Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

**Е. Г. Прилепкина**

# ТРАНСФИНИТНЫЙ ДИАМЕТР ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ НЕЙМАНА

## §1. Введение и предварительные сведения

В геометрической теории функции большую роль играют специфические способы измерения замкнутых множеств на комплексной плоскости. Один из таких способов был дан Фекете в 1923 году [1]. Согласно теореме Сеге [2], введенный Фекете трансфинитный диаметр равен логарифмической емкости и выражается через энергию Винера с логарифмическим ядром. Естественным обобщением логарифмической емкости является емкость Робена, изучению которой посвящены работы ряда зарубежных [3–5] и отечественных математиков [6, 7]. В работе Дюрена, Пфальцграффа и Турмана [4] доказана формула, связывающая емкость Робена и энергию Винера, в роли ядра которой вместо логарифмической функции присутствует функция Неймана. Отметим, что в теории потенциала введены понятия емкости, энергии Винера, трансфинитного диаметра и постоянной Чебышева относительно произвольного ядра и достаточно изучена связь между ними (см., например, [8]). Следуя общему подходу, мы изучаем трансфинитный диаметр относительно функции Неймана[1]. Этот трансфинитный диаметр совпадает с рассмотренной в [4] емкостью Робена. Трансфинитный диаметр Фекете является частным случаем трансфинитного диаметра относительно функции Неймана.

Применяя технику обобщенных конденсаторов, развитую Дубининым и его учениками [9–12], в настоящей заметке получены представления трансфинитного диаметра относительно функции Неймана в терминах емкости конденсатора и интеграла Дирихле некоторой функции. Как следствие таких представлений, установлены некоторые

*Ключевые слова*: трансфинитный диаметр, точки Фекете, функция Неймана, емкость Робена, емкость конденсатора, интеграл Дирихле, симметризация.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.A18.21.0353 с Дальневосточным федеральным университетом) и РФФИ (грант No. 11-01-00038).

[1]Этот термин не является общепринятым.

оценки данного диаметра для множества, расположенного во внешности единичного круга. Мы также вводим понятие экстремальных точек, аналогичных точкам Фекете, и приводим критерий экстремальности.

В рамках данной работы предположим, что $G$ – конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}}$ без изолированных граничных точек, содержащая бесконечно удаленную точку, либо вся комплексная сфера. В этом случае определена функция Неймана $N_G(z,\zeta)$ с полюсами в точках $\zeta$, $\infty$ [4, с. 213]. Для аналитической жордановой области $G$ функция Неймана определяется условиями:

1) $N_G(z,\zeta)$ гармоническая в $G\setminus\{\zeta,\infty\}$;
2) $\partial N_G(z,\zeta)/\partial n = 0$ при $z\in\partial G$;
3) $N_G(z,\zeta)+\log|z-\zeta|$ – ограниченная гармоническая функция в некоторой окрестности полюса $\zeta$,
4) в окрестности бесконечно удаленной точки выполняется разложение
$N_G(z,\zeta) = -\log|z| + o(1),\ z\to\infty.$

Для негладкой области $G$ функция Неймана определяется с помощью конформного отображения. А именно, пусть $f(z)$ – однолистное конформное отображение области $G$ на аналитическую жорданову область, причем $f(\infty)=\infty$, $f'(\infty)=1$. Полагаем, по определению,

$$N_G(z,\zeta) = N_{f(G)}(f(z), f(\zeta)).$$

На всей комплексной сфере функцию Неймана определим равенством

$$N_{\overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}}}(z,\zeta) = -\log|z-\zeta|.$$

Пусть $E$ – компактное подмножество $G$, $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ - совокупность произвольных точек $z_k\in E$. Трансфинитным диаметром множества $E$ относительно функции Неймана области $G$ назовем величину

$$d_G(E) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sup_Z\left(-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n N_G(z_k,z_l)\right)\right) \qquad (1)$$

Здесь $\sup_Z$ означает супремум по точкам $(z_1,\dots,z_n)\in E^n$. Заметим, что в случае $G=\overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}}$ мы получаем определение трансфинитного диаметра Фекете.

Положим

$$N_G(z_k, z_k) = \lim_{z \to z_k} (N_G(z; z_k) + \log|z - z_k|).$$

Квадратичная форма $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} N_G(z_k, z_l)$ тесно связана с асимптотикой емкости некоторого вырождающегося конденсатора [10]. Поэтому наряду с (1) рассмотрим величину

$$n_G(E) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sup_Z \left(-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} N_G(z_k, z_l)\right)\right). \tag{2}$$

**Утверждение 1.** *Справедливо равенство*

$$d_G(E) = n_G(E).$$

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\inf_Z \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l) \leqslant \inf_Z \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}} N_G(z_k, z_l) + \sup_Z \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_k).$$

С другой стороны,

$$\inf_Z \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l) \geqslant \inf_Z \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} N_G(z_k, z_l) + \inf_Z \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_k).$$

В силу ограниченности функции $N_G(z,\zeta) + \log|z-\zeta|$ при $z, \zeta \in E$ мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \inf_Z \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_k) = \lim_{n\to\infty} \sup_Z \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_k) = 0.$$

Учитывая определения (1), (2) получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
\log d_G(E) &= \lim_{n\to\infty}\left(-\inf_Z\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} N_G(z_k, z_l)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\inf_Z\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} N_G(z_k, z_l)\right)\right) = \log n_G(E).
\end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

Точки $\{z_k^*\}_{k=1}^n$ множества $E$ назовем экстремальными $n$-точками трансфинитного диаметра относительно функции Неймана, если

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}N_G(z_k^*,z_l^*)=\sup_Z\left(-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}N_G(z_k,z_l)\right).$$

Заметим, что определение экстремальных точек отличается от обычно принятого определения точек Фекете. Тем не менее, согласно утверждению 1,

$$d_G(E)=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\left(-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}N_G(z_k^*,z_l^*\right)\right)$$

Как было отмечено выше, трансфинитный диаметр относительно функции Неймана связан с емкостью Робена. Остановимся на этом более подробно. Предположим, что область $\Omega$ содержит бесконечность и ее граница состоит из аналитических жордановых кривых. Пусть граница $\partial\Omega$ разбита на две части $A$ и $B$, каждая из которых состоит из конечного числа невырожденных кривых. Относительно такого разбиения функция Робена $g_\Omega(z,\infty,A)$ [4, стр. 212] с полюсом в бесконечности определяется условиями:

1) $g_\Omega(z,\infty,A)$ гармоническая в $\Omega$, исключая бесконечность;
2) $g_\Omega(z,\infty,A)$ непрерывна вместе со своими частными производными вплоть до границы $\Omega$;
3) $g_\Omega(z,\infty,A)=0$ при $z\in A$ и $\partial g_\Omega(z,\infty,A)/\partial n=0$ при $z\in B$;
4) $g(z)-\log|z|$ – гармоническая в окрестности бесконечности.

Для произвольной конечносвязной области $\Omega$ без вырожденных граничных точек функция Робена вновь определяется с помощью конформного и однолистного отображения $f(z)$ области $\Omega$ на аналитическую жорданову область, $f(\infty)=\infty$, по формуле

$$g_\Omega(z,\infty,A):=g_{f(\Omega)}(f(z),\infty,f(A)).$$

Емкостью Робена множества $A$ относительно области $\Omega$ называется величина

$$\mathrm{cap}_\Omega A=e^{-W(A)},$$

где

$$W(A)=\lim_{z\to\infty}\left(g_\Omega(z,\infty,A)-\log|z|\right).$$

Если $A = \partial\Omega$, то функция Робена совпадает с функцией Грина, а емкость Робена – с логарифмической емкостью.

**Утверждение 2.** *Пусть $D$ – аналитическая жорданова область, $\infty \in D$, $E \subset D$ состоит из конечного числа замкнутых аналитических жордановых кривых, $\Omega$ – связная компонента $D\setminus E$, содержащая бесконечность. Тогда*

$$d_D(E) = \mathrm{cap}_\Omega E.$$

**Доказательство.** Пусть граница $\partial\Omega$ состоит из замкнутых аналитических кривых жордана $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $E = C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_k$. Согласно теореме 1 работы [4], в этом случае мы имеем равенство

$$\mathrm{cap}_\Omega E = \sup_\mu e^{J(\mu)}, \tag{3}$$

где супремум берется по всем борелевским вероятностным мерам $\mu$ на $E$, и

$$J(\mu) = -\int\limits_E \int\limits_E N_G(z,\zeta) d\mu(z) d\mu(\zeta).$$

Непосредственно из (3) и теоремы 11 работы [8] заключаем, что

$$d_D(E) = \mathrm{cap}_\Omega E.$$

Утверждение доказано. □

## §2. Свойства трансфинитного диаметра относительно функции Неймана

Ряд свойств трансфинитного диаметра относительно функции Неймана вытекает из определения. Например, обозначая через $D_G(E)$ диаметр множества $E$ относительно функции $e^{-N_G(z,\zeta)}$,

$$D_G(E) = \sup_{z,\zeta\in E} e^{-N_G(z,\zeta)},$$

получим оценку

$$d_G(E) \leqslant D_G(E). \tag{4}$$

Пусть $f(z)$ – однолистное конформное отображение области $G$, $f(\infty) = \infty$, имеющее в окрестности бесконечности разложение

$$f(z) = f'(\infty)z + a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \ldots$$

В этом случае справедливо равенство

$$N_G(z,\zeta) = N_{f(G)}(f(z), f(\zeta)) + \log|f'(\infty)|.$$

Тогда из определения трансфинитного диаметра получаем

$$d_G(E) = \frac{1}{|f'(\infty)|} d_{f(G)}(f(E)). \tag{5}$$

Далее мы покажем, что более тонкие свойства трансфинитного диаметра относительно функции Неймана следуют из его связи с емкостью конденсатора. Напомним, что в области $G$ обобщенный конденсатор определяется как тройка $C = (G, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ – совокупность замкнутых в $\overline{G}$ попарно непересекающихся множеств $E_k$, $k = 1, \ldots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел $\delta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Множества $E_k$, $k = 1, \ldots, n$, называются пластинами конденсатора $C$. Всюду ниже $I(v, D)$ означает интеграл Дирихле от функции $v$ по области $D$,

$$I(v,\ D) := \iint\limits_D |\nabla v|^2 \, dx\, dy.$$

Емкость cap $C$ конденсатора $C$ определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле $I(v,\ G)$, по всем *допустимым* функциям $v(z)$ ($z = x + iy$), т.е. вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным в замыкании $\overline{G}$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки множества $G$, за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и равным $\delta_k$ в некоторой окрестности пластины $E_k$, $k = 1, \ldots, n$, [9, стр. 15].

Для конечной точки $z_0$ комплексной сферы $\overline{\mathbf{C}}_z$ обозначим через $U(z_0, r)$ замкнутый круг с центром в точке $z_0$ радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удаленной точки полагаем $U(\infty, r) = \{z : |z| \geqslant 1/r\}$.

Пусть $E$ – компактное подмножество $G$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ - совокупность произвольных точек $z_k \in E$. Обозначим через $C(G, r, Z)$ конденсатор

$$C(G, r, Z) = \left(G, \{U(z_1, r), \ldots, U(z_n, r), U(\infty, r)\},\ \{1/n, \ldots, 1/n, -1\}\right),$$

где $r > 0$ достаточно мало.

**Теорема 1.** *Справедливо равенство*

$$d_G(E) = \lim_{n\to\infty} \exp(\mu_n),$$

*где*

$$\mu_n = \sup_Z \lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{2\pi}(\log r)^2 \mathrm{cap}\ C(G, r, Z) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r\right). \tag{6}$$

**Доказательство.** В работе [10, стр. 364] для конечносвязной области $G$ и в [11] для $G = \overline{\mathbf{C}}_z$ получена асимптотическая формула

$$\frac{1}{2\pi}\text{cap } C(G,r,Z) = -\frac{1}{\nu \log r} + \frac{M}{[\log r]^2} + O\left([\log r]^{-3}\right), \quad r \to 0,$$

где $\nu = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$ и

$$M = -\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l).$$

После элементарных преобразований получаем

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}(\log r)^2 \text{cap} C(G,r,Z) + \left(1+\frac{1}{n}\right)\log r\right). \tag{7}$$

Следовательно,

$$\mu_n = \sup_Z \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} N_G(z_k, z_l)\right).$$

Остается воспользоваться утверждением 1. Теорема доказана. □

Теорема 1 показывает, что трансфинитный диаметр относительно функции Неймана наследует свойства монотонности емкости конденсатора.

**Следствие 1.** *Если* $G_1 \subset G_2$, *то*

$$d_{G_1}(E) \geqslant d_{G_2}(E).$$

**Доказательство.** При расширении поля конденсатора за счет свободной части границы емкость не увеличивается [9, стр. 19]. Таким образом при достаточно малом $r > 0$ справедливо неравенство

$$\text{cap } C(G_1, r, Z) \geqslant \text{cap } C(G_2, r, Z).$$

Остается воспользоваться теоремой 1. Следствие доказано. □

Кроме монотонности емкости при расширении области, известен ряд симметризационных преобразований конденсаторов [9], при которых емкость не увеличивается. Для примера рассмотрим поляризацию. Поляризацией множества $F \subset \overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}}$ относительно вещественной оси называется множество

$$PF = \{z : (\mathrm{Im}\ z \leqslant 0) \wedge [(z \in A) \vee (\overline{z} \in A)]\}$$
$$\bigcup \{z : (\mathrm{Im}\ z \geqslant 0) \wedge (z \in A) \wedge (\overline{z} \in A)\}.$$

**Следствие 2.** *Пусть область $G$ симметрична относительно вещественной оси. Тогда*

$$d_G(E) \geqslant d_G(PE).$$

**Доказательство.** Из определения множества $PE$ следует, что для произвольного набора точек $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$, $z_k \in PE$, существует набор $Z_1$ точек множества $E$, такой, что $PZ_1 = Z$. Так как область $G$ не меняется при поляризации в силу симметричности, конденсатор $C(G, r, Z)$ при достаточно малом $r > 0$ является результатом поляризации конденсатора $C(G, r, Z_1)$. Поскольку при поляризации емкость конденсатора не увеличивается [9, стр. 73], мы имеем неравенство

$$\mathrm{cap}\ C(G, r, Z) \leqslant \mathrm{cap}\ C(G, r, Z_1).$$

Следовательно величина $\mu_n$, вычисленная по формуле (6) для $d_G(PE)$, не превосходит такой же величины для $d_G(E)$. Следствие доказано. $\square$

Пусть, как и выше, $E$ компактное подмножество области $G$, $\infty \in G$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность произвольных точек $z_k \in E$. Введем функцию

$$u_n(z, Z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} N_G(z, z_k).$$

Обозначим $G_r = (G \setminus \cup_{k=1}^n U(z_k, r)) \cap \{|z| < 1/r\}$. Идея доказательства следующей теоремы восходит к лемме 1 работы [12].

**Теорема 2.** *Справедливо равенство*

$$d_G(E) = \lim_{n \to \infty} \exp(-\lambda_n),$$

*где*

$$\lambda_n = \inf_{Z} \lim_{r \to 0} \left( \frac{1}{2\pi} I(u_n(z, Z), G_r) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log r \right).$$

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 1 достаточно показать, что

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}N_G(z_k,z_l)=-\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}I(u_n(z,Z),G_r)+\left(1+\frac{1}{n}\right)\log r\right). \tag{8}$$

Пусть $w=f(z)$ – конформное и однолистное отображение области $G$ на ограниченную аналитическую жорданову область $D$ в случае $G\neq\overline{\mathbf{C}}_z$ и на $D=\overline{\mathbf{C}}_z$ в случае $G=\overline{\mathbf{C}}_z$ такое, что $f(\infty)=0$ и $f(z_k)\neq\infty$, $k=1,\ldots,n$. Обозначим $z_{n+1}=\infty$, $w_k=f(z_k)$, $k=1,\ldots,n+1$,

$$\mu_k=\lim_{z\to z_k}\frac{|w-w_k|}{|z-z_k|},\quad k=1,\ldots,n,$$

$$\mu_{n+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{|w||z|},$$

$$v_n(w)=u_n(f^{-1}(w),Z)=u_n(z,Z),$$

$D_r$ область $D$ с выброшенными кругами $U(w_k,\mu_k r)$, $k=1,\ldots,n+1$.

Легко видеть, что в окрестности точки $z_l$ выполняется асимптотическое равенство

$$u_n(z,Z)=-\frac{1}{n}\log|z-z_l|+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}N_G(z_k,z_l)+o(1),\quad z\to z_l,$$

и в окрестности бесконечности

$$u_n(z,Z)=-\log|z|+o(1),\quad z\to\infty.$$

Поэтому в окрестности точки $w_l$, $l=1,\ldots,n$, мы имеем разложение

$$v_n(w)=-\frac{1}{n}\log|w-w_l|+\frac{1}{n}\log|\mu_l|+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}N_G(z_k,z_l)+o(1),\quad w\to w_l,$$

и в окрестности начала координат

$$v_n(w)=\log|w|+\log\mu_{n+1}+o(1),\quad w\to 0.$$

Применяя формулу Грина, получим

$$I(v_n,D_r)=-\sum_{l=1}^{n+1}\int\limits_{\gamma_l(r)}v_n\frac{\partial v_n}{\partial n}\,ds,$$

где $\gamma_l(r) = \{|w - w_l| = \mu_l r\}$, $l = 1, \ldots, n+1$. Привлекая разложение функции $v_n(w)$ в окрестности $w_l$, получаем при $r \to 0$

$$\int\limits_{\gamma_l(r)} v_n \frac{\partial v_n}{\partial n}\, ds = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{n}\log r + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l) + o(1)\right)\left(-\frac{1}{n} + o(r)\right) d\varphi$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{n^2}\log r - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l)\right] + o(1)/n, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Аналогично в окрестности начала координат

$$\int\limits_{\gamma(r)} v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} ds = \int\limits_0^{2\pi} (\log r + o(1))\,(1 + o(1))\, d\varphi = 2\pi \log r + o(1).$$

Складывая полученные соотношения, имеем

$$\frac{1}{2\pi} I(v_n(w), D_r) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r + \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l) + o(1), \quad r \to 0. \tag{9}$$

Множества $f(U(z_k, r))$ являются при $r \to 0$ “почти кругами” [9, стр. 38] с центрами в точках $w_k$ и радиусами $\mu_k r$, $k = 1, \ldots, n+1$, то есть существуют функции $r'(r) \sim r''(r) \sim r$, $r \to 0$, такие, что

$$U(w_k, \mu_k r'') \subset f(U(z_k, r)) \subset U(w_k, \mu_k r').$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} I(v_n(w), f(G_r)) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r \geqslant \frac{1}{2\pi} I(v_n(w), D_{r'})$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r' + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log\frac{r}{r'},$$
$$\frac{1}{2\pi} I(v_n(w), f(G_r)) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r \leqslant \frac{1}{2\pi} I(v_n(w), D_{r''})$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r'' + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log\frac{r}{r''}.$$

Из (9) теперь следует, что

$$\lim_{r \to 0}\left(\frac{1}{2\pi} I(v_n(w), f(G_r)) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\log r\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} N_G(z_k, z_l).$$

Учитывая конформную инвариантность интеграла Дирихле, получаем

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}I(u_n(z,Z),G_r)+\left(1+\frac{1}{n}\right)\log r\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}N_G(z_k,z_l). \quad (10)$$

Теорема доказана. □

**Теорема 3.** *Если для набора* $Z^*=\{z_k^*\}_{k=1}^n$ *точек множества* $E$ *найдется положительное* $\delta>0$ *такое, что для произвольного* $r$, $0<r<\delta$, *и любого другого набора* $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ *точек из* $E$ *выполняется одно из неравенств*

$$\operatorname{cap}\, C(G,r,Z^*)\geqslant \operatorname{cap}\, C(G,r,Z), \quad (11)$$

*либо*

$$I(u_n(z,Z^*),G_r)\leqslant I(u_n(z,Z),G_r), \quad (12)$$

*то* $Z^*$ *являются экстремальными* $n$*-точками для* $d_G(E)$. *Обратно, если* $Z^*$ *являются экстремальными* $n$*-точками, то для любого другого неэкстремального набора* $Z$ *при достаточно малом* $r$ *выполняются неравенства* (11) *и* (12).

**Доказательство.** Пусть выполняется одно из неравенств (11) или (12). Принимая во внимание (7), (10), получаем

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}N_G(z_k^*,z_l^*)\geqslant -\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}N_G(z_k,z_l).$$

Следовательно, $Z^*$ – экстремальный набор точек.

Обратно, если $Z^*$ являются экстремальными n-точками, то из (7) следует, что

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}(\log r)^2\left[\operatorname{cap}\, C(G,r,Z^*)-\operatorname{cap}\, C(G,r,Z)\right]\geqslant 0.$$

Если при этом

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}(\log r)^2\left[\operatorname{cap}\, C(G,r,Z^*)-\operatorname{cap}\, C(G,r,Z)\right]=0,$$

то, вновь применяя (7), заключаем, что $Z$ также является экстремальным набором. Если же

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}(\log r)^2\left[\operatorname{cap}\, C(G,r,Z^*)-\operatorname{cap}\, C(G,r,Z)\right]>0,$$

то для достаточного малого $r > 0$ выполняется неравенство (11). Для доказательства неравенства (12) требуется заменить (7) на (10). Теорема доказана. $\square$

**Пример.** Пусть $G = \overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}}$, $E = \{|z| = 1\}$. Как было отмечено ранее, в этом случае трансфинитный диаметр относительно функции Неймана совпадает с трансфинитным диаметром Фекете. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – произвольная совокупность точек $z_k \in E$ и $Z^* = \{e^{2\pi ki/n}\}_{k=1}^n$. Применяя подходящую диссиметризацию [9, стр. 132], заключаем, что

$$\operatorname{cap} C(G, r, Z^*) \geqslant \operatorname{cap} C(G, r, Z).$$

По теореме 3, экстремальным n-набором точек является набор симметричных точек $Z^*$. Заметим, что в отличие от обычных симметризационных преобразований для описания экстремального набора необходимы преобразования, увеличивающие емкость конденсаторов.

## §3. Трансфинитный диаметр относительно функции Неймана внешности единичного круга

Предположим, что компактное множество $E$ расположено во внешности единичного круга $W = \{|z| > 1\}$. Вычисляя в этом случае в явном виде функцию Неймана, мы имеем равенство

$$d_W(E) = \lim_{n\to\infty} \sup_Z \left( \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^n \frac{|z_k - z_l||1 - \overline{z_l} z_k|}{|\overline{z_l} z_k|} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}}$$

Обозначим через $\widetilde{\Sigma}$ класс конформных и однолистных отображений $f(z)$ внешности единичного круга в себя, $f(W) \subset W$, имеющих в окрестности бесконечности разложение

$$f(z) = z + a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \dots$$

**Утверждение 3.** *Пусть $E \subset W$, $f(z) \in \widetilde{\Sigma}$. Тогда*

$$d_W(E) \geqslant d_W(f(E)).$$

**Доказательство.** Применяя (5) и следствие 1, получаем цепочку соотношений

$$d_W(E) = d_{f(W)}(f(E)) \geqslant d_W(f(E)). \qquad \square$$

**Утверждение 4.** *Пусть $E$ – континуум, лежащий в $W$ и соединяющий точки $a$, $b$, $|a| < |b|$. Тогда*

$$d_W(E) \geqslant d_W([|a|, |b|]).$$

**Доказательство** аналогично доказательству следствия 2 с той лишь разницей, что вместо поляризации используется круговая симметризация [9, с. 108] относительно действительной оси. □

Пусть компактное множество $A$ расположено в единичном круге $U = \{|z| < 1\}$. Величина

$$d_h(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{(z_1,\ldots,z_n)\in A^n} \left( \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{|z_k - z_l|}{|1 - \overline{z_l} z_k|} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}}$$

известна как гиперболический трансфинитый диаметр множества $A$ [13]. В следующей теореме величина $d_W(E)$ сравнивается с гиперболическим трансфинитным диаметром образа $E$ при отображении $1/z$.

**Теорема 4.** *Пусть $E \subset W$, $E^{-1}$ – образ $E$ при отображении $1/z$, $\tau = \inf_{z\in E} 1/|z|$. Тогда*

$$d_W(E) \leqslant \tau^{-2} d_h(E^{-1}).$$

**Доказательство.** Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность произвольных точек $z_k \in E$. Определим при достаточно малом $r > 0$ конденсатор $C(W, r, Z)$ также как в теореме 1 и конденсатор

$$C_1(W, r, Z) = (W, \{\partial W, U(z_1, r), \ldots, U(z_n, r), U(\infty, r)\},$$
$$\{0, 1/n, \ldots, 1/n, -1\}).$$

Поскольку любая допустимая функция для конденсатора $C_1(W, r, Z)$ допустима и для конденсатора $C(W, r, Z)$, то из определения емкости вытекает неравенство

$$\text{cap } C(W, r, Z) \leqslant \text{cap } C_1(W, r, Z). \tag{13}$$

Применяя к конденсатору $C_1(W, r, Z)$ отображение $f(z) = 1/z$, в силу конформной инвариантности емкости получаем равенство

$$\text{cap } C_1(W, r, Z) = \text{cap } f(C_1(W, r, Z)).$$

Множества $f(U(z_k, r))$, $k = 1, \ldots, n$, являются при $r \to 0$ “почти кругами” с центрами в точках $\zeta_k = 1/z_k$ радиусов $\mu_k r$, $\mu_k = 1/|z_k|^2$,

$f(U(\infty,r))=U(0,r)$, поэтому к конденсатору $f(C_1(W,r,Z))$ применима асимптотическая формула [9, с. 40], согласно которой

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{cap}\ f(C_1(G,r,Z))=-\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\log r}+\frac{M_1}{[\log r]^2}+O\left([\log r]^{-3}\right),\ r\to 0, \tag{14}$$

где

$$M_1=-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{r(U,\zeta_k)}{\mu_k}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{1}{n^2}g_U(\zeta_k,\zeta_l)+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}g_U(\zeta_k,0),$$

$r(U,\zeta_k)=1-|\zeta_k|^2$ и $g_U(\zeta_k,\zeta_l)=-\log\frac{|\zeta_k-\zeta_l|}{|1-\overline{\zeta_l}\zeta_k|}$ – функция Грина единичного круга. Обозначим $Z^{-1}$ набор точек $\{\zeta_k\}$, $k=1,\dots,n$. Учитывая (6), (13) и (14), получаем

$$\mu_n\leqslant\sup_{Z^{-1}}M_1.$$

Принимая во внимание, что величина $\log\frac{r(U,\zeta_k)}{\mu_k}$ не превосходит некоторой константы $C$ и $g_U(\zeta_k,0)=-\log|\zeta_k|\leqslant-\log\tau$, заключаем, что

$$\mu_n\leqslant-\frac{1}{n}C-2\log\tau+\sup_{Z^{-1}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{1}{n^2}\log\frac{|\zeta_k-\zeta_l|}{|1-\overline{\zeta_l}\zeta_k|}.$$

По теореме 1,

$$d_W(E)=\lim_{n\to\infty}e^{\mu_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{C}{n}}\tau^{-2}\sup_{Z^{-1}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{|\zeta_k-\zeta_l|}{|1-\overline{\zeta_l}\zeta_k|}\right)^{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\tau^{-2}d_h(E^{-1}).$$

Теорема доказана. □

## Литература


1. M. Fekete, *Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.* — Math. J. **17** (1923), 228–249.
2. G. Szego, *Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete "Uber die Verteilung der Wurzeln..."*. — Math. J. **21** (1924), 203–208.

3. P. Duren, M. M. Schiffer, *Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping.* — Complex Variables **21** (1993), 189–196.
4. P. Duren, J. Pfaltzgraff, E. Thurman, *Physical interpretation and further properties of Robin capacity.* — Алгебра и анализ **9**, No. 3 (1997), 211–219.
5. M. D. O'Neill, R. E. Thurman, *Extremal domains for Robin capacity.* — Complex Variables **41** (2000), 91–109.
6. С. Н. Насыров, *Вариации емкостей Робена и их приложения.* — Сиб. мат. ж. **49**, No. 5 (2008), 1128–1146.
7. В. Н. Дубинин, *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена.* — Мат. сб. **200**, No. 10 (2009), 25–38.
8. B. Farcas, B. Nagy, *Transfinite diameter, Chebyshev constant and energy on locally compact spaces.* — Potential Analysis **28**, No. 3 (2008), 241–260.
9. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток, 2009.
10. D. Karp, E. Prilepkina, *Reduced modules with free boundary and its applications.* — Ann. Acad. Scient. Fen. **34** (2009), 353–378.
11. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 76–94.
12. В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, *О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей.* — Дальневост. мат. ж. **6**, No. 1–2 (2005), 39–56.
13. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory.* Tokyo, 1959.

Prilepkina E. G. Transfinite diameter with respect to Neumann function.

We study the transfinite diameter with respect to Neumann function. The representations of this size are given in terms of the condenser capacity and Dirichlet integral of some function. As corollaries we derive the estimates of transfinite diameter with respect to Neumann function of the unit disk exterior. The description of the similar Fekete points is given.

Институт прикладной математики
ДВО РАН
ул. Радио, д. 7;
Дальневосточный федеральный
университет,
ул. Суханова, д. 8,
Владивосток, Россия
*E-mail*: pril-elena@yandex.ru

Поступило 4 сентября 2013 г.