $s \in \mathbb{C}$  с  $\operatorname{Re} s > 3/2$  имеем

$$\zeta_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s},$$

где  $r_3(n)$  – число представлений  $n$  суммой трех квадратов над  $\mathbb{Z}$ , т.е. число решений уравнения  $x^2 + y^2 + z^2 = n$  с  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ . Для её производной имеем представление

$$\zeta_3'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \log(n)$$

в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > 3/2$ . О свойствах дзета-функций Эпштейна см. [1–3]. Для  $\zeta_3$  имеется функциональное уравнение

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta_3(s) \pi^{-(3/2-s)} \Gamma(3/2-s) \zeta_3(3/2-s), \quad s \in \mathbb{C},$$

но нет разложения в эйлеровское произведение.

Мы сообщали ранее [4] о результатах вычисления нулей функции  $\zeta_3$ . Цель настоящей заметки – представить результаты вычисления нулей производной  $\zeta_3'$  функции  $\zeta_3$ .

Ниже приведены две гистограммы. Первая из них (Рис. 1) построена по нулям функции  $\zeta_3'$ , мнимые части которых лежат в промежутке от  $T - 32000$  до  $T$  с  $T = 4000000$ . Вторая гистограмма (Рис. 2) построена по нулям  $\zeta_3'$  с мнимыми частями от  $T - 32000$  до  $T$  с  $T = 800000$ . На гистограммах вещественная ось разделена на отрезки длины 0.01. Если  $[a, b]$  – один из этих отрезков, высота столбика над ним равна числу нулей  $\rho$  функции  $\zeta_3'$  с  $a < \operatorname{Re} \rho \leq b$  и с  $T - 32000 < \operatorname{Im} \rho \leq T$ .

Справа от критической прямой  $\operatorname{Re} s = 3/4$  мы находим два ярко выраженных максимума вблизи точек 0.83 и 1.2.

---

*Ключевые слова:* дзета-функция Эпштейна, распределение нулей.  
Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00239-а.

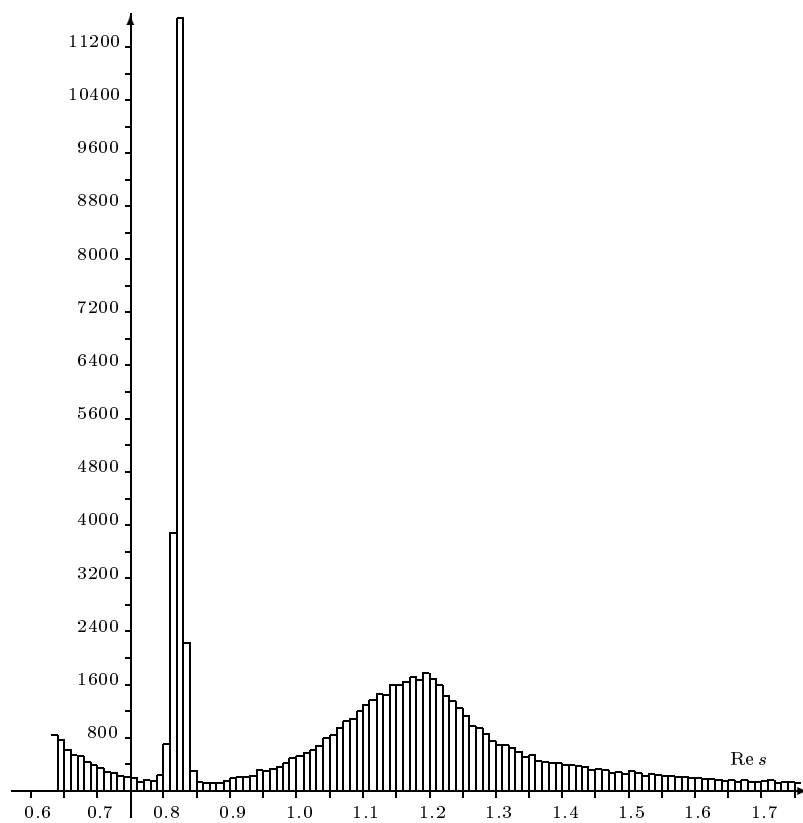


Рис. 1. Распределение вещественных частей нулей  $\zeta'_3$ . Гистограмма построена по нулям  $\rho$  с  $T - 32000 < \text{Im } \rho \leq T$ ,  $T = 4000000$ .

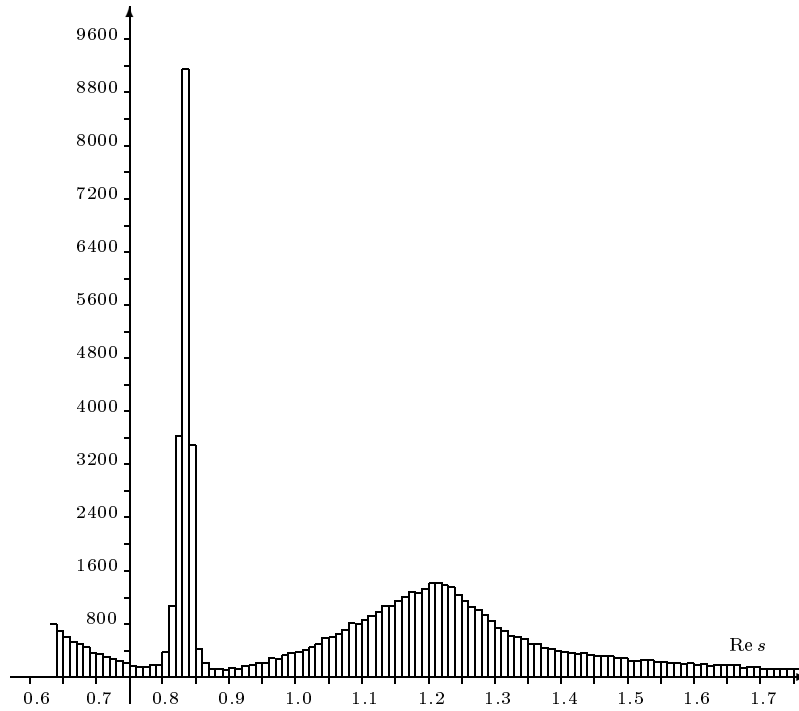


Рис. 2. Распределение вещественных частей нулей  $\zeta'_3$ . Гистограмма построена по нулям  $\rho$  с  $T - 32000 < \text{Im } \rho \leq T$ ,  $T = 800000$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. L. Siegel, *Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions*. — Ann. Math. **44**, No. 2 (1943), 143–172.
2. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Эпштейна*, I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 169–178.
3. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Эпштейна*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **371** (2009), 157–170.
4. Н. В. Проскурин, *О нулях дзета-функции одной тернарной квадратичной формы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 159–162.

Proskurin N. V. On the zeros of derivative of one ternary quadratic form zeta function.

The author reports on computation of the zeros of the derivative of zeta function of the quadratic form  $x^2 + y^2 + z^2$ .

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
191023, Санкт-Петербург  
наб. р. Фонтанки, 27  
Россия  
*E-mail:* np@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2013 г.