Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

С. И. Калмыков

О ПОЛИНОМАХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, НОРМИРОВАННЫХ НА ДУГАХ ОКРУЖНОСТИ

Введение

Неравенствам для полиномов и рациональных функций посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [1, 2]). В последнее время значительное внимание уделяется полиномам с ограничениями на дугах единичной окружности [3–10]. В частности, в работе [9] показано, как из принципа мажорации для мероморфных функций [11–13] вытекают новые теоремы типа покрытия, искажения и оценки модуля произведения старшего и свободного коэффициентов алгебраческого полинома с ограничениями на дугах окружности. Цель настоящей работы – уточнение и обобщение результатов статьи [9]. Работа состоит из двух частей. В первой части приводятся теоремы для рациональных функций, непосредственно вытекающие из принципа мажорации (см. [11–14]), примененного к подходящей мероморфной функции, и зависящие от функции Грина и внутреннего радиуса дополнительных к дугам окружности областей. Во второй части получены неравенства для полиномов с ограничениями на одной дуге. Эти неравенства дополняют соответствующие результаты статьи [9]. В основе доказательств в этой части работы лежит подход, предложенный В. Н. Дубининым в работе [15] и в общих чертах сводящийся к следующему: по заданному полиному строится аналитическая функция, а затем к ней применяются методы геометрической теории функций. Технические детали доказательств заимствованы из работы А. В. Олесова [3].

Всюду ниже Γ – объединение конечного числа непересекающихся замкнутых невырожденных дуг единичной окружности $|z| = 1$, $D =$

Ключевые слова: теоремы покрытия и искажения, неравенства для полиномов, неравенства для рациональных функций, полиномы Чебышева, принципы мажорации, однолистные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке the European Research Council Advanced grant No. 267055 (the author had a postdoctoral position at the Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary) и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0366.

$\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, $g_B(z,\zeta)$ – функция Грина области B и $r(B,z)$ – внутренний радиус области B относительно точки z [14],

$$\Gamma_\alpha = \{z = e^{ix} : -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha\}, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Будем рассматривать полиномы с комплексными коэффициентами вида

$$P(z) = c_n z^n + \dots + c_k z^k, \quad n > k, \quad c_n c_k \neq 0, \tag{1}$$

а также рациональные функции

$$R(z) = \frac{P(z)}{z^{p_0} \prod\limits_{j=1}^{p} (z - a_j)}, \quad p_0 \geqslant 0, \quad a_j \in \mathbb{C}_z \setminus (\Gamma \cup \{0\}), \tag{2}$$

где P – полином вида (1). Везде далее

$$x_+ = \max\{0, x\},$$

$$m = m(F;\Gamma) = \min_{z\in\Gamma} |F(z)|,$$

$$M = M(F;\Gamma) = \max_{z\in\Gamma} |F(z)|,$$

где F – полином или рациональная функция в зависимости от контекста. Под степенью рациональной функции будем понимать число прообразов бесконечности, лежащих на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, с учетом кратности. Ниже

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

– функция Жуковского. Регулярная ветвь функции

$$\widetilde{\Phi}(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1},$$

обратной к функции Жуковского, определяется во внешности дуги окружности, соединяющей точки ± 1 и проходящей через точку $i\operatorname{tg}(\alpha/2)$, условием $\widetilde{\Phi}(\infty) = \infty$, а функция

$$\Phi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

определена во внешности отрезка $[-1, 1]$ условием $\Phi(\infty) = \infty$. Наконец,

$$\delta(\xi) = \frac{2}{1 - \cos\alpha}\Psi(\xi) - \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

§1. Неравенства для рациональных функций

Теорема 1. *Пусть R – несократимая рациональная функция вида (2) и пусть $h(z) = R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$, $M = M(h, \Gamma)$, $m = m(h, \Gamma)$. Тогда для любой точки z выполняется неравенство*

$$\left|2h(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(h(z) - M^2)(h(z) - m^2)}\right| \leqslant (M^2 - m^2)\exp((n-k-p)_+(g_D(z,0) + g_D(1/\overline{z},0)) + \sum_{j=1}^{p'}(g_D(z,a'_j) + g_D(1/\overline{z},a'_j)))$$

(при любом выборе значения корня), где a'_j – те точки a_j, которые являются полюсами функции h, а p' – их число с учетом их кратности. Равенство в точке $z \neq 0, \infty$ и $z \notin \Gamma$ при некотором значении корня достигается в том и только том случае, когда для функции h выполняется условие $h(D) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ и h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D, где N– степень h.

Доказательство. Области D и $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ имеют классические функции Грина. Функция h мероморфна в D и имеет в области D полюсы в точках a'_j и $1/\overline{a'_j}$, $j = 1 \dots p'$, и полюсы порядка $(n-k-p)_+$ в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Кроме того, при стремлении точки z к множеству Γ все предельные граничные значения функции h лежат на отрезке $[m^2, M^2]$. По теореме 1 работы [13], в точках области D справедливо неравенство

$$g_G(f(z), \infty) \leqslant (n-k-p)_+(g_D(z,0) + g_D(1/\overline{z},0)) + \sum_{j=1}^{p'}(g_D(z,a'_j) + g_D(z,1/\overline{a'_j})),$$

причем равенство в точках $z \neq 0$ и ∞ выполняется тогда и только тогда, когда $G = h(D)$ и функция h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D. В силу симметрии области D относительно окружности $|z| = 1$, имеем

$$g_D(z, \zeta) = g_D(1/\overline{z}, 1/\overline{\zeta}), \quad z, \zeta \in D.$$

Осталось заметить, что

$$g_G(w,\infty)=\log\left|\frac{2w-M^2-m^2}{M^2-m^2}+\sqrt{\left(\frac{2w-M^2-m^2}{M^2-m^2}\right)^2-1}\right|.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Экстремальная рациональная функция определяется с точностью до умножения на целую степень z и на произведение Бляшке с полюсами, не лежащими на Γ.

Теорема 2. *В обозначениях теоремы* 1 *для коэффициентов несократимой рациональной функции* R *вида* (2) *при* $n-k>p$ *справедливо неравенство*

$$\frac{|c_nc_k|}{\prod\limits_{j=1}^{p}|a_j|}\leqslant\frac{1}{4}(M^2-m^2)r^{2(n-k-p)}(D,0)\\
\times\exp\left(\sum_{j=1}^{p'}(g_D(\infty,a'_j)+g_D(\infty,1/\overline{a'_j}))\right).\qquad(3)$$

Равенство в (3) *достигается в том и только в том случае, когда для функции* $h(z)=R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$ $h(D)=\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$ *и* h *осуществляет полное* N*-кратное накрытие области* $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$ *областью* D*, где* N *– степень* h*.*

Доказательство. Из неравенства И. П. Митюка [14] (см. также [11, следствие 1] имеем

$$\frac{|c_nc_k|}{\prod\limits_{j=1}^{p}|a_j|}\leqslant\frac{r^{(n-k-p)}(D,\infty)}{r(G,\infty)}\\
\times\exp\left\{(n-k-p)g_D(0,\infty)+\left(\sum_{j=1}^{p'}(g_D(\infty,a'_j)+g_D(\infty,1/\overline{a'_j}))\right)\right\},$$

причем равенство выполняется только в случае, указанном в формулировке теоремы. Легко видеть, что

$$\log|z|+g_D(z,0)\equiv g_D(z,\infty).$$

Поэтому

$$\log r(D,0) = g_D(0,\infty).$$

Наконец, прямые вычисления дают

$$r(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2], \infty)\frac{1}{\operatorname{cap}([m^2, M^2])} = \frac{4}{M^2 - m^2}.$$

Теорема доказана. □

Обозначим через $\omega(z, E, \Omega)$ гармоническую меру множества $E \subset \partial\Omega$ в точке z относительно области Ω. В случае $\Omega = D$ плотность гармонической меры определяется следующим образом:

$$\varpi(\zeta, e^{ix}) = \frac{\partial}{\partial x}\omega(\zeta, \Gamma \cap \{e^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant x\}, D), \quad \zeta \in D, \quad e^{ix} \in \Gamma.$$

Теорема 3. *В обозначениях теоремы* 1 *для несократимой рациональной функции R вида* (2) *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} |(|R(z)|^2)'_x| \leqslant 2\pi((n-k-p)_+\varpi(\infty, z) \\ + \sum_{j=1}^{p'} \varpi(a'_j, z))\sqrt{(M^2 - |R(z)|^2)(|R(z)|^2 - m^2)}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $z = e^{ix} \in \Gamma$. Равенство в (4) *достигается тогда и только тогда, когда для функции $h(z) = R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$ $h(D) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ и h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D, где N – степень h.*

Доказательство. Функция h, заданная в области D, удовлетворяет условиям, при которых справедливо следствие 2 работы [12], если в качестве G взята область $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\frac{|R'(z)\overline{R(1/\overline{z})}+R(z)\overline{R'(1/\overline{z})}(-1/z^2)|}{\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}}\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{|zR'(z)\overline{R(z)}-\overline{z}\overline{R'(z)}R(z)|}{\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}}\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{2|\Im zR'(z)\overline{R(z)}|}{\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}}\\
&\qquad\qquad\qquad\leqslant(n-k-p)_+\left(\frac{\partial g_D(z,\infty)}{\partial n^{\pm}}+\frac{\partial g_D(z,0)}{\partial n^{\pm}}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{p'}\left(\frac{\partial g_D(z,a'_j)}{\partial n^{\pm}}\frac{\partial g_D(z,1/\overline{a'_j})}{\partial n^{\pm}}\right),
\end{aligned}
$$

где $z\in\Gamma$, а $\frac{\partial}{\partial n^+}$ означает дифференцирование вдоль внешней нормали к Γ, а $\frac{\partial}{\partial n^-}$ – в противоположном направлении. Из того факта, что

$$
\varpi(a,z)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial g_D(z,a)}{\partial n^+}+\frac{\partial g_D(z,a)}{\partial n^-}\right],\quad z\in\operatorname{int}\Gamma,
$$

следует

$$
\begin{aligned}
2|\Im zR'(z)\overline{R(z)}|\leqslant\pi((n-k-p)_+(\varpi(\infty,z)+\varpi(0,z))\\
+\sum_{j=1}^{p'}(\varpi(a'_j,z)+\varpi(1/\overline{a'_j},z)))\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}.
\end{aligned}
$$

Здесь под $\operatorname{int}\Gamma$ понимается множество Γ, из которого исключены концы образующих его дуг. Ввиду симметрии области D,

$$
\varpi(a,z)=\varpi(1/\overline{a},z),\quad a\in\overline{\mathbb{C}}_z\setminus\Gamma,\quad z\in\operatorname{int}\Gamma.
$$

Для завершения доказательства неравенства осталось заметить, что

$$
\left|\Im zR'(z)\overline{R(z)}\right|=\left|\Im\frac{zR'(z)}{R(z)}R(z)\overline{R(z)}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(|R(z)|^2\right)'_x\right|.
$$

Утверждение о случае равенства следует из соответствующего утверждения теоремы 2 работы [12] или следствия 1 работы [13]. Теорема доказана. □

Рассмотрим способ нахождения экстремальной рациональной функции в случае одной дуги $\Gamma = \Gamma_\alpha$. Для этого воспользуемся рассуждениями из работ [9] и [16, сс. 106–107]. Предположим, что $M = 1$ и $m = 0$. Равенства в теоремах 1–3 имеют место тогда и только тогда, когда для функции $h(z) = R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$ $h(D) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ и h осуществляет N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus [0,1]$ областью D, где N – степень h. Построим функцию h в виде суперпозиции элементарных функций

$$u(z) = \Phi\left[i\frac{z-1}{z+1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right], \quad \widetilde{u}(z) = \Phi\left(\delta(z)\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\alpha,$$

осуществляющих соответственно однолистное и двулистное отображения внешности дуги Γ_α на внешность единичного круга. Пусть

$$B(u) = \prod_{\substack{j=1\\ a_j=-1}}^{p} u^2 \prod_{\substack{j=1\\ a_j\neq-1}}^{p} \frac{(1-\overline{u(a_j)}u)(1-\overline{u(1/\overline{a_j})}u)}{(u-u(a_j))(u-u(1/\overline{a_j}))}.$$

Функции $u(z)$ и $\widetilde{u}(z)$ принимают в симметричных относительно единичной окружности точках попарно сопряженные значения. Отсюда и из симметричности точек a_j и $1/\overline{a_j}$ следует вещественность функции $B(u)$. Кроме того, $B(|u|>1) = \{|u|>1\}$.

Рассмотрим функцию

$$\Omega(z) = \widetilde{u}^{(n-p)_+}(z)B[u(z)].$$

Из принципа симметрии следует, что функция $\Psi[\Omega(z)]$ регулярна на всей сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$ за исключением полюсов a_j и $1/\overline{a_j}$, $j = 1\dots p$, и полюсов порядка $(n-p)_+$ в точках 0 и ∞. Следовательно,

$$\Psi[\Omega(z)] = \frac{\widetilde{P}(z)}{z^{(n-p)_+}\prod\limits_{j=1}^{p}(z-a_j)(1-\overline{a_j}z)},$$

где $\widetilde{P}$ – алгебраический полином степени $2p + 2(n-p)_+$. Тогда

$$h(z) = \frac{1}{2}(\Psi[\Omega(z)] + 1).$$

На дуге Γ_α имеем $h(z) \equiv |R(z)|^2$, и нули рациональной функции могут быть найдены из уравнения $\Psi[\Omega(z)] = -1$.

В случае полинома предыдущее рассуждение сводится к рассуждению в [9], в результате чего приходим, с точностью до постоянного множителя, к полиному Виденского

$$P_\alpha(z) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n/2} (z^2 - 2a_k z + 1) & \text{при четных } n, \\ (z-1) \prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2a_k z + 1) & \text{при нечетных } n, \end{cases}$$

где $a_k = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi(2k-1)}{n}$.

Ранее в работе Л. С. Маергойза и Н. Н. Рыбаковой [5] было доказано, что полином P_α наименее отклоняется от нуля на дуге окружности среди полиномов с нулями на этой дуге и старшим коэффициентом, равным 1 (см. также [6]).

Замечание. Экстремальный полином может быть также представлен в виде

$$P_\alpha(z) = 2\varepsilon \sin^n(\alpha/2) \sqrt{z^n} T_n \left(\frac{\sqrt{z} - 1/\sqrt{z}}{2i \sin(\alpha/2)} \right),$$

где $T_n(z)$ – полином Чебышева первого рода степени n, а ε – любое число такое, что $|\varepsilon| = 1$ (см. [7, 9]).

§2. Неравенства для полиномов

Функция

$$z = \varphi(w) = w \frac{1 + w \sin(\alpha/2)}{w + \sin(\alpha/2)}$$

конформно и однолистно отображает область $|w| > 1$ на внешность дуги Γ_α, причем бесконечность переходит в бесконечность [3]. Функция $w = \psi(z)$, обратная к функции $z = \varphi(w)$, имеет представление:

$$\psi(z) = -i \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \widetilde{\Phi} \left(i \frac{z - \cos\alpha}{\sin\alpha} \right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha.$$

С данным полиномом P вида (1) свяжем функцию

$$\rho(z) = \frac{2P(z)\overline{P(1/\overline{z})} - M^2 - m^2}{M^2 - m^2}.$$

На множестве $G = \{w : \ |w| > 1, \ \rho(\varphi(w)) \notin [-1, 1]\}$ определим мероморфную функцию $\zeta = F(w)$, полагая в точках w, в которых $\varphi(w) \neq 0$,

$$F(w) = w \frac{\Phi[\rho(\varphi(w))]}{\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]},$$

Пусть $\mathcal{D}$ – совокупность областей, составляющих множество $G \setminus \{w : \ |F(w)| = 1\}$. В силу принципа максимума модуля для регулярной функции, имеет место неравенство

$$\left|\frac{w}{\Phi[\delta(\varphi(w))]}\right| < 1, \quad |w| > 1.$$

Отсюда, а также из граничных свойств функций $\Phi[\rho(\varphi(w))]$ и $\Phi[\delta(\varphi(w))]$ следует, что при приближении точки w к границе каждой области из $\mathcal{D}$ все предельные значения $|F(w)|$ меньше либо равны единице. Более того, $0 < |F'(\infty)| < \infty$. Повторяя доказательство леммы 2.2 из [15] для функции $1/F(1/w)$, убеждаемся, что для любой области $D \in \mathcal{D}$ либо $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| > 1\} = \varnothing$, либо $F(D) = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$. Во втором случае существует обратная к $F(w)$ функция $w = f(\zeta)$, однолистно отображающая $|\zeta| > 1$ на область D.

Теорема 4. *Пусть P – полином вида* (1) *и $h(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$, тогда любых точек z имеет место неравенство*

$$\left|2h(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(h(z) - M^2)(h(z) - m^2)}\right|$$
$$\leqslant (M^2 - m^2)\frac{\beta_{\lambda,r(z)}}{r(z)}\left|\Phi\left[\frac{2}{1-\cos\alpha}\Psi(z) - \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right]\right|^{n-k}, \qquad (5)$$

Кроме того, при $|\psi(z)| > r_\lambda$ справедливо неравенство

$$\left|2h(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(h(z) - M^2)(h(z) - m^2)}\right|$$
$$\geqslant (M^2 - m^2)\frac{\alpha_{\lambda,r(z)}}{r(z)}\left|\Phi\left[\frac{2}{1-\cos\alpha}\Psi(z) - \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right]\right|^{n-k}, \qquad (6)$$

где

$$\lambda = \frac{4|c_n c_k| \sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2 - m^2}, \qquad r(z) = |\psi(z)|,$$

а $\alpha_{\lambda,r(z)}$ и $\beta_{\lambda,r(z)}$ – корни уравнений

$$\lambda(r(z) + 1)^2 x = r(z)(x + 1)^2 \quad \textit{и} \quad \lambda(r(z) - 1)^2 x = r(z)(x - 1)^2,$$

соответственно, лежащие на интервале $(1, r(z)]$;

$$r_\lambda = 2\lambda^{-1} - 1 + 2\sqrt{\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1)}.$$

Равенства в (5) *и* (6) *при подходящем выборе корня достигаются, например, для полинома P_α.*

Доказательство. Пусть $w = f(\zeta)$ – функция, определенная выше. Непосредственным вычислением получаем

$$\frac{1}{f'(\infty)} = \lim_{w\to\infty}\frac{F(w)}{w} = \frac{4c_n\overline{c_k}\sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2-m^2}.$$

Лемма Шварца дает $\lambda = |f'(\infty)|^{-1} \leqslant 1$ (см. также [9]).

Функция $f_1(\zeta) = f'(\infty)/f(1/\zeta)$ однолистна в круге $|\zeta| < 1$, по модулю меньше λ^{-1} и представляется степенным рядом

$$f_1(\zeta) = \zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \cdots\ .$$

В классе таких функций известны точные оценки

$$\left(\frac{1+|\lambda f_1(\zeta)|}{1+|\zeta|}\right)^2 \leqslant \left|\frac{f_1(\zeta)}{\zeta}\right| \leqslant \left(\frac{1-|\lambda f_1(\zeta)|}{1-|\zeta|}\right)^2, \quad 0<|\zeta|<1. \qquad (7)$$

Равенство слева или справа в (7), хотя бы в одной точке, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{f_1(\zeta)}{(1+e^{i\beta}\lambda f_1(\zeta))^2} \equiv \frac{\zeta}{(1+e^{i\beta}\zeta)^2},$$

где β – вещественное число. (см., например [15, 17]).

Пусть w, $|w| = r$, $\varphi(w) \neq 0$, – точка множества $f(|\zeta| > 1)$. Правое неравенство в (7) дает

$$\frac{(|F(w)|-1)^2}{|F(w)|} \leqslant \lambda\frac{(r-1)^2}{r}.$$

Так как функция $y = (x-1)^2/x$ строго возрастает на промежутке $x > 1$, то существует единственный корень $\beta_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(r-1)^2x = r(x-1)^2$, лежащий в интервале $(1, r]$. Отсюда также следует, что $|F(w)| \leqslant \beta_{\lambda,r}$, то есть

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \leqslant \frac{\beta_{\lambda,r}}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]|. \qquad (8)$$

Если же $w \notin f(|\zeta| > 1)$, то выполняется неравенство $|F(w)| \leqslant 1$, то есть

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \leqslant \frac{1}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]| < \frac{\beta_{\lambda,r}}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]|.$$

Таким образом, (8) выполняется при любом w, $|w| > 1$, $\varphi(w) \neq 0$. Делая замену $\varphi(w) = z$ и используя явное представление функции $\delta(\xi)$, получаем неравенство (5)

Убедимся теперь в справедливости неравенств (6). Пусть w, $|w| = r > r_\lambda$, $\varphi(w) \neq 0$, – точка множества $f(|\zeta| > 1)$. Левое неравенство в (7) и строгое возрастание функции $y = (x+1)^2/x$ на промежутке $x > 1$ дают

$$\frac{(|F(w)|+1)^2}{|F(w)|} \geqslant \lambda\frac{(r+1)^2}{r} > \lambda\frac{(r_\lambda+1)^2}{r_\lambda} = 4.$$

Следовательно, существует единственный корень $\alpha_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(r+1)^2 x = r(x+1)^2$, лежащий в интервале $(1, r]$, и

$$|F(w)| \geqslant \alpha_{\lambda,r}. \tag{9}$$

Отсюда

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \geqslant \frac{\alpha_{\lambda,r}}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]|. \tag{10}$$

Теперь покажем, что любая точка w, $|w| > r_\lambda$, принадлежит образу $f(|\zeta| > 1)$. Предположим противное: пусть имеет место неравенство

$$r_\lambda < r^* = \inf\Big\{r : r > 1,\ \big|F(w)\big| > 1\ \forall w,\ |w| = r\Big\}.$$

На окружности $|w| = r^*$ найдется точка w^*, удовлетворяющая условию

$$|F(w^*)| = 1. \tag{11}$$

С другой стороны, для любой последовательности w_k, $|w_k| > r^*$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к w^*, из (9) получим

$$|F(w_k)| \geqslant \alpha_{\lambda,r^*}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что противоречит (11). Таким образом, (10) имеет место при любом w, $|w| = r > r_\lambda$, $\varphi(w) \neq 0$. Делая замену $\varphi(w) = z$, убеждаемся в справедливости (6) при $r(z) = |w|$.

Утверждение о случае равенства следует из тождества $F(w) \equiv w$ при указанном многочлене. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Для полинома P вида* (1) *имеет место неравенство*

$$|(|P(z)|^2)'_x| \leqslant \frac{\cos(x/2)\sqrt{(M^2-|P(z)|^2)(|P(z)|^2-m^2)}}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(x/2)}}$$

$$\times\left[n-k-\frac{\Lambda(\alpha,z)\cos(\alpha/2)(1-2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{|c_nc_k|/(M^2-m^2)})}{2\cos(x/2)}\right], \tag{12}$$

где $z = e^{ix} \in \Gamma_\alpha$ *и*

$$\Lambda(\alpha, z) = \left|\Phi\left(i\frac{z - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right|.$$

Равенство в (12) *достигается, например, для полинома* P_α.

Доказательство. Пусть $w = f(\zeta)$ – функция, определенная выше. Если точка ζ, $|\zeta| = 1$, является точкой регулярности функции $f(\zeta)$, причем $|f(\zeta)| = 1$, то получаем (см. [15, с. 21])

$$|f'(\zeta)| \geqslant \frac{1}{2\sin^{n-k}(\alpha/2)}\sqrt{\frac{M^2 - m^2}{|c_n c_k|}}. \tag{13}$$

Если точка w, $|w| = 1$, является точкой регулярности функции $|F(w)|$ и одновременно лежит на границе области $D \in \mathcal{D}$ такой, что $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| > 1\} = \varnothing$, то в этой точке выполняется неравенство

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} \leqslant 0.$$

Если $F(D) = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$, то, применяя неравенство (13), получаем в этой точке

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = |f'(\zeta)|^{-1} \leqslant 2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{\frac{|c_n c_k|}{M^2 - m^2}}. \tag{14}$$

Таким образом, неравенство (14) выполняется во всех точках единичной окружности за исключением, может быть, конечного числа таких точек.

Далее, под значениями функции $w = \psi(z)$ в точках дуги Γ_α будем понимать значения, получаемые в результате регулярного продолжения этой функции из области $|z| > 1$. В точках $w \in \psi(\Gamma_\alpha)$, в которых значения функций $\Phi[\rho(\varphi(w))]$, $\Phi[\delta(\varphi(w))]$ определяются указанным образом, имеем

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = 1 + \left|\frac{\partial}{\partial w}\Phi[\rho(\varphi(w))]\right| - \left|\frac{\partial}{\partial w}\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]\right|.$$

Полагая $\varphi(w) = z = e^{ix}$ и учитывая (14), приходим к неравенству

$$|\Phi'[\rho(z)]\rho'(z)\varphi'(\psi(z))| \leqslant (n-k)|\Phi'[\delta(z)]\delta'(z)\varphi'(\psi(z))|$$
$$- \left[1 - 2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{|c_n c_k|/(M^2 - m^2)}\right],$$

тогда

$$\frac{|\rho'(z)|}{\sqrt{1-\rho^2(z)}}| \leqslant (n-k)\frac{\cos(x/2)}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(x/2)}}$$
$$-\frac{1-2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{|c_nc_k|/(M^2-m^2)}}{|\varphi'(\psi(z))|}. \tag{15}$$

Далее,

$$\varphi'(\psi(z)) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1-\widetilde{\Phi}^{-2}\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right],$$

откуда

$$|\varphi'(\psi(z))| = 2\left|\widetilde{\Phi}\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right|^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(x/2)}}{\cos(\alpha/2)}.$$

Для доказательства неравенства (12) остается заметить, что при данном выборе точек w на окружности $|w|=1$ выполняется

$$\left|\widetilde{\Phi}\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right| = \Lambda(\alpha,z),$$

а также, как и при доказательстве теоремы 3, что

$$\begin{aligned}|\rho'(z)| &= |P'(z)\overline{P(1/\overline{z})}+P(z)\overline{P'(1/\overline{z})}(-1/z^2)|\\ &= |zP'(z)\overline{P(z)}-\overline{z}\overline{P'(z)}P(z)| = 2|\Im zP'(z)\overline{P(z)}|\\ &= 2\left|\Im\frac{zP'(z)}{P(z)}P(z)\overline{P(z)}\right| = |(|P(z)|^2)'_x|.\end{aligned}$$

Утверждение о случае равенства следует из тождества $F(w)\equiv w$ при указанном многочлене. Теорема доказана. □

Устремляя α к π при $k=0$, приходим к неравенству, полученному В. Н. Дубининым в работе [18, теорема 2].

Теорема 6. *Для коэффициентов полинома P вида* (1) *при $n-k\geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$\frac{4|c_nc_k|\sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2-m^2}\left(1+\frac{1}{\sin(\alpha/2)}\left|\left(\frac{c_{n-1}}{2c_n}+\frac{\overline{c_{k+1}}}{2\overline{c_k}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(n-k)\cos^2(\alpha/2)\right|\right) \leqslant 1. \tag{16}$$

Равенство в (16) *достигается, например, для полинома P_α.*

Доказательство. В некоторой проколотой окрестности точки $w=0$, следуя работе А. В. Олесова [3], рассмотрим функцию

$$\widetilde{F}(w) := \frac{1}{F(1/w)} \equiv w\frac{\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(1/w))]}{\Phi[\rho(\varphi(1/w))]}$$

и пусть $\Delta(w) = w\widetilde{F}'(w)/\widetilde{F}(w)$. Для этой функции имеем

$$\Delta(w) = 1+\frac{\varphi'(1/w)}{w}\left[\frac{\Phi'[\rho(\xi)]\rho'(\xi)}{\Phi[\rho(\xi)]} - (n-k)\frac{\Phi'[\delta(\xi)]\delta'(\xi)}{\Phi[\delta(\xi)]}\right], \quad \xi = \varphi(1/w).$$

Заметим, что $w\varphi(1/w) \to \varphi'(\infty) = \sin(\alpha/2)$ при $w \to 0$. Поэтому

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Delta(w)-1}{w} = \lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^2}{\sin(\alpha/2)}\left[\frac{\rho'(\xi)}{\sqrt{\rho^2(\xi)-1}} - (n-k)\frac{\delta'(\xi)}{\sqrt{\delta^2(\xi)-1}}\right]$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\frac{(M^2-m^2)\sin(\alpha/2)}{c_n\overline{c_k}\xi^{n-k}}$$

$$\times\left[\frac{2}{M^2-m^2}\left(P'(\xi)\overline{P(1/\overline{\xi})}\xi - \frac{P(\xi)\overline{P'(1/\overline{\xi})}}{\xi}\right)\delta(\xi) - \frac{(n-k)(\xi-1/\xi)\rho(\xi)}{2\sin^2(\alpha/2)}\right]$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{c_n\overline{c_k}\sin(\alpha/2)\xi^{n-k}}$$

$$\times\left[\left((nc_n\xi^n + (n-1)c_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + kc_k\xi^k)\left(\frac{\overline{c_n}}{\xi^n} + \dots + \frac{\overline{c_{k+1}}}{\xi^{k+1}} + \frac{\overline{c_k}}{\xi^k}\right)\right.\right.$$

$$\left.(c_n\xi^n + c_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + c_k\xi^k)\left(\frac{n\overline{c_n}}{\xi^n} + \dots + \frac{(k+1)\overline{c_{k+1}}}{\xi^{k+1}} + \frac{k\overline{c_k}}{\xi^k}\right)\right)$$

$$\times\bigl(\xi - 2\cos^2(\alpha/2)\bigr) - (n-k)(c_n\xi^{n+1} + c_{n-1}\xi^n + \dots + c_k\xi^k)$$

$$\left.\times\left(\frac{\overline{c_n}}{\xi^n} + \dots + \frac{\overline{c_{k+1}}}{\xi^{k+1}} + \frac{\overline{c_k}}{\xi^k}\right)\right]$$

$$= \frac{-c_n\overline{c_{k+1}} - c_{n-1}\overline{c_k} - 2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2)}{c_n\overline{c_k}\sin(\alpha/2)}.$$

С другой стороны, по правилу Лопиталя находим, что

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Delta(w)-1}{w} = \frac{\widetilde{F}''(0)}{2\widetilde{F}'(0)},$$

откуда

$$\widetilde{F}''(0) = 2\widetilde{F}'(0)\frac{-c_n\overline{c_{k+1}} - c_{n-1}\overline{c_k} - 2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2)}{c_n\overline{c_k}\sin(\alpha/2)}.$$

Обозначим через $\widetilde{f}(\zeta)$ функцию, однолистную в единичном круге $|\zeta| < 1$ и являющуюся обратной к $\widetilde{F}(w)$. Для этой функции

$$\widetilde{f}''(0) = -\widetilde{F}''(0)(\widetilde{f}'(0))^3$$

$$2\frac{c_n\overline{c_{k+1}} + c_{n-1}\overline{c_k} + 2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2))c_n\overline{c_k}\sin^{4(n-k)-1}(\alpha/2)}{(M^2-m^2)^2}.$$

Тогда при $\lambda = \dfrac{4|c_nc_k|\sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2-m^2}$ функция $f^*(0) = \widetilde{f}(\zeta)/\widetilde{f}'(0)$ в единичном круге $|\zeta| < 1$ однолистна, по модулю меньше λ^{-1} и представляется степенным рядом

$$f^*(\zeta) = \zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \cdots,$$

где

$$\alpha_2 = 4\frac{(c_n\overline{c_{k+1}} + c_{n-1}\overline{c_k} + 2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2))\sin^{2(n-k)-1}(\alpha/2)}{(M^2-m^2)}.$$

В этом случае согласно [17, с. 94]

$$|\alpha_2| \leqslant 2(1-\lambda). \tag{17}$$

Откуда следует (16). Утверждение о случае равенства следует из тождества $F(w) \equiv w$ при указанном многочлене. Теорема доказана. □

Литература

1. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities.* Springer-Verlag, N. Y., 1995.
2. Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials.* Oxford University Press, Oxford, 2002.
3. А. В. Олесов, *О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов.* — Мат. заметки **76**, No. 3 (2004), 396–408.
4. С. В. Тышкевич, *О чебышёвских полиномах на дугах окружности.* — Мат. заметки **81**, No. 6 (2007), 952–954.
5. Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, *Многочлены Чебышева с нулевым множеством на дуге окружности и смежные вопросы.* Препринт 312М, Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Красноярск (2008), 1-16.
6. Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, *Многочлены Чебышёва с нулевым множеством на дуге окружности.* – Докл. РАН **426**, No. 1 (2009), 26–28.

7. A. L. Lukashov, S. V. Tyshkevich, *Extremal polynomials on arcs of the circle with zeros on these arcs.* — J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci. **44**, No. 3 (2009), 172–179.
8. В. В. Арестов, А. С. Менделев, *О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля.* Докл. РАН **425**, No. 6 (2009), 733–736.
9. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *О полиномах с ограничениями на дугах окружности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 74–83.
10. B. Nagy, V. Totik, *Bernstein's inequality for algebraic polynomials on circular arcs.* — Constr. Appr. **37**, No. 2 (2013), 223–232.
11. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Принцип мажорации для мероморфных функций.* — Мат. сб. **198**, No. 12 (2007), 37–46.
12. С. И. Калмыков, *Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 143–157.
13. В. Н. Дубинин, *О принципах мажорации для мероморфных функций,* — Мат. заметки **84** (2008), 803–808.
14. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1980.
15. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов.* — Алгебра и анализ **13**, No. 5 (2001), 16–43.
16. А. В. Олесов, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, 2006.
17. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций.* Наука, М., 1975.
18. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности.* — Мат. сб. **191**, No. 2 (2000), 51–60.

Kalmykov S. I. On polynomials and rational functions normalized on the circular arcs.

Applications of the geometric theory of functions to some inequalities for algebraic polynomials and rational functions normalized on the circular arcs are considered. In particular, coefficients estimates, covering and distortion theorems are obtained. These theorems supplement recent results of the author and V. N. Dubinin.

Bolyai Institute,
University of Szeged,
Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary
E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 5 сентября 2013 г.