Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

Г. В Кузьмина

МЕТОД МОДУЛЕЙ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ $\Sigma(r)$

§1

1.1. В работах Дж. Дженкинса установлена роль квадратичных дифференциалов в экстремальных задачах геометрической теории функций. "Общая теорема о коэффициентах" Дженкинса [1, 2] содержит в качестве частных случаев большинство известных результатов об однолистных функциях. Другой формой метода экстремальной метрики является метод модулей семейств кривых. В основе этого метода лежит работа Дженкинса [3]. В ряде случаев метод модулей приводит к альтернативному доказательству и более полному исследованию задачи по сравнению с "общей теоремой о коэффициентах". В данной работе приводятся примеры результатов такого рода.

В дальнейшем U – круг $|z| < 1$, U^* – область $|z| > 1$. $M(D, a)$ – приведенный модуль односвязной области D относительно точки $a \in D$. Напомним, что $M(D, a) = 1/2\pi R(D, a)$, где $R(D, a)$ – конформный радиус области D относительно точки a, если $a \neq \infty$, $M(D, \infty) = -1/2\pi R(D, \infty)$. Через $M(D)$ обозначаем модуль двусвязной области D относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты, через $M(D, a, b)$ – приведенный модуль двуугольника D относительно его вершин a, b.

К числу первых результатов метода модулей принадлежат теоремы о максимуме некоторых конформных инвариантов. Продолжая результаты Лаврентьева и Голузина, Л. И. Колбина [4] решила задачу о максимуме суммы

$$\alpha_1^2 M(D_1, a_1) + \alpha_2^2 M(D_2, a_2) \tag{1}$$

в семействе всех пар неналегающих областей D_1, D_2, где $a_1 \in D_1$, $a_2 \in D_2$, на z-сфере с исключенной точкой a и задачу о максимуме

Ключевые слова: экстремальная задача, квадратичный дифференциал, траектория, приведенный модуль области.

суммы
$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k^2 M(D_k, a_k), \quad \alpha_k > 0, \tag{2}$$
в семействе всех троек неналегающих односвязных областей D_k на $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$.

Доказательство в [4] является одним из первых приложений вариационного метода Голузина и оказалось довольно сложным. Дженкинс [5] дал простое доказательство результатов в [4] методом экстремальной метрики и указал усиление этих результатов, полезное для приложений.

1.2. Пусть Σ – класс функций $f(z)$, мероморфных и однолистных в области U^* и имеющих в окрестности бесконечно удаленной точки разложение вида $f(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots$. Пусть $\Sigma(r)$, $0 < r < 1$, – класс функций из Σ, для которых множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{f(U^*)}$ содержит область D, $0 \in D, R(D, 0) = r$. Класс $\Sigma(r)$ рассматривался Дженкинсом [1, 5].

Результаты в задаче о максимуме суммы (1) используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(z) \in \Sigma(r)$. Тогда все значения, выпускаемые функцией $w = f(z)$ в области U^*, лежат в круге $|w| \leqslant a(r)$, где $a = a(r)$, $1 \leqslant a(r) \leqslant 4$, удовлетворяет равенству*
$$\log \frac{4}{a} = (1 - x)\log(1 - x) + (1 + x)\log(1 + x), \tag{3}$$
$x = x(r)$, $0 < x(r) \leqslant 1$, – решение уравнения
$$\log r = \log 16x^2 - \frac{(1 + x)^2}{x}\log(1 + x) + \frac{(1 - x)^2}{x}\log(1 - x). \tag{4}$$

Доказательство. Обратимся к задаче о максимуме суммы
$$\mu^2 M(D_0, 0) + t^2 M(D_2, \infty)$$
в семействе всех пар неналегающих односвязных областей D_1, D_2 на $\overline{\mathbb{C}} \setminus a$, где $0 \in D_1$, $\infty \in D_2$, $a > 0$. Экстремальной конфигурацией этой задачи служат круговые области D_1, D_2 квадратичного дифференциала
$$Q(z)\, dz^2 = -\frac{A}{4\pi^2}\frac{(z - b)dz^2}{z^2(z - a)}, \quad A = \mu^2 a/b = t^2. \tag{5}$$

Достаточно рассмотреть случай $0 < b < a$ (см. рис. 1).

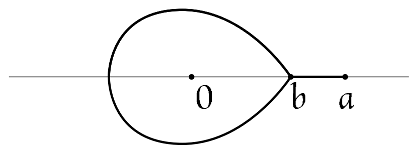

Рис. 1

Найдем $M(D_0, 0)$. Интервал $(0, b)$ – ортогональная траектория дифференциала (5). Рассматривая отображение

$$\frac{z-b}{z-a} = u^2,$$

приходим к равенству

$$Q(z)\, dz^2 = Q_1(u)\, du^2,$$

где

$$Q_1(u)\, du^2 = -\frac{A}{4\pi^2} \frac{(b-a)^2 4u^4 du^2}{(b-au^2)^2(1-u^2)^2}.$$

Вычисляя

$$\int\limits_{\epsilon}^{b} \sqrt{-Q(z)}\; dz = \int\limits_{0}^{u(\epsilon)} \sqrt{-Q_1(u)}\; du,$$

стандартным рассуждением получаем

$$\log R(D_0, 0) = \log \frac{4ab}{a-b} - \sqrt{\frac{a}{b}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}. \tag{6}$$

Вычисляя Q-длину полупрямой $(a, 1/\epsilon)$, аналогичным образом находим

$$-\log R(D, \infty) = \log \frac{4}{a-b} + \sqrt{\frac{b}{a}} \log \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}. \tag{7}$$

Полагая $b = x^2 a$, условия (6), (7) запишем в виде

$$\log r = \log \frac{4ax^2}{1-x^2} - \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x},$$
$$-\log R(D_2, \infty) = \log \frac{4}{a(1-x^2)} + x \log \frac{1-x}{1+x}.$$

Учитывая, что $R(D_2,\infty)=1$, получаем условия для $x(r)$ и $a(r)$, указанные в формулировке теоремы. Значения $x(r)$ и $a(r)$ определяются равенствами (3) и (4) однозначно, так как правые части этих равенств являются монотонными функциями от x, $0<x<1$. $\square$

Замечание 1. Из теоремы 1 непосредственно вытекает утверждение о множестве Кебе, т.е. о наибольшем множестве, принадлежащем множеству $f(U)$, в соответствующем подклассе известного класса S функций $f(z)=z+c_2z^2=\dots$, регулярных и однолистных в круге U.

§2

2.1. В классе Σ известны следующие теоремы искажения.

Теорема A. *Для функции $f(z)\in\Sigma$ справедливы неравенства (см., например, [6])*

$$\frac{(1-\rho^{-2})^2}{4\rho^2(1+\rho^{-2})^2}\leqslant\frac{|f'(z)f'(-z)|}{|f(z)-f(-z)|^2}\leqslant\frac{(1+\rho^{-2})^2}{4\rho^2(1-\rho^{-2})^2}\quad(z=\rho e^{i\theta}).\qquad\text{(A)}$$

Левое и правое неравенство достигаются для функций

$$f(z)=z+e^{2i\theta}z^{-1}\quad\text{и}\quad f(z)=z-e^{2i\theta}z^{-1},$$

соответственно.

Теорема B. *Для функции $f(z)\in\Sigma$ справедливы неравенства*

$$\frac{(1-\rho^{-3})}{3\sqrt{3}\rho^3(1+\rho^{-3})^3}\leqslant\frac{|f'(z)f'(z\omega)f'(z\omega^2)|}{|(f(z)-f(z\omega))(f(z\omega)-g(z\omega^2))(f(z\omega^2)-f(z))|}$$

$$\frac{(1+\rho^{-3})^3}{3\sqrt{\rho}^3(1-\rho^{-3})^3},\qquad\text{(B)}$$

где $z=\rho e^{i\theta}$, $\rho>1$ и $\omega=e^{2\pi/3}$. Левое неравенство достигается только для функции $f(z)=z(1+e^{3i\theta}z^{-3})^2/3$, правое – только для функции $f(z)=z(1-e^{3i\theta}z^{-3})^2/3$, где k – произвольная постоянная.

Неравенства теоремы A являются комбинациями известных оценок, как и указывается в [6]. Что касается теоремы B, то она доказывается в [6] при помощи “общей теоремы о коэффициентах” Дженкинса. Ниже показывается, что теорема B является комбинацией известных результатов метода модулей. Первым из этих результатов является известное неравенство Голузина, которое мы приводим в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть a_1, a_2, a_3 – различные точки $\overline{\mathbb{C}}$. В семействе всех троек неналегающих односвязных областей D_1, D_2, D_3, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{3} M(D_k, a_k) - \frac{1}{2\pi} \log |(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{64}{81\sqrt{3}} \ . \quad (8)$$

Вторым из указанных результатов является следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть a_1, a_2, a_3 — различные точки $\overline{\mathbb{C}}$. В семействе всех троек неналегающих двуугольников D_1, D_2, D_3, имеющих вершинами соответственно точки a_1 и a_2, a_1 и a_2, a_3 и a_1, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{3} M(D_k, a_k, a_{k+1}) - \frac{2}{\pi} \log |(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)| \geqslant \frac{2}{\pi} \log \frac{64}{81\sqrt{3}} \ . \quad (9)$$

Эта лемма доказывается весьма просто. Функционалы в левых частях неравенств (8) и (9) – конформные инварианты, поэтому достаточно считать, что $a_k = \omega^{k-1}$, $k = 1, 2, 3$, $\omega^3 = 1$. Легко видеть, что экстремальная метрика в задаче леммы 2 определяется квадратичным дифференциалом

$$Q(z)\, dz^2 = \frac{9}{\pi^2} \frac{z dz^2}{(z^3 - 1)^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{dz^2}{(z-1)^2} [1 + o(z - 1)].$$

С другой стороны, $Q(z)dz^2 = -4Q_1(z)dz^2$, где

$$Q_1(z)\, dz^2 = -\frac{9}{4\pi^2} \frac{dz^2}{(z^3 - 1)^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{dz^2}{(z-1)^2} [1 + o(z - 1)]$$

– квадратичный дифференциал, определяющий экстремальную метрику задачи о максимуме функционала в (9).

Доказательство теоремы В. Доказательство в [6] опирается на “общую теорему о коэффициентах” Дженкинса. Приводимое ниже доказательство использует простые факты теории задач об экстремальном разбиении.

1. Докажем правое неравенство в (B). Пусть $\rho > 1$,

$$Q(z)\, dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{z(z^3 + 1)^2 dz^2}{(z^3 - \rho^3)^2 (z^3 - 1/\rho^3)^2}. \quad (10)$$

Дифференциал (10) имеет 6 полюсов второго порядка в точках $\rho\omega^{k-1}$, $k = 1, 2, 3$, и в симметричных точках $\rho^{-1}\omega^{k-1}$, $k = 1, 2, 3$. Области

$$B_k = \Big\{z : |z| > 1, |\arg z - 2\pi/3(k-1)| < \pi/3|\Big\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

лежащие в U^*, и области, симметричные с ними относительно окружности $|z| = 1$, являются круговыми областями дифференциала (10).

Найдем $R(B_1, \rho)$. Полупрямая (ρ, ∞) – ортогональная траектория дифференциала (10). Рассматривая преобразование

$$z^3 = u^2,$$

получаем

$$Q(z)\,dz^2 = Q_1(u)\,du^2,$$

где

$$Q_1(u)\,du^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\;\frac{4}{9}\;\frac{(u^2+1)^2du^2}{(u^2-\rho^3)^2(u^2-1/\rho^3)^2}.$$

Вычисляя

$$\int\limits_{\rho+\epsilon}^{\infty}\sqrt{-Q(z)}\,dz = \int\limits_{u(\rho+\epsilon)}^{\infty}\sqrt{-Q_1(u)}\,du,$$

где $u(1+\epsilon) = \rho^{3/2} + 3/2\rho^{1/2}\epsilon + O(\epsilon)$, стандартным путем приходим к равенству

$$R(B_1, \rho) = \frac{3}{4\rho}\;\frac{\rho^3-1}{\rho^3+1}.$$

При отображении $w = f(z)$ областям B_k соответствуют области B_k^f, при этом $R(B_k^f, f(\rho\omega^{k-1})) = R(B_k, \rho\omega^{k-1})|f'(\rho\omega^{k-1}|$. Применяя неравенство Г. М. Голузина, приходим к правому неравенству в (B) и утверждению о случаях равенства в этом неравенстве.

2. Докажем левое неравенство в (B). Пусть

$$Q(z)\,dz^2 = \frac{1}{4\pi^2}\;\frac{z(z^3-1)^2dz^2}{(z^3-\rho^3)^2(z^3-1/\rho^3)^2}. \tag{11}$$

В структуре траекторий дифференциала (11) присутствуют три полосообразные области, принадлежащие U^*:

$$B_k = \big\{z : |z| > 1, (k-1)2\pi/3 < \arg z < k2\pi/3\big\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Будем рассматривать эти области как двуугольники с вершинами соответственно ρ и $\rho\omega$, $\rho\omega$ и $\rho\omega^2$, $\rho\omega^2$ и ρ.

Найдем $M(B_1, \rho, \rho\omega)$. Полупрямая (ρ, ∞) – траектория дифференциала (11). Рассматривая снова преобразование $z^3 = u^2$, находим

$$Q(z)\,dz^2 = Q_2(u)\,du^2,$$

где

$$Q_2(u)\,du^2 = \frac{1}{\pi^2}\frac{4}{9}\frac{(u^2-1)^2\,du^2}{(u^2-\rho^3)^2(u^2-1/\rho^3)^2}.$$

Вычисляя

$$\int\limits_{\rho+\epsilon}^{\infty}\sqrt{Q(z)}\,dz = \int\limits_{u(\rho+\epsilon)}^{\infty}\sqrt{Q_2(u)}\,du$$

и используя определение приведенного модуля двуугольника, находим

$$M(B_1, \rho, \rho\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{4\rho}{3}\frac{\rho^3+1}{\rho^3-1}\right).$$

Пусть B_k^f, – образы областей B_k, $k = 1, 2, 3$, при отображении $w = f(z)$. Имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{3} M(B_k^f, f(\rho\omega^{k-1}), f(\rho\omega^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} M(B_k, \rho\omega^{k-1}, \rho\omega^k) + \frac{2}{\pi}\log|f'(\rho)f'(\rho\omega)f'(\rho\omega^2)|.$$

Пользуясь теперь неравенством леммы 2 для суммы приведенных модулей двуугольников, приходим к левому неравенству в (B). □

2.2. Пусть $\mathcal{D}$ – семейство троек неналегающих односвязных областей D_0, D_1, D_2, где D_0 содержит начало координат, D_1 и D_2 – двуугольники с вершинами $+1$, -1, заполненные дугами, имеющими концы в указанных точках и гомотопными соответственно полуокружности $\{w : |w| = 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ и полуокружности $\{w : |w| = 1, \operatorname{Im} w < 0\}$. Пусть $\mu > 0$. На семействе $\mathcal{D}$ определен функционал

$$F_\mu(\mathcal{D}) = \mu^2 M(D_0, 0) - \sum_{k=1}^{2} M(D_k, 1, -1). \tag{12}$$

Лемма 3. *Максимум функционала* (12) *в семействе* $\mathcal{D}$ *достигается только в случае* $\{D_0, D_1, D_2\} = \{D_0^*, D_1^*, D_2^*\}$, *где* D_0^* *– круговая* *область, D_1^* и D_2^* – полосообразные области квадратичного дифференциала*

$$Q(z)\,dz^2 = \frac{A}{4\pi^2}\frac{z^2-b^2}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2, \tag{13}$$

где

$$A = 16+\mu^2, \quad b^2 = \mu^2/(16+\mu^2).$$

Имеем равенства

$$M(D_0^*,0) = \frac{1}{2\pi}\log F_0(\mu), \quad M(D_1^*,1,-1) = \frac{1}{\pi}\log F_1(\mu),$$

где

$$\log F_0(\mu) = 1/2\log\frac{4\mu^2}{16+\mu^2} - 4/\mu\,\mathrm{arctg}\,\mu/4, \tag{14}$$

$$\log F_1(\mu) = 2\log 32/(16+\mu^2) + \mu\,\mathrm{arctg}\,\mu/4. \tag{15}$$

Доказательство. По общему результату в [7, 8] максимум функционала (12) в семействе $\mathcal{D}$ достигается только для характеристических областей дифференциала (13). Найдем $M(D_0^*,0)$. Интервал $(0,b)$ – ортогональная траектория дифференциала (13). Имеем равенство

$$\lim_{\epsilon\to 0} 2\pi\left\{\int\limits_{\epsilon}^{b}\sqrt{-Q(z)}\,dz + \log\epsilon\right\} = \mu\log R(D_0^*,0). \tag{16}$$

Полагая

$$b^2 - z^2 = u^2,$$

получаем

$$-Q(z)\,dz^2 = \frac{A}{4\pi^2}\;\frac{u^4du^2}{(b^2-u^2)^2(u^2+1-b^2)^2},$$

и, вычисляя интеграл в (16), находим значение $M(D_0^*,0)$.

Найдем $M(D_1^*,1,-1)$. Интеграл $(1,\infty)$ – траектория дифференциала (13). В силу определения приведенного модуля двуугольника,

$$M(D_1^*,1,-1) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{2\int\limits_{1+\epsilon}^{\infty}\sqrt{Q(z)}\,dz + 2/\pi\log\epsilon\right\}. \tag{17}$$

Рассматривая преобразование

$$z^2 - b^2 = u^2,$$

приходим к равенству

$$\sqrt{Q(z)}\,dz = \sqrt{A}/2\pi \frac{u^2\,du}{(u^2+b^2))(u^2-1+b^2)}.$$

Отсюда и из (17) находим значение $M(D_1^*, 1, -1)$, указанное в формулировке леммы. $\square$

Нам потребуется следующее дополнение к лемме 3.

Замечание 2. Для области D_0^* леммы 3 имеем равенство

$$\operatorname{cap} \overline{D}_0^* = \frac{\sqrt{16+\mu^2}}{8} \operatorname{th} \frac{\pi\mu}{8}. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть Γ_0 – общая граничная дуга областей D_0^* и D_1^* леммы 3. Пусть $\zeta = g(z)$ – отображение области D_1^* на полосу $\Pi = \{\zeta : 0 < \operatorname{Im}\zeta < 1\}$:

$$\zeta = \int\limits_{z_0}^{z} \sqrt{Q(z)}\;dz, \quad g(\infty) = i,$$

где z_0 – точка пересечения дуги Γ_0 с мнимой осью z-плоскости. При этом отображении дуге Γ_0 соответствует отрезок $[-\mu/4, \mu/4]$ на границе Π. При $z \to \infty$

$$\zeta = i + \frac{A_1}{z} + O(1), \quad A_1 = \frac{\sqrt{16+\mu^2}}{2\pi}.$$

При отображении

$$w = \frac{-\pi A_1}{e^{\pi\zeta}+1} = z + O(1) \ \text{ при } \ z \to \infty, \quad \zeta = \zeta(z),$$

аналитически продолженным в область D_2^*, область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_0^*}$ переходит в w-сферу с разрезом по отрезку

$$\left[-\frac{\pi A_1}{e^{\pi\mu/4}}, -\frac{\pi A_1}{e^{-\pi\mu/4}}\right]$$

длины $\pi A_1 \operatorname{th}(\pi\mu/8)$. Следовательно, справедливо (18). $\square$

2.3. В [9] для функционалов, рассмотренных в теоремах A и B, получены оценки сверху в классе $\Sigma(r)$. В качестве следствий этих оценок в [9] получены оценки для коэффициентов α_1 и α_2 в этом классе функций. Оценки для коэффициентов α_0 и α_1 были ранее получены Дженкинсом [1, 2] при помощи "общей теоремы о коэффициентах".

При помощи леммы 3 находится оценка снизу для функционала теоремы A в классе $\Sigma(r)$. Из нее вновь вытекает оценка для $|\alpha_1|$ в классе $\Sigma(r)$.

Пусть $B_1 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ и $B_2 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$. Пусть $\rho > 1$. Области B_1, B_2 будем рассматривать как двуугольники с вершинами в одних и тех же точках ρ, $-\rho$. Имеем равенства

$$M(B_1, \rho, -\rho) = M(B_2, \rho, -\rho) = \frac{2}{\pi} \log \frac{2\rho(1 + 1/\rho^2)}{1 - 1/\rho^2}. \tag{19}$$

Пусть $f(z) \in \Sigma(r)$. Пусть D_0^f – область, не принадлежащая множеству значений функции $f(z)$ в области $U^* = \{z : |z| > 1\}$, $0 \in D_0^f$, $R(D_0^f, 0) = r$. Пусть D_1^f и D_2^f – f-образы областей B_1 и B_2. Области D_1^f и D_2^f являются двуугольниками с вершинами

$$a_1 = f(\rho), \quad a_2 = f(-\rho).$$

Имеем равенство

$$\begin{aligned} &M(D_1^f, a_1, a_2) + M(D_2^f, a_1, a_2) \\ &\qquad = M(B_1, \rho, -\rho) + M(B_2, \rho, -\rho) + \frac{2}{\pi} \log |f'(\rho) f'(-\rho)| \\ &\qquad\qquad = \frac{4}{\pi} \log \frac{2\rho(1 + 1/\rho^2)}{1 - /\rho^2} + \frac{2}{\pi} \log |f'(\rho) f'(-\rho)|. \end{aligned}$$

Пусть D_0^w, D_1^w, D_2^w – тройка областей, определяемая таким же образом отображением $w = f(z) \in \Sigma(r)$, реализующим максимум функционала

$$\mu^2 M(D_0, 0) - [M(D_1, a_1, a_2) + M(D_2, a_1, a_2)].$$

Отображение

$$W(w) = \frac{(a_1 - a_2) w}{(a_1 + a_2) w - 2 a_1 a_2} \tag{20}$$

переводит точки 0, a_1, a_2 в 0, 1, -1, а области D_k^w – в области D_k^W, $k=0,1,2$. При этом

$$\begin{aligned} M(D_0^W,0) &= M(D_0^w) + 1/2\pi\log|W'(0)| \\ &= 1/2\pi\log r + 1/2\pi\log\frac{|a_1-a_2|}{2|a_1a_2|}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} M(D_1^W,1,-1) + M(D_2^W,1,-1) - [M(D_1^w,a_1,a_2) + M(D_2^w,a_1,a_2)] \\ = 2/\pi\log|W'(a_1)W'(a_2)| = 2/\pi\log\frac{4}{|a_1-a_2|^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Имеем соотношение

$$\begin{aligned} \mu^2 M(D_0^f,0) - \Big[M(D_1^f,a_1,a_2) + M(D_2^f,a_1,a_2)\Big] \\ \leqslant \mu^2 M(D_0^W,0) - \Big[M(D_1^W,1,-1) + M(D_2^W,1,-1)\Big] \\ - \left[\mu^2/2\pi\log\left|\frac{a_1-a_2}{2a_1a_2}\right| - 2/\pi\log\frac{4}{|a_1-a_2|^2}\right]. \end{aligned}$$

Используя равенство (19) и обозначения леммы 3, из (22) получаем

$$\begin{aligned} 1/4\mu^2\left[\log r + \log\frac{|f(\rho)-f(-\rho)|}{2|f(\rho)f(-\rho)|} - \log F_0(\mu)\right] - \log\frac{4|f'(\rho)f'(-\rho)|}{|f(\rho)-f(\rho)|^2} \\ \leqslant 2\log\frac{2\rho(1+1/\rho^2)}{1-1/\rho^2} - \log F_1(\mu). \end{aligned}$$

Следовательно, при условии

$$\frac{2|f(\rho)f(-\rho)|}{|f(\rho)-f(-\rho)|} = \frac{r}{F_0(\mu)}$$

имеем неравенство

$$\frac{|f'(\rho)f'(-\rho)|}{|f(\rho)-f(-\rho)|^2} \geqslant \frac{(1-1/\rho^2)^2F_1(\mu)}{16\rho^2(1+1/\rho^2)^2}. \tag{23}$$

Из симметрии экстремальных конфигураций леммы 3 относительно вещественной оси и простых свойств отображений из класса Σ следует, что функциями реализующими равенство в (23), служат нечетные функции с вещественными коэффициентами (см. [9]). В этом случае преобразование (20) имеет вид

$$W(w) = \frac{w}{f(\rho)}.$$

Из замечания к лемме 3 следует, что экстремальная функция принадлежит классу $\Sigma(r)$ при условии $\mu \leqslant \mu^*$, где $\mu^* = \mu^*(\rho)$ определяется равенством

$$\frac{\sqrt{16+\mu^2}}{8}\,\mathrm{th}\,\pi\mu/8 = \frac{1}{f(\rho)}, \tag{24}$$

при $\rho \to \infty$ $\mu^*(\rho) = \frac{16}{\pi}\frac{1}{\rho} + o(1/p)$.

Пусть теперь $\mu > \mu^*$. В этом случае в качестве исходной рассмотрим экстремальную конфигурацию задачи о максимуме суммы

$$\mu^2 M(\Delta) - \Big[M(B_1,\rho,-\rho) + M(B_2,\rho,-\rho)\Big]$$

в семействе всех систем неналегающих областей $\{B_1, B_2, \Delta\}$ на U^*, где B_1 и B_2 — двуугольники с вершинами ρ и $-\rho$, Δ – двусвязная область, отделяющая точки $\pm\rho$ от окружности $|z| = 1$. Пусть B_1^z, B_2^z, Δ^z – экстремальная система областей этой задачи. При отображении

$$Z = G(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z), \quad H = \frac{1}{2}(\rho + 1/\rho),$$

этой конфигурации соответствует система областей $\{B_1^Z, B_2^Z, \Delta^Z\}$, где B_k^Z, $k = 1, 2$, – полосообразные области, Δ^Z – кольцевая область для квадратичного дифференциала

$$q(z)\,dz^2 = \frac{4H^2(H^2-1)}{\pi^2(k^2H^2-1)}\;\frac{(k^2Z^2-1)\,dZ^2}{(Z^2-H^2)^2(Z^2-1)}, \tag{25}$$

где k, $0 < k < 1$, – функция от μ и ρ, определяемая условием $\mu = 2$ дл.$_q[-1, 1]$, т.е. уравнением

$$\mu H = \frac{8H}{\pi}\sqrt{\frac{H^2-1}{k^2H^2-1}}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\;\frac{dt}{H^2-t^2}. \tag{26}$$

Для конформного модуля $m(\Delta^Z)$ имеем равенство

$$\mu \log m(\Delta^Z) = 2\pi\,\text{дл.}_q[1, 1/k],$$

следовательно,

$$\log m(\Delta^Z) = \pi/2\left\{\int\limits_1^{1/k}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{t^2-1}}\,\frac{dt}{H^2-t^2}\Big/\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,\frac{dt}{H^2-t^2}\right\}. \tag{27}$$

Найдем $M(B_1^Z, H, -H)$. Вычисляя интеграл $2\int\limits_{H+\epsilon}^{\infty}\sqrt{q(Z)}\,dZ$, выделяя в нем особенность и переходя к пределу при $\epsilon \to 0$, находим

$$M(B_1^Z, H, -H) = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{H^2-1}{k^2H^2-1}}\int\limits_1^{\infty}\left(\sqrt{\frac{k^2H^2t^2-1}{H^2t^2-1}} - \sqrt{\frac{k^2H^2-1}{H^2-1}}\right)\frac{dt}{t^2-1} + \frac{2}{\pi}\log 2H. \quad (28)$$

Полученными выражениями определяется исходная конфигурация на z-сфере. Имеем

$$M(B_1^z, \rho, -\rho) + M(B_2^z, \rho, -\rho) = M(B_1^Z, H, -H) + M(B_2^Z, H, -H) - \frac{2}{\pi}\log\left[\frac{1}{4}(1-\rho^{-2})^2\right],$$

$$M(\Delta^z) = M(\Delta^Z).$$

Сохраняя прежние обозначения D_k^f, D_k^w, D_k^W для расматриваемых двуугольников, положим $B_0{}^z = \overline{U} \cup \Delta^z$, D_0^f – образ B_0^z при отбражении $f(z) \in \Sigma(r)$. Принимая во внимание равенства

$$M(D_1^W, 1, -1) + M(D_2^W, 1, -1) = M(B_1^z, \rho, -\rho) + M(B_2^z, \rho, -\rho) + \frac{2}{\pi}\log\left|\frac{f'(\rho)f'(-\rho)}{(f(\rho)-f(-\rho))^2}\right| + \log\left(\frac{1}{4}|(1-\rho^{-1})^2)|\right),$$

$$M(D_0^W, 0) = M(D_0^w, 0) + \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2f(\rho)f(-\rho)}\right|,$$

находим максимум рассматриваемого функционала в исследуемом случае.

Итак, доказана следующая теорема. Функции $F_0(\mu)$ и $F_1(\mu)$ определены равенствами (14) и (15).

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in \Sigma(r)$, $0 < r < 1$. *Пусть* μ^* *удовлетворяет равенству*

$$\left|\frac{f(\rho)f(-\rho)}{f(\rho)-f(-\rho)}\right|\frac{\sqrt{16+\mu^2}}{8}\,\mathrm{th}(\pi\mu/8) = 1.$$

1) *Пусть* $\mu \leqslant \mu^*$ *и пусть*

$$\left|\frac{2f(\rho)f(-\rho)}{f(\rho)-f(-\rho}\right| = \frac{r}{F_0(\mu)}. \tag{29}$$

Тогда в классе $\Sigma(r)$ *справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(\rho)f'(-\rho)|}{|f(\rho)-f(-\rho)|^2} \geqslant \frac{(1+\rho^{-2})^2F_1(\mu)}{16\rho^2(1-\rho^{-2})^2}. \tag{30}$$

Равенство в (30) *реализуется для нечетных функций вида* $f(z) = \epsilon f_0(\epsilon^{-1}z)$, $|\epsilon| = 1$, *где* $f_0(z)$, $f_0(\rho) > 0$ *определяется следующим условием. Пусть дифференциал* $Q(w;\mu,\rho)\,dw^2$ *соответствует квадратичному дифференциалу* (13) *леммы* 3 *при преобразовании* $w = Wf(\rho)$:

$$Q(w;\mu,\rho)\,dw^2 = \frac{(16+\mu^2)w^2-\mu^2f^2(\rho)}{4\pi^2w^2\left(\frac{w^2}{f^2(\rho)}-1\right)^2}\,dw^2, \tag{31}$$

где $f(\rho) = f_0(\rho)$ *находится из* (29). *Пусть* $D(\mu,\rho)$ – *круговая область этого дифференциала. В случае* $\mu = \mu^*$ *функция* $f_0(z)$ *отображает* U^* *на внутренность дополнения области* $D(\mu,\rho)$ *до* w-*сферы, в случае* $\mu < \mu^*$ – *на область, получающуюся из* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_(\mu,\rho)}$ *проведением разрезов по отрезкам вещественной оси* w-*плоскости, оканчивающимися в граничных точках области* $D(\mu,\rho)$.

2) *Пусть* $\mu > \mu^*$. *Пусть функции* $\Phi(\mu,\rho)$ *и* $\Phi(\rho)$ *определяются условиями*

$$\log m(\Delta^Z) = 2\pi\log\Phi_0(\mu,\rho),$$

$$M(B_1^Z,H,-H) = \frac{1}{\pi}\Big[\log\Phi_1(\mu,\rho)-\log(\rho+1/\rho)\Big],$$

где для $\log m(\Delta^Z)$ *и* $M(B_1^Z,H,-H)$ *имеют место равенства* (27) *и* (28). *Пусть*

$$\left|\frac{2f(\rho)f(-\rho)}{f(\rho)-f(-\rho)}\right| = \frac{r\Phi_0(\mu,\rho)}{F_0(\mu)}. \tag{32}$$

Тогда в классе $\Sigma(r)$ *справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(\rho)f'(-\rho)|}{|f(\rho)-f(-\rho)|^2} \leqslant \frac{(1+\rho^{-2})^2F_1(\mu)}{16\rho^2(1-\rho^{-2})^2\Phi_1(\mu,\rho)}. \tag{33}$$

Равенство в (33) *реализуется только для нечетных функций вида* $f(z) = \epsilon f_0(\epsilon^{-1}z)$, $|\epsilon| = 1$, $f_0(\rho) > 0$. *Пусть* $Q(w,\rho)\,dw^2$ – *дифференциал*

(31), где $f(\rho) = f_0(\rho)$ находится из (32), $\widetilde{D}(\mu,\rho)$ – подобласть круговой области $D(\mu,\rho)$ этого дифференциала, ограниченная его траекторией в области $D(\mu,\rho)$, $R(\widetilde{D}(\mu,\rho),0) = r$. Функция $f_0(z)$ отображает U^* на внутренность дополнения области $\widetilde{D}(\mu,\rho)$ до w-сферы.

2.4. При $\rho \to \infty$ полосообразные области квадратичного дифференциала $Q(w,\rho)\,dw^2$ переходят в концевые области:

$$Q(w,\rho)\,dw^2 \to C\frac{w^2-\mu^2/16}{w^2}\,dw^2, \quad C>0.$$

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1 ([2,9]). *В классе $\Sigma(r)$ функций $f(z) = z+\alpha_0+\alpha_1/z+\cdots$ имеет место точное неравенство*

$$|\alpha_1| \leqslant P(r), \tag{34}$$

где функция $P(r)$ определяется следующими условиями. При $r \leqslant 8/(\pi e)$

$$P(r) = 1-\frac{1}{8}e^2r^2,$$

при $r < 8/(\pi e)$

$$P(r) = 1-2\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{\mathbf{E}^2(k)}{k^2}-\frac{k'^2}{k^2}\right],$$

где k, $0<k<1$, – решение уравнения

$$r = \frac{8}{\pi e}\frac{E(k)}{k}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(k)-\mathbf{E}'(k)}{\mathbf{E}(k)}\right\}.$$

Равенство в (34) реализуется в классе $\Sigma(r)$ нечетными функциями вида $f(z) = \epsilon f_0(\epsilon^{-1}z)$, $|\epsilon| = 1$, где $f_0(z)$, $f_0(\rho) > 0$, – функция с вещественными коэффициентами, определяемая следующими условиями. В случае $r = 8/(\pi e)$ функция $f_0(z)$ отображает область U^* на внутренность дополнения до w-сферы круговой области $D(r)$, $0 \in D(r)$, квадратичного дифференциала

$$\frac{w^2-e^2r^2/4}{w^2}\,dw^2, \tag{35}$$

в случае $r < 8/(\pi e)$ – на область, получающуюся из $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(r)}$ проведением разрезов по отрезкам вещественной оси w-плоскости с концами на границе области $D(r)$. В случае $r > 8/(\pi e)$ функция $f_0(z)$ отображает U^* на внутренность дополнения области $\widetilde{D}(r)$, лежащей в $D(r)$ и ограниченной траекторией дифференциала (35), $R(\widetilde{D}(r),0) = r$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [9].

Пусть $\mu^* = \frac{16}{\pi}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\mu \leqslant \mu^*/\rho$. Из (14) находим

$$F_0(\mu) = \frac{1}{2e}\mu + \cdots,$$

а условие (29) дает

$$F_0(\mu) = r/\rho = \cdots,$$

следовательно, $r/\rho = \mu/(2e)$, и потому в рассматриваемом случае

$$r \leqslant \frac{8}{\pi e}.$$

Используя разложение функции (15):

$$F_1(\mu) = 4 + \mu/2 + \cdots,$$

и неравенство (30), получаем оценку для $|\alpha_1|$.

2. Пусть теперь $\mu > \mu^*/\rho$, следовательно,

$$r > \frac{8}{\pi e}.$$

Рассматривая предельный переход при $H \to \infty$ выражений в (26)–(28) и пользуясь неравенством (33), приходим к неравенству для $|\alpha_1|$ и в этом случае.

Из предыдущего следует описание экстремальных отображений в терминах дифференциала (35).

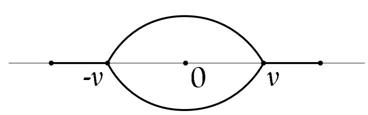

Рис. 2

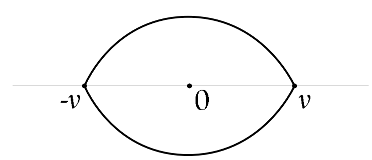

Рис. 3

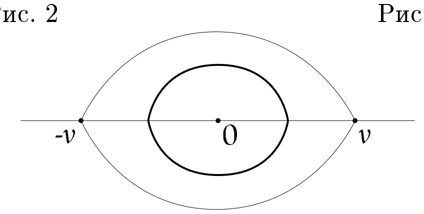

Рис. 4

Экстремальные конфигурации следствия 1 изображены на рис. 2–4, $\nu = er/2$.

Литература

1. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping.* — Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.S.) Bd. 18, Springer-Verlag, 1958; 2nd ed. corrected, 1965. Пер. на рус. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.
2. J. A. Jenkins, *An extension of the general coefficient theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), No. 3, 387–407.
3. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics. I, II.* — Ann. Math. (2) **66** (1957), 440–453; Tohoku Math. J. (2) **45** (1993), No. 2, 249–257.
4. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении.* — Докл. АН СССР bf84 (1952), 865–868.
5. J. A. Jenkins, *A recent note of Kolbina.* — Duke Math. J. **21** (1954), 155–161.
6. N. Suita, *A distortion theorem of univalent functions related to symmetric three points.* — Kodai Math. Semin. Reports.
7. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
8. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 1, 3–86.
9. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении и оценки коэффициентов в классе* $\Sigma(r)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 101–116.

Kuz'mina G. V. The module method and some extremal problems in the class $\Sigma(r)$.

Let $\Sigma(r)$ denote some class of functions $f(z)$ meromorphic and univalent for $|z| > 1$. In the class $\Sigma(r)$, some extremal problems are solved. The proofs are based on the module method.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2013 г.