

В. О. Кузнецов

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ, ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1°. Дж. Дженкинс [1, 2] установил определяющую роль квадратичных дифференциалов в экстремальных задачах геометрической теории функций. Многие такие задачи связаны с некоторыми задачами об экстремальном разбиении. К числу последних задач относятся вопросы о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей и связанных с ними конформных инвариантов. В данной работе исследуются геометрические свойства экстремальных конфигураций указанных задач.

Если D – односвязная область и $a \in D$, то под $m(D, a)$ и $R(D, a)$ понимаем соответственно приведенный модуль и конформный радиус этой области относительно точки a . Рассмотрим четыре связанные друг с другом задачи.

Задача 1. Пусть \mathbb{S} – риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$ или единичный круг $U = \{|z| < 1\}$, a_1, \dots, a_n ($n \geq 2$) – различные фиксированные точки \mathbb{S} , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – заданные положительные числа. Найти максимум функционала

$$I_1 = I_1(\mathbb{S}, a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 m(D_j, a_j). \quad (1)$$

для всех систем неналегающих односвязных областей на D_1, \dots, D_n на \mathbb{S} таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \dots, n$.

Задача 2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – заданные положительные числа, a_1, \dots, a_n , D_1, \dots, D_n ($n \geq 2$) – система точек и неналегающих односвязных областей в круге U таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \dots, n$. Найти максимум функционала (1) для всех указанных систем точек a_j и областей D_j .

Ключевые слова: квадратичный дифференциал, круговая область квадратичного дифференциала, экстремальное разбиение, конформный инвариант.

Задача 3. Пусть $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ ($n \geq 3$) – система точек и неналегающих односвязных областей на \mathbb{C} таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \dots, n$. Найти максимум функционала

$$I_2 = \sum_{j=1}^n m(D_j, a_j) - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{n-1} \sum'_{1 \leq j < k \leq n} \log |a_j - a_k| \quad (2)$$

для всех указанных систем точек a_j и областей D_j . Штрих у знака суммы здесь означает, что если $a_j = \infty$ или $a_k = \infty$, то соответствующее слагаемое отсутствует.

Задача 4. Пусть $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ ($n \geq 2$) – система точек и неналегающих односвязных областей в круге U таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \dots, n$. Найти максимум функционала

$$I_3 = \sum_{j=1}^n m(D_j, a_j) - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2}{3(n-1)} \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log(|a_k - a_j| |1 - \bar{a}_k a_j|) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \log(1 - |a_j|^2) \right\} \quad (3)$$

для всех указанных систем точек a_j и областей D_j .

Очевидно, функционал I_1 в задаче 2 ограничен и инвариантен относительно преобразования поворота $z \rightarrow e^{i\varphi} z$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Хорошо известно, что функционал I_2 инвариантен относительно дробно-линейных преобразований \mathbb{C} , а функционал I_3 инвариантен относительно гиперболических движений круга U . Функционалы I_2 и I_3 также ограничены (см., например, [3]). Из теории нормальных семейств, следует, что системы точек и областей, реализующие максимум функционалов в задачах 2–4 существуют.

Если $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и неналегающих односвязных областей в задачах 2–4, то D_1, \dots, D_n – экстремальная система областей в задаче 1 для точек a_1, \dots, a_n . В задаче 1 имеет место следующий качественный результат [4].

Теорема А. Пусть a_1, \dots, a_n – различные фиксированные точки \mathbb{S} , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – положительные числа. Существует положительный квадратичный дифференциал

$$Q(z)dz^2 = Q(z, a_1, \dots, a_n; \mathbb{S}) dz^2 \quad (4)$$

на \mathbb{S} , регулярный на \mathbb{S} за исключением двойных полюсов в точках a_1, \dots, a_n , содержащихся в круговых областях D_1, \dots, D_n этого дифференциала. Пусть Φ – объединение всех критических траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ на \mathbb{S} , $\bar{\Phi}$ – замыкание Φ . Внутреннее замыкание множества Φ пусто и $\mathbb{S} \setminus \bar{\Phi} = \bigcup_{k=1}^n D_k$. Числа α_k являются длинами в Q -метрике траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в областях $D_k, k = 1, \dots, n$. Система областей D_1, \dots, D_n , и только она, реализует максимум функционала (1) в задаче 1.

Теорема А (в случае римановой поверхности) получена в [1] в качестве одного из приложений “общей теоремы о коэффициентах” [1], при этом существование ассоциированного квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ установлено в [2]. Простое доказательство теоремы А дано в [4].

Из теоремы А вытекает, что экстремальные области в задаче 1 ограничены кусочно-аналитическими кривыми, а множество $\bar{\Phi}$ связно. Если $\mathbb{S} = U$, то, кроме того, существует, по крайней мере, один нуль дифференциала (4), лежащий на окружности $T = \{|z| = 1\}$, и все нули этого дифференциала, лежащие на T , имеют четный порядок. Отметим, что в соответствии с общепринятой терминологией задача 1 – это задача с фиксированными полюсами, в то время как задачи 2–4 являются задачами со свободными полюсами.

Задачам об экстремальном разбиении, в том числе и задачам 1–3 посвящено большое число работ (см., например, обзоры в [5, 6]). Тем не менее, полное решение задач 2 и 3 в настоящее время получено только при малых n . Нахождение максимума функционалов I_1, I_2 и I_3 при больших n представляет значительные сложности и все результаты в этих задачах для $n \geq 5$ получены при дополнительных ограничениях на расположение экстремального семейства точек a_1, \dots, a_n . Тем более интересным представляется описание геометрических свойств, которым подчиняются в общем случае экстремальные разбиения в этих задачах. Так, например, в работе автора [7] было доказано, что ассоциированный квадратичный дифференциал в задаче 3 не имеет кратных нулей. Это означает геометрически, что, в отличие от задачи 1, ни одна из точек римановой сферы не может быть граничной точкой для более чем трех областей экстремального разбиения в этой задаче. Основная цель настоящей работы показать, что экстремальные разбиения в задачах 2–4 обладают еще одним, общим для этих задач геометрическим свойством, отличающим их от задачи 1.

Границы экстремальных областей в задаче 1, вообще говоря, жордановыми кривыми не являются. Так на рис. 1 слева схематично изображены круговые области квадратичного дифференциала

$$\frac{a^2 - z^2}{4\pi^2(z^2 - 1)^2} dz^2.$$

Эти области дают решение задачи 1 о экстремальном разбиении плоскости на три односвязные области для точек $a_1 = \infty$, $a_{2,3} = \pm 1$ и $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{2,3} = \sqrt{1 - a^2}/2$, $0 < a < 1$.

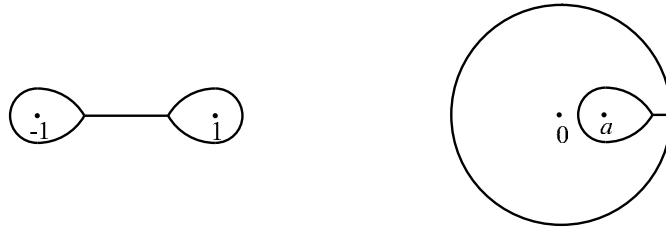


Рис. 1

На рис. 1 справа изображены две круговые области дифференциала

$$\frac{(z - 1)^2(z - b)(1 - bz)}{4\pi^2 z^2(z - a)^2(1 - az)^2} dz^2,$$

дающие решение задачи 1 о экстремальном разбиении круга U на две односвязные области для точек $a_1 = 0$, $a_2 = a$ и $\alpha_1 = \sqrt{b}/a$, $\alpha_2 = \sqrt{(b - a)(1 - ab)}/(a(1 + a))$, $0 < a < b < 1$.

И в том и в другом случае граница области D_1 жордановой кривой не является, поскольку у области D_1 есть внутренний разрез. В задачах 2–4 такие экстремальные разбиения невозможны. Следующая теорема показывает, что свобода в выборе полюсов делает систему областей, ограниченных нежордановыми кривыми в этих задачах “неконкурентной”.

Теорема 1. *Граница каждой из областей экстремального разбиения в задачах 2–4 является замкнутой жордановой кривой.*

Геометрическим следствием теоремы 1 является тот факт, что области экстремального разбиения в задачах 2–4 не могут иметь внутренних разрезов, а замыкания этих областей не могут иметь “дыр”.

В работе автора [3] показано, что квадратичный дифференциал, определяющий экстремальную систему областей в задаче 4, имеет на окружности $T = \{|z| = 1\}$ не менее двух различных нулей. Теорема 1 позволяет дополнить это утверждение.

Следствие 1. *Квадратичный дифференциал, определяющий экстремальную систему областей в задачах 2–4, имеет на границе каждой из областей экстремального разбиения не менее двух различных нулей. Квадратичный дифференциал, определяющий экстремальную систему областей в задачах 2 и 4, имеет на окружности T не менее двух различных нулей.*

При $n = 2$ задача 1 для круга U решена в [8, 9]. Следствие 1 приводит к простому решению задачи 2 в случае $n = 2$ и позволяет избежать сравнения значений функционала I_1 для топологически различных допустимых конфигураций в этой задаче. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть α_1, α_2 – заданные положительные числа. Максимум функционала $I_1(U, a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)$ в задаче 2 реализуется для системы точек и областей a, b, D_1, D_2 , где a – положительный корень уравнения*

$$\alpha^3(\alpha^2 - \alpha + 1)a^4 + (\alpha + 1)(\alpha^3 + 1)a^2 - 1 = 0,$$

$\alpha = \alpha_1/\alpha_2$, $b = -\alpha^2 a$, D_1 и D_2 – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\alpha_1}{z-a} + \frac{\alpha_1 a}{1-az} - \frac{\alpha_2}{z-b} - \frac{\alpha_2 b}{1-bz} \right)^2 dz^2,$$

лежащие в U . Имеет место равенство

$$\alpha_1^2 m(D_1, a) + \alpha_2^2 m(D_2, b) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \alpha_1^2 \log(1 - a^2) + \alpha_2^2 \log(1 - b^2) + 2\alpha_1 \alpha_2 (\log(a - b) - \log(1 - ab)) \right\}.$$

Каждая другая экстремальная конфигурация получается из указанной при преобразовании $z \rightarrow e^{i\varphi} z$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ из теоремы 2, в частности, получаем:

$$a = \sqrt{\sqrt{5} - 2}, R(D_1, a_1)R(D_2, a_2) \leq \frac{4a^2(1-a^2)^2}{(1+a^2)^2} = 2(5\sqrt{5}-11) = 0,36068\dots$$

Доказательства.

1°. Нам потребуется следующая

Лемма 1. Пусть $a \in U, D$ – односвязная область, $0 \in D \subset U \setminus \{a\}$, $\varepsilon > 0, \lambda = 1 + \varepsilon, \lambda|a| < 1, D_\lambda$ – односвязная компонента множества $\lambda D \cap U$, содержащая точку $z = 0$. Тогда

$$m(D_\lambda, 0) \geq m(D, 0) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - |a|}{1 + |a|} \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Доказательство. Если $0 < t < r$, то положим $\Delta_{r,t} = rU \setminus [t, r)$, $g(r, t) = R(\Delta_{r,t}, 0) = 4tr^2(r+t)^{-2}$. Пусть $\rho = |a|$. Поскольку $a \notin D$, то $R(D, 0) \leq g(1, \rho)$ и существует $\tilde{\rho} \in (0, \rho]$ такое, что $R(D, 0) = g(1, \tilde{\rho})$. По теореме А. Ю. Солюнина о круговом сужении области ([10, с. 149]) $R(\lambda^{-1}D_\lambda, 0) \geq g(\lambda^{-1}, \tilde{\rho})$. Поэтому

$$\frac{R(\lambda^{-1}D_\lambda, 0)}{R(D, 0)} \geq \frac{g(\lambda^{-1}, \tilde{\rho})}{g(1, \tilde{\rho})} = \left(\frac{1 + \tilde{\rho}}{1 + \lambda\tilde{\rho}} \right)^2 \geq \left(\frac{1 + \rho}{1 + \lambda\rho} \right)^2.$$

Откуда

$$\frac{R(D_\lambda, 0)}{R(D, 0)} = \frac{\lambda R(\lambda^{-1}D_\lambda, 0)}{R(D, 0)} \geq \lambda \left(\frac{1 + \rho}{1 + \lambda\rho} \right)^2 = 1 + \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \varepsilon + o(\varepsilon).$$

что равносильно доказываемому неравенству. \square

2°. В этом пункте мы введем специальную вариацию рассматриваемых семейств точек и областей, которая будет использована при доказательстве теоремы 1.

Если D – ограниченная область, то границу той из односвязных областей дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, которая содержит точку ∞ , будем называть *внешней границей* области D и обозначать $\partial'D$, а односвязную область, ограниченную (на \mathbb{C}) кривой $\partial'D$, обозначим D^+ . Очевидно, $\partial'D \subset \partial D, D \subset D^+$. Если D_1 – одна из областей экстремального разбиения в задаче 1 и ∂D_1 жордановой кривой не является, то $D_1^+ \setminus D_1 \neq \emptyset$, а $\overline{D_1^+}$ является объединением замыканий k ($k \geq 2$) круговых областей дифференциала (4) (см. чертеж на рис. 2 слева).

Пусть $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и областей в задачах 2–4. Предположим, что граница γ одной из этих областей, пусть это будет область D_1 , жордановой кривой не является. Тогда на γ существует точка z_0 , являющаяся носителем, по крайней мере, двух различных граничных элементов области D_1 . Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда $\infty \notin \overline{D_1}$. Пусть $\overline{\Phi} = \bigcup_{j=1}^n \partial D_j$, Φ' – та из связных компонент множества $\overline{\Phi} \setminus \{z_0\}$, для которой $\partial' D_1 \subset \overline{\Phi}'$, и пусть $\Phi'' = \overline{\Phi} \setminus \Phi' \setminus \{z_0\}$. Тогда содержащая точку a_1 связная компонента D множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Phi}'$ является односвязной областью такой, что $D_1 \subset D \subset D_1^+$, $\partial D \subset \gamma$, $\overline{D} \cap \overline{\Phi}'' = \{z_0\}$. Геометрическое соотношение между областями D , D_1 и D_1^+ проиллюстрировано на рис. 2.

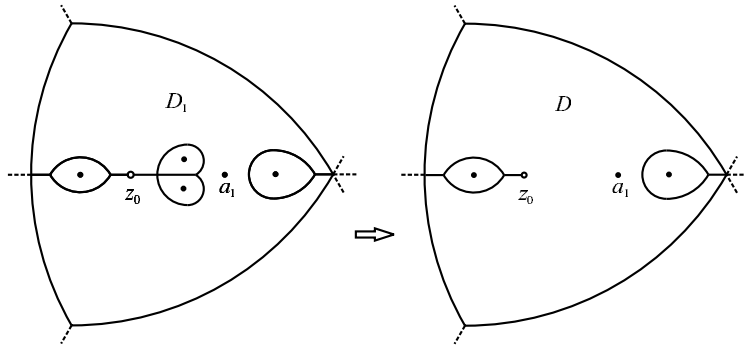


Рис. 2

Пусть D_1, \dots, D_m – экстремальные области, лежащие внутри D .¹ Тогда $2 \leq m \leq n$, $\partial D_j \subset \overline{\Phi}''$ при $j = 2, \dots, m$, и $\overline{D_j} \cap D = \emptyset$ при $j = m + 1, \dots, n$. Отметим, что равенство $m = n$ возможно только в задаче 4, и только в том случае когда $\partial' D_1 = T$.

Рассмотрим конформный гомеоморфизм $\zeta = \sigma(z)$ области D на круг $U_\zeta = \{|\zeta| < 1\}$, нормированный условиями $\sigma(a_1) = 0$, $\sigma'(a_1) > 0$, и пусть $z = s(\zeta)$ – обратное отображение. Положим $b_j = \sigma(a_j)$, $G_j = \sigma(D_j)$, $j = 1, \dots, m$. Поскольку D_1, \dots, D_n – экстремальная система

¹Именно, внутри D , а не внутри D_1^+ .

областей в задаче 1 для точек a_1, \dots, a_n , то G_1, \dots, G_m – экстремальная система областей в задаче 1 для круга U_ζ и точек b_1, \dots, b_m (с параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$). Из теоремы А вытекает, что G_1, \dots, G_m – круговые области квадратичного дифференциала $Q(\zeta, b_1, \dots, b_m; U)d\zeta^2$. Поскольку $T_\zeta = \{|\zeta| = 1\} = \sigma(\partial D) \subset \sigma(\partial D_1) = \partial G_1, \left(\bigcup_{j=1}^m \partial G_j\right) \setminus T_\zeta = \sigma(\Phi'')$ и $\overline{U}_\zeta \cap \sigma(\overline{\Phi}'') = \{\sigma(z_0)\}$, то единственным нулем этого дифференциала на окружности T_ζ является точка $\sigma(z_0)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\lambda = 1 + \varepsilon$, $|\mu| = \lambda$. Положим $\tilde{b}_j = \mu b_j$, $\tilde{G}_j = (\mu G_j) \cap U_\zeta$, $j = 1, \dots, m$. Тогда (см. доказательство теоремы 2 в [3]) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\tilde{b}_j \in \tilde{G}_j \subset U_\zeta$, $j = 1, \dots, m$, а $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_m$ – односвязные области такие, что

$$m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) = m(G_j, b_j) + \varepsilon/2\pi + o(\varepsilon), \quad j = 2, \dots, m. \quad (5)$$

Кроме того, по лемме 1

$$m(\tilde{G}_1, \tilde{b}_1) = m(G_1, b_1) + p\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6)$$

где

$$p = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - |b_2|}{1 + |b_2|} > 0. \quad (7)$$

Полагая $\tilde{a}_j = s(\tilde{b}_j)$, $\tilde{D}_j = s(\tilde{G}_j)$ для $j = 1, \dots, m$, и $\tilde{a}_j = a_j$, $\tilde{D}_j = D_j$ для $j = m+1, \dots, n$, получим варьированную систему точек $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ и областей $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n$. Отметим, что $o(\varepsilon)$ в (5) и (6) не зависит от $\arg \mu$ и $\tilde{b}_1 = b_1$.

3°. Пусть a_1, \dots, a_n , D_1, \dots, D_n – экстремальная система точек и областей в задаче 2. Предполагая, что граница γ области D_1 жордановой кривой не является, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ получим $m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) > m(G_j, b_j)$, $j = 1, \dots, m$, и $m(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j) = m(D_j, a_j)$, $j = m+1, \dots, n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 [m(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j) - m(D_j, a_j)] &= \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 [m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) - m(G_j, b_j)] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 [\log |s'(\tilde{b}_j)| - \log |s'(b_j)|] > h(\mu) - h(1), \quad (8) \end{aligned}$$

где $h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^m \alpha_j^2 \log |s'(b_j \zeta)|$. Поскольку $z = s(\zeta)$ – конформный гомеоморфизм, то $h(\zeta)$ – гармоническая в круге $\lambda \bar{U}_\zeta$ функция. Поэтому существует μ такое, что $|\mu| = \lambda$ и $h(\mu) \geq h(1)$. Из (8) тогда вытекает, что $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 m(\tilde{D}_j, \tilde{a}_j) > \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 m(D_j, a_j)$, что противоречит экстремальности исходной системы точек и областей.

4°. **Замечание.** По аналогии с задачей 2 о разбиении круга, в ряде работ (см., например, [11, 12]) рассматривалась задача о нахождении разбиения кольца на неналегающие односвязные области, дающего максимум функционалу (1). А. Ю. Солянин, в частности, доказал ([11, теорема 3.1]), что экстремальное разбиение кольца на две односвязные области с одинаковыми весами ($\alpha_1 = \alpha_2$) состоит из двух непересекающихся полуколец. Таким образом, границы областей экстремального разбиения кольца в этом случае являются жордановыми кривыми. Будут ли жордановыми кривыми границы областей экстремального разбиения кольца в случае равных весов при $n > 2$ в настоящее время неизвестно. Для произвольных весовых коэффициентов это в общем случае неверно даже при $n = 2$. Тем не менее, если \mathcal{D} – экстремальное разбиение ограниченной конечносвязной области \mathbb{S} на \mathbb{C} , то повторяя дословно приведенное выше доказательство, получим, что

точка z_0 может быть носителем нескольких граничных элементов области $D_k \in \mathcal{D}$ только в том случае, когда пересечение $\partial \mathbb{S}$ с каждой связной компонентой множества $\left(\bigcup_{j=1}^n \partial D_j \right) \setminus \{z_0\}$ не пусто.

В частности, граница области D_k экстремального разбиения \mathcal{D} является жордановой кривой, если область D_k^+ , ограниченная внешней границей $\partial' D_k$, лежит в \mathbb{S} .

5°. Пусть $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и областей в задаче 3. Предположим, что граница γ области D_1 жордановой кривой не является. Поскольку функционал I_2 инвариантен относительно дробно-линейных преобразований плоскости, то при построении вариации можем считать, что $\infty \notin \bar{D}_1 \cup \{a_1, \dots, a_n\}$. Из (2) и (5)–(7) для варьированной системы точек $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ и областей $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n$ получим

$$\begin{aligned}
& 2\pi [I_2(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) - I_2(a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n)] \\
&= \sum_{j=1}^m \left[2\pi \left(m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) - m(G_j, b_j) \right) + \log |s'(\tilde{b}_j)| - \log |s'(b_j)| \right] \\
&- \frac{2}{n-1} \left[\sum_{1 \leq j < k \leq m} \log \left| \frac{s(\tilde{b}_j) - s(\tilde{b}_k)}{s(b_j) - s(b_k)} \right| + \sum_{\substack{2 \leq j \leq m \\ m < k \leq n}} \log \left| \frac{s(\tilde{b}_j) - a_k}{s(b_j) - a_k} \right| \right] \\
&> p\varepsilon + (m-1) \left(1 - \frac{m}{n-1} \right) \varepsilon + h(\mu) - h(1) + o(\varepsilon) \\
&\geq p\varepsilon + h(\mu) - h(1) + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

где $p > 0$,

$$\begin{aligned}
h(\mu) &= \sum_{j=2}^m \log |s'(b_j \zeta)| \\
&- \frac{2}{n-1} \left[\sum_{2 \leq j < k \leq m} \log \left| \frac{s(b_j \zeta) - s(b_k \zeta)}{\zeta} \right| + \sum_{\substack{2 \leq j \leq m \\ m < k \leq n}} \log |s(b_j \zeta) - a_k| \right].
\end{aligned}$$

Поскольку $z = s(\zeta)$ — конформный гомеоморфизм, и $a_k \notin s(U)$, $k = m+1, \dots, n$, то $h(\zeta)$ — гармоническая в круге $\lambda \bar{U}_\zeta$ функция. Поэтому существует μ такое, что $|\mu| = \lambda$ и $h(\mu) \geq h(1)$. Тогда

$$I_2(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) > I_2(a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n),$$

что противоречит экстремальности исходной системы точек и областей.

6°. Для доказательства справедливости теоремы 1 в задаче 4 нам потребуется следующая

Лемма 2. Если функции $f_k(\zeta)$, $k = 1, 2$, регулярны в U_ζ и $|f_k(\zeta)| < 1$ в U_ζ , $k = 1, 2$, то функция

$$\varphi(\zeta) = -\log \left(\left| 1 - f_1(\zeta) \overline{f_2(\zeta)} \right|^2 \left(1 - |f_1(\zeta)|^2 \right)^\tau \left(1 - |f_2(\zeta)|^2 \right)^\tau \right)$$

субгармонична в U_ζ при всех $\tau \geq 1$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\Delta\varphi(\zeta) \geq 0$ в U_ζ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi(\zeta)}{4} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{2f'_1(\zeta)\overline{f'_2(\zeta)}}{(1-f_1(\zeta)\overline{f_2(\zeta)})^2} \right\} + \tau \left(\frac{|f'_1(\zeta)|^2}{(1-|f_1(\zeta)|^2)^2} + \frac{|f'_2(\zeta)|^2}{(1-|f_2(\zeta)|^2)^2} \right) \\ &\geq -\frac{2|f'_1(\zeta)f'_2(\zeta)|}{|1-f_1(\zeta)\overline{f_2(\zeta)}|^2} + \frac{2|f'_1(\zeta)f'_2(\zeta)|}{(1-|f_1(\zeta)|^2)(1-|f_2(\zeta)|^2)} \\ &= \frac{2|f'_1(\zeta)f'_2(\zeta)| \cdot |f_1(\zeta) - f_2(\zeta)|^2}{|1-f_1(\zeta)\overline{f_2(\zeta)}|^2 (1-|f_1(\zeta)|^2)(1-|f_2(\zeta)|^2)} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

7°. Пусть $a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и областей в задаче 4 и граница γ области D_1 жордановой кривой не является. Поскольку функционал I_3 инвариантен относительно гиперболических движений круга U , то можем считать, что $a_1 = 0$. Из (3) и (5)–(7) для варьированной системы точек $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ и областей $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n$ получаем

$$\begin{aligned} &2\pi [I_3(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) - I_3(a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n)] \\ &= \sum_{j=1}^m \left[2\pi \left(m(\tilde{G}_j, \tilde{b}_j) - m(G_j, b_j) \right) + \log |s'(\tilde{b}_j)| - \log |s'(b_j)| \right] \\ &- \frac{2}{3(n-1)} \left[\sum_{1 \leq j < k \leq m} \log \left| \frac{s(\tilde{b}_j) - s(\tilde{b}_k)}{s(b_j) - s(b_k)} \right| + \sum_{\substack{2 \leq j \leq m \\ m < k \leq n}} \log \left| \frac{s(\tilde{b}_j) - a_k}{s(b_j) - a_k} \right| \right] \\ &+ \sum_{2 \leq j < k \leq m} \log \left| \frac{1 - s(\tilde{b}_j)\overline{s(\tilde{b}_k)}}{1 - s(b_j)\overline{s(b_k)}} \right| + \sum_{\substack{2 \leq j \leq m \\ m < k \leq n}} \log \left| \frac{1 - \overline{a_k}s(\tilde{b}_j)}{1 - \overline{a_k}s(b_j)} \right| \\ &- \frac{1}{3} \sum_{j=2}^m \log \frac{1 - |s(\tilde{b}_j)|^2}{1 - |s(b_j)|^2} > p\varepsilon + (m-1) \left(1 - \frac{m}{3(n-1)} \right) \varepsilon \\ &+ h(\mu) - h(1) + o(\varepsilon) \geq p\varepsilon + h(\mu) - h(1) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $p > 0$, $h(\zeta) = h_1(\zeta) + h_2(\zeta)$,

$$h_1(\zeta) = \sum_{j=2}^m \log |s'(b_j\zeta)| - \frac{2}{3(n-1)}$$

$$\times \left[\sum_{2 \leq j < k \leq n} \log \left| \frac{s(b_j \zeta) - s(b_k \zeta)}{\zeta} \right| + \sum_{\substack{2 \leq j \leq m \\ m < k \leq n}} \log \left| (s(b_j \zeta) - a_k)(1 - \overline{a_k} s(b_j \zeta)) \right| \right],$$

$$h_2(\zeta) = \frac{1}{3(n-1)} \sum_{2 \leq j < k \leq m} \psi_{jk}(\zeta),$$

$$\psi_{jk}(\zeta) = -\log \left| \left(1 - s(b_j \zeta) \overline{s(b_k \zeta)}\right)^2 \left(1 - |s(b_j \zeta)|^2\right)^\tau \left(1 - |s(b_k \zeta)|^2\right)^\tau \right|,$$

$$\tau = \frac{n-1}{m-2} > 1.$$

В силу леммы 2 $h_2(\zeta)$ – субгармоническая в круге $\lambda \overline{U}_\zeta$ функция и, поскольку $h_1(\zeta)$ гармонична в $\lambda \overline{U}_\zeta$, то $h(\zeta)$ субгармонична в $\lambda \overline{U}_\zeta$. Поэтому существует μ такое, что $|\mu| = \lambda$ и $h(\mu) \geq h(1)$. Тогда $I_3(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) > I_3(a_1, \dots, a_n, D_1, \dots, D_n)$, что противоречит экстремальности исходной системы точек и областей и завершает доказательство теоремы 1.

8°. Докажем следствие 1. Пусть z_0 – единственный нуль дифференциала, лежащий на границе области D_1 экстремального разбиения \mathcal{D} . Тогда существует $D_2 \in \mathcal{D}$ такая, что $\partial D_1 \subset \partial D_2$. Поскольку из точки z_0 выходит не менее трех траекторий дифференциала, то, по крайней мере, одна из этих траекторий, обозначим ее γ , целиком лежит в D_2 . Что невозможно, поскольку каждая точка траектории γ тогда была бы носителем не менее двух граничных элементов области D_2 .

Если z_0 – единственный нуль дифференциала (4), лежащий на окружности T , то $T \subset \overline{D}$ для одной из областей D экстремального разбиения. Поскольку порядок нуля дифференциала на T не меньше двух, то, по крайней мере, одна из выходящих из точки z_0 траекторий тогда должна целиком лежать в $U \cap \overline{D}$. Что невозможно, поскольку точка z_0 тогда была бы носителем не менее двух граничных элементов области D .

9°. **Доказательство теоремы 2.** Поскольку

$$I_1(U, a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2^2 I_1(U, a_1, a_2, \alpha, 1), \quad (9)$$

то достаточно рассмотреть случай $\alpha_1 = \alpha \geq \alpha_2 = 1$. Пусть a_1, a_2, D_1, D_2 – экстремальная система точек и областей в задаче 2. Поскольку

функционал I_1 инвариантен относительно преобразования поворота круга U , то можем считать, что $a_1 = a \geq 0, a_2 = b$.

Покажем, что

$$b = -\alpha^2 a, \quad (10)$$

и, следовательно, $0 < a < \alpha^{-2}$. Действительно, пусть $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{a}, \tilde{b}$ – образ экстремальной системы областей и точек при гиперболическом движении

$$\sigma(z) = \frac{z - p}{1 - \bar{p}z},$$

где $p = \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Положим $J(a, b) = I_1(U, a, b, \alpha, 1)$. Поскольку

$$\begin{aligned} J(\tilde{a}, \tilde{b}) - J(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \left[\alpha^2 \log |\sigma'(a)| + \log |\sigma'(b)| \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{ e^{i\varphi} (\alpha^2 a + b) \} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

то в силу произвольности φ и экстремальности исходной системы точек и областей $b = -\alpha^2 a$.

Из теоремы А и следствия 1 вытекает, что квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2 = Q(z, a, b; U)dz^2$, определяющий систему областей D_1, D_2 , имеет два нуля второго порядка на окружности T и других нулей не имеет. В силу симметрии в расположении точек a и b и единственности решения задачи 1 эти нули симметричны относительно вещественной оси:

$$Q(z)dz^2 = -\frac{B(z-c)^2(1-\bar{c}z)^2}{4\pi^2(z-a)^2(1-az)^2(z-b)^2(1-bz)^2}, \quad (11)$$

где $B > 0$, $|c| = 1$. Из (11) и условий нормировки в теореме А тогда получаем, что $4\pi^2 Q(z) = -H(z)^2$, где

$$H(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\alpha a}{1-az} - \frac{1}{z-b} - \frac{b}{1-bz}.$$

Отрезки $[-1, b]$ и $[a, 1]$ являются замыканиями ортогональных траекторий дифференциала. Поэтому

$$\begin{aligned}
m(D_2, b) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{b-\varepsilon} H(z) dz + \log \varepsilon \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\alpha \log(a-b) - \alpha \log(1-ab) + \log(1-b^2) \right], \\
m(D_1, a) &= \frac{1}{2\pi\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{a+\varepsilon}^1 H(z) dz + \alpha \log \varepsilon \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha} \left[\log(a-b) - \log(1-ab) + \alpha \log(1-a^2) \right].
\end{aligned}$$

Отсюда и из (10) получаем

$$J(a, b) = (2\pi)^{-1} M(a, \alpha), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
M(a, \alpha) &= 2\alpha \log[(1 + \alpha^2)a] - 2\alpha \log(1 + \alpha^2 a^2) \\
&\quad + \log(1 - \alpha^4 a^2) + \alpha^2 \log(1 - a^2), \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M(a, \alpha)}{\partial a} &= \frac{2\alpha}{a} - \frac{4\alpha^3 a}{1 + \alpha^2 a^2} - \frac{2\alpha^4 a}{1 - \alpha^4 a^2} - \frac{2\alpha^2 a}{1 - a^2} \\
&= \frac{2\alpha(1 - \alpha^2 a^2) P(a, \alpha)}{a(1 + \alpha^2 a^2)(1 - \alpha^4 a^2)(1 - a^2)},
\end{aligned}$$

$$P(a, \alpha) = \alpha^3(\alpha^2 - \alpha + 1)a^4 + (\alpha + 1)(\alpha^3 + 1)a^2 - 1.$$

Поскольку $P(0, \alpha) = -1 < 0 < P(\alpha^{-2}, \alpha) = (\alpha^2 + 1)^2 \alpha^{-5}$, то единственный положительный корень a уравнения $P(a, \alpha) = 0$ лежит на интервале $(0, \alpha^{-2})$ и доставляет наибольшее значение функции $M(a, \alpha)$ на этом интервале. Из (9), (10), (12) и (13) теперь получаем все утверждения теоремы 2. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*. Ergeb. Math. Grenz. (N.F.) Bd.18, Springer-Verlag (1958); 2nd ed. mcorrected, 1965. Пер. на рус. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения. М., 1962.

2. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics*. I, II. — Ann. of Math. (2) **66** (1957), 440–453; Tohoku Math. J. (2), **45**, No. 2 (1993), 249–257.
3. В. О. Кузнецов, *О максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **237** (1997), 105–118.
4. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*. — Тр. матем. ин-та АН СССР, **139** (1980).
5. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций* II. — Алгебра и анализ **9**, No. 5 (1997), 1–60.
6. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*. — Успехи мат. наук **49** (1994), 13–76.
7. В. О. Кузнецов, *О свойствах ассоциированных квадратичных дифференциалов в некоторых экстремальных задачах*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 85–97.
8. П. П. Куфарев, *К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей*. — Докл. АН СССР **73** (1950), 881–884.
9. П. П. Куфарев, А. Э. Фалес, *Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей*. — Уч. записки Томск. ун-та **17** (1952), 25–35.
10. А. Ю. Сольнин, *Минимизация конформного радиуса при круговом сужении области*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 145–164.
11. А. Ю. Сольнин, *Геометрические свойства экстремальных разбиений и оценки модулей семейств кривых в круговом кольце*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **204** (1993), 93–114.
12. Г. В. Кузьмина, *К задаче об экстремальном разбиении n -связной области*. — Зап. научн. сем. ЛОМИ **185** (1990), 96–110.

Kuznetsov V. O. Some geometrical properties of extremal decompositions.

Problems on the maximum of the product of conformal radii powers for nonoverlapping simply connected domains are considered. It is proved that the bound of each domain of the extremal decomposition in certain cases is some Jordan curve.

Государственный университет
морского и речного флота
им. адмирала С. О. Макарова
E-mail: kvo_kuz@mail.ru

Поступило 8 июля 2013 г.