Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

Е. Г. Емельянов

УСЛОВИЯ КАСАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВУХ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

§1. Введение

В работе Дж. Дженкинса [1] доказан общий принцип, устанавливающий связь экстремально-метрической проблемы с задачей об экстремальном разбиении римановой поверхности и роль ассоциированного квадратичного дифференциала в этом вопросе. Этот принцип получил развитие в ряде исследований (см. [2–4] и [5]), что привело к решению многих экстремальных задач (см., например,обзорную статью [6]). При решении этих задач большое внимание уделялось исследованию геометрических свойств траекторий квадратичных дифференциалов.

Настоящая работа посвящена рассмотрению поведения траекторий квадратичного дифференциала (коротко, к.д.) $\Omega\,dz^2$ на римановой сфере $\mathbb{C}$ с помощью "касательного анализа", т.е. путем изучения условий касания траекторий к.д. $\Omega\,dz^2$ с траекториями некоторого другого к.д. $\Omega^*\,dz^2$. Основным инструментом здесь является следующий простой факт (см., например, лемму в [7]): если дуга траектории γ к.д. $\Omega\,dz^2$ и дуга траектории σ к.д. $\Omega^* dz^2$ имеют общие концевые точки, и в области, ограниченной этими дугами, нет особенностей указанных дифференциалов, то на каждой из этих дуг есть точка касания с траекторией другого дифференциала. Мы рассматриваем конкретный случай,

$$\Omega\,dz^2 = \Omega^* R\,dz^2, \quad R = \frac{A(z)}{z-p}. \tag{1}$$

Идея касательного анализа не является новой, она неоднократно использовалась (см., например, [2]). Мы дополняем изучение возможности касания траекторий анализом возможности перегиба траектории одного дифференциала относительно траектории другого, а также

Ключевые слова: квадратичный дифференциал, полюс, траектория, экстремальное разбиение.

некоторыми предельными соображениями. Исследуемые дифференциалы естественным образом связаны с дифференциалом задачи Вуоринена (см. [8]), и доказанные в данной работе теоремы обобщают теоремы в [8].

В дальнейшем $\overline{\mathbb{C}}$ – риманова сфера, Δ – круг $|z| < 1$, C – окружность $|z| < 1$. Если D – двусвязная область, то $M(D)$ – модуль этой области относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты. Если D – четырехугольник с противоположными сторонами на окружности C, то $M(D)$ – модуль этого четырехугольника относительно семейства дуг, соединяющих его стороны на C.

§2. Две задачи об экстремальном разбиении

Мы рассматриваем следующие две задачи об экстремальном разбиении круга Δ в семействах пар неналегающих областей. В формулированных ниже задачах

$$p \in \Delta, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Im} p > 0, \quad 0 < x < 1.$$

Задача 1. Найти области D_1, D_2 в круге Δ, реализующие максимум функционала

$$\mathcal{M}_1 = M(D_1) + \alpha^2 M(D_2), \quad 0 < \alpha,$$

в семействе пар неналегающих двусвязных областей D_1, D_2, где область D_1 отделяет точки $-x, x$ от p, область D_2 отделяет точки $p, -x, x$ от окружности C.

Как известно, области экстремального разбиения в задаче 1 являются кольцевыми областями к.д.

$$\Omega_1\, dz^2 = -\rho \frac{(z-\omega)(1-\overline{\omega}z)}{(z^2-x^2)(1-x^2z^2)(z-p)(1-\overline{p}z)}\, dz^2, \quad \rho > 0, \quad |\omega| \leqslant 1.$$

В дальнейшем в обозначении дифференциала мы будем указывать интересующие нас параметры задачи, от которых он зависит, например, $\Omega(\alpha)\, dz^2$. Это же относится и к областям экстремального разбиения.

Существуют значения $0 < \alpha_- < 1$, $1 < \alpha_+$, такие, что при $\alpha_- < \alpha < 1$ в экстремальном разбиении присутствуют две кольцевые области, а при $\alpha = \alpha_-$ область D_2 вырождается. Тогда область $D_1(\alpha_-)$ – область в круге с наибольшим конформным модулем, отделяющая точку p от $-x, x$. При $\alpha = 1$ точка p не является полюсом к.д. Ω_1 и области $D_1(1)$, $D_2(1)$ объединяются в одну область, которая имеет наибольший конформный модуль среди двусвязных областей в круге, отделяющих точки $-x, x$ от окружности. При $1 < \alpha < \alpha_+$в разбиении снова присутствуют две области, и при $\alpha = \alpha_+$ область D_1 вырождается. Область $D_2(\alpha_+)$ имеет наибольший конформный модуль среди всех областей в круге, отделяющих точки $-x, x, p$ от окружности. Дифференциал $\Omega = \Omega_1(\alpha_-)$ является дифференциалом задачи Вуоринена.

Задача 2. Найти области D_1, D_2 в круге Δ, реализующие максимум суммы

$$\mathcal{M}_2 = M(D_1) + l^2 M(D_2), \quad l > 0,$$

в семействе пар неналегающих областей D_1, D_2, где область D_1 определена в задаче 1, область D_2 – четырехугольник, противоположные стороны которого лежат на окружности C, отделяющий точку p от точек $-x, x$.

При $l_- < l < l_+$, $l_- = 1 - \alpha_-$ экстремальное разбиение состоит из двух областей, при $l = l_-$ четырехугольник вырождается, а область D_1 совпадает с $D_1(\alpha_-)$ задачи 1. Соответственно, ассоциированные с задачами квадратичные дифференциалы при этом также совпадают. При $l = l_+$ вырождается область D_1. Ассоциированным с задачей 2 является к.д.

$$\Omega_2(l)\, dz^2 = \rho \frac{\overline{(uv)}^{1/2}(z-u)(z-v)}{(z^2-x^2)(1-x^2z^2)(z-p)(1-\overline{p}z)}\, dz^2, \;\; \rho > 0, \;\; |u| = |v| = 1,$$

при $l \leqslant 1$, и

$$\Omega_2(l)\, dz^2 = \frac{\rho(z-c)(1-\overline{c}z)}{(z^2-x^2)(1-x^2z^2)(z-p)(1-\overline{p}z)}\, dz^2, \quad |c| < 1, \quad \rho > 0,$$

при $1 < l$.

Как обычно, под гиперболическим эллипсом понимается кривая в единичном круге, определяемая условием:

$$\rho(z, -x) + \rho(z, x) = \mathrm{const},$$

где $\rho(z, \zeta)$ – гиперболическое расстояние. Эта кривая является ортогональной траекторией к.д.

$$\Omega^*\, dz^2 = \frac{dz^2}{(z^2-x^2)(1-x^2z^2)}.$$

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Функционалы $\mathcal{M}_1(p), \mathcal{M}_2(p)$ монотонно возрастают при движении точки p по дуге гиперболического эллипса с фокусами в точках $-x, x$ в направлении к мнимой оси.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

§3. Касание траекторий. Перегибы траекторий

Пусть $z = \gamma(t)$ – траектория к.д. $\Omega_i\, dz^2$, $i = 1, 2$, т.е. $\Omega_i(\gamma')^2 > 0$, $\sigma(t)$ – траектория к.д. $\Omega^*\, dz^2$. Условие касания траекторий γ и σ в точке z вследствие равенств (1) есть: $R_i(z) > 0$. Рассмотрим возможность перегиба траектории γ относительно σ в точке z. Пусть $I(z) = \int^z \sqrt{Q^*}\, du$, $s(t) = I \circ \gamma(t)$. Тогда необходимым условием перегиба является: $(\arg(s'))' = 0$. Не теряя общности, можем выбрать такую параметризацию траектории γ, что $\Omega_i {\gamma'}^2 = 1$. Имеем:

$$\big(\mathrm{Im}\,(\log s(t)')\big)' = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\frac{s''}{s'} = 0,$$

$$\frac{s''}{s'} = \frac{1}{2}\frac{Q'}{Q} \circ \gamma \cdot \gamma\prime + \frac{\gamma''}{\gamma'} = -\frac{1}{2}\frac{R'}{R}\gamma'.$$

Таким образом, условие перегиба есть

$$\mathrm{Im}\,(R'\gamma') = 0. \tag{2}$$

В случае к.д. $\Omega_1\, dz^2$

$$R_1 = (z - \omega)(1 - \overline{\omega} z)/(z - p)(1 - \overline{p} z).$$

Условие $R_1(z) > 0$ при замене $z = \Theta(\zeta) = (\zeta + p)/(1 + \overline{p}\zeta)$ приводит к $(\zeta - c)(1 - \overline{c}\zeta)/\zeta < 0$, где $\omega = \Theta(c)$, откуда следует $\zeta = kc$, $0 < k < 1$. Таким образом, касание траекторий к.д. $\Omega_1\, dz^2$ и $\Omega^* dz^2$ происходит в точках, лежащих на гиперболической прямой между p и ω.

В случае к.д. $\Omega_2\, dz^2$, $l \leqslant 1$,

$$R_2(z) = (\overline{uv})^{1/2}(z - u)(z - v)\big)/\big((z - p)(1 - \overline{p} z).$$

Условие $R_2(z) > 0$ при замене $z = \Theta(\zeta)$ приводит к

$$(\overline{\lambda\mu})^{1/2}(\zeta - \lambda)(\zeta - \mu)/\zeta > 0,$$

где $u = \Theta(\lambda)$, $v = \Theta(\mu)$. Отсюда $\zeta = k(\lambda\mu)^{1/2}$, $k > 0$ или $|\zeta| = 1$, $\mathrm{Re}\,(\zeta(\overline{\lambda\mu}))^{1/2} > \mathrm{Re}\,(\overline{\lambda}\mu)^{1/2}$. Следовательно, в этом случае касание траекторий в круге Δ происходит в точках гиперболической прямой, лежащих в Δ между p и $\Theta(\lambda\mu)^{1/2}$. При $l > 1$ касание происходит также в точках гиперболической прямой, проходящей через p, c на отрезках между точкой p и окружностью C и между точкой c и окружностью C.

В общем случае касание траекторий двух к.д. $QR\,dz^2$ и $Q\,dz^2$ происходит в точках, лежащих на кривой, допускающей естественную параметризацию $R(z(t)) = t$, $t > 0$. Тогда $R'z' = 1$. Из необходимого условия перегиба (2) теперь следует

Предложение 1. *Перегиб траектории γ к.д. $QR\,dz^2$ относительно траектории σ к.д. Qdz^2 возможен только в тех точках кривой $R(z) > 0$, где общая касательная обеих траекторий касается этой кривой.*

§4. Направление критической траектории, выходящей из полюса p

В рассматриваемом случае $R(z) = A(z)/(z-p)$. Пусть γ_p – критическая траектория к.д. $\Omega_i\,dz^2$, выходящая из точки p, $\gamma_p(t) = p+tI+o(t)$, $|I| = 1$, и пусть σ_p – траектория к.д. $\Omega^*\,dz^2$, проходящая через точку p, $\sigma_p(t) = p + tW + o(t)$, $|W| = 1$, где вектор W определяет одно из двух возможных направлений. На кривой $R(z) = t > 0$ имеем:

$$z - p = \frac{A(p)}{t} + o(1/t) \quad \text{при} \quad t \longrightarrow 0,$$

поэтому направление, в котором кривая $R(z) > 0$ выходит из точки p, определяется вектором $J = kA(p)$, $k > 0$. Из условий, определяющих эти направления:

$$Q(p)A(p)I > 0, \quad Q(p)W^2 > 0, \quad J = kA(p)$$

следует, что

$$IJ = W^2. \tag{3}$$

Выберем W так, чтобы было выполнено условие $|\arg I\overline{W}| = |\arg W\overline{J}| < \pi/2$.

Доказательство теоремы 1 будет построено следующим образом. Сперва рассмотрим случай $\alpha < 1$. Мы покажем, что в случае, когда к.д. задач 1 и 2 совпадают, т.е.при $\alpha = \alpha_-$ в задаче 1 и при $l = l_-$ в задаче 2 выполняется условие $\arg J < \arg W < \arg I$, $\mathrm{Im}\,(W) > 0$, что доказывает теорему 1 в этом случае. (Это доказано в [8] несколько отличным способом, но м ы приведем доказательство для полноты изложения.) Затем мы покажем, что совпадение $I = W = J$ невозможно ни в задаче 1 при $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, ни в задаче 2 при $l > 0$. Поскольку к.д. $\Omega_1\, dz^2$, $\Omega_2\, dz^2$ непрерывно зависят от параметров α и l соответственно, то это же условие будет выполняться и при $\alpha < 1$, $l > 0$. В случае $\alpha > 1$ мы покажем, что при $\alpha = \alpha_+$ выполняется условие $\arg I < \arg W < \arg J$, $\mathrm{Im}\,(I) < 0$, $\mathrm{Im}\,(W) < 0$, откуда следует, что такое же условие выполняется и при всех $\alpha > 1$.

§5. Случай единственной области в экстремальном разбиении

В случае $\alpha = \alpha_-$, $l = l_-$ имеем $u = v = \omega$, $|\omega| = 1$, ω – двойной нуль к.д. $\Omega\, dz^2$ (в случае совпадения дифференциалов $\Omega_1 dz^2$ и $\Omega_2 dz^2$ мы будем опускать индексы). Положение точки ω на единичной окружности определяется условиями задачи об экстремальном разбиении однозначно, но достаточно неявно.

Предложение 2. $\arg p \leqslant \arg\omega \leqslant \arctan(|1-p^2|/2\mathrm{Re}\, p)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу 1 при переменном $x, \alpha = \alpha_-(x)$. Нетрудно видеть, что при $x \to 0$ к.д. Ωdz^2 стремится к дифференциалу

$$\frac{1}{4\pi^2}\frac{\overline{p}(z-p/|p|)^2}{(z-p)(1-\overline{p}z)z^2}\, dz^2.$$

Это значит,что при $x \to 0$ $\arg\,(\omega(x)) \to \arg\,(p)$. При $x \to 1$ к.д. $\frac{1}{\rho}\Omega dz^2$ стремится к дифференциалу

$$K\frac{(z-\omega(1))(1-\overline{\omega(1)}z)}{(z^2-1)^2(z-p)(1-\overline{p}z)}\, dz^2.$$

Конформный автоморфизм круга, оставляющий на месте -1, 1 и переводящий точку p в точку p^* на мнимой оси, в силу условий симметрии преобразовывает этот к.д. к виду

$$K\frac{(z-i)(1+iz)}{(z^2-1)^2(z-p^*)(1-\overline{p^*}z)}\, dz^2,$$

поэтому при $x \to 1$

$$\arg\omega(x) \to \arctan\big(|1-p^2|/2\mathrm{Re}\, p\big).$$

Далее мы покажем, что $\omega(x_1) \neq \omega(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Допустим, что $\omega(x_1) = \omega(x_2)$ и исследуем возможность касания траекторий к.д. $\Omega(x_1)\,dz^2, \Omega(x_2)\,dz^2$. Условием касания является

$$\frac{(z^2 - {x_1}^2)(1 - {x_1}^2 z^2))}{(z^2 - {x_2}^2)(1 - {x_2}^2 z^2)} > 0,$$

откуда следует, что точка касания может находиться или на координатных осях, или на единичной окружности. Однако, критические траектории $\gamma_p(x_1)$, $\gamma_p(x_2)$ имеют по предположению общие конечные точки, и поэтому на каждой из них должна быть точка касания. Это противоречие доказывает предложение 2. □

Далее нам потребуется одно свойство траекторий к.д. $\Omega^* dz^2$.

Предложение 3. *Траектория σ к.д. $\Omega^* dz^2$, не лежащая ни на одной из координатных осей, пересекает любую гиперболическую прямую не более, чем в двух точках.*

Доказательство. Пусть $\zeta = \Theta(z)$ – конформный автоморфизм круга, переводящий гиперболическую прямую S в отрезок $(-i, i)$. Тогда в терминах параметра ζ

$$\Omega^*\,dz^2 = K\frac{d\zeta^2}{(\zeta - a)(1 - \overline{a}\zeta)(\zeta - b)(1 - \overline{b}\zeta)} := Q^*\,d\zeta^2,$$
$$a = \Theta(-x), \quad b = \Theta(x), \quad a \neq -b, \quad K > 0.$$

Пусть траектория σ к.д. $Q^*\,d\zeta^2$ касается мнимой оси в точке $\zeta = iy$. Тогда

$$(iy - a)(1 + i\overline{a}y)(iy - b)(1 + i\overline{b}y) < 0.$$

Положим $a = \alpha_1 + i\alpha_2$, $b = \beta_1 + i\beta_2$. Из равенства нулю мнимой части последнего выражения получаем уравнение:

$$y^2 \mathrm{Im}\,(ab) - y(\alpha_1(1 + |b|^2) + \beta_1(1 + |a|^2)) + \mathrm{Im}\,(ab) = 0.$$

Это уравнение имеет не более чем один вещественный корень y, $|y| < 1$. Следовательно, существует не больше двух точек пересечения σ и S. □

§6. Доказательство теоремы 1

(a) Рассмотрим случай $\alpha = \alpha_-$, $l = l_-$.

Допустим,что $\arg I < \arg W < \arg J$. Поскольку

$$\arg \omega < \arg \omega(1) = \arctan(|1 - p^2|/2\mathrm{Re}\,(p)),$$

то траектория σ_p к.д. $\Omega^* \, dz^2$, проходящая через точку p, необходимо пересекает гиперболическую прямую S, проходящую через точки p, ω, вне отрезка $[p, \omega]$. Следовательно, на этом отрезке не существует точек пересечения σ_p, S по предложению 3. Значит, при наших предположениях, σ_p пересекает единичную окружность в точке μ, $0 < \arg(\mu) < \arg(\omega)$. В таком случае траектория γ_p должна пересекать σ_p в точке, лежащей на σ_p между p и μ. Но тогда на σ_p между точкой p и этой точкой пересечения должна быть точка касания с траекторией к.д. $\Omega \, dz^2$, что невозможно, так как все точки касания траеторий дифференциалов $\Omega \, dz^2$, $\Omega^* \, dz^2$ лежат на отрезке S между p и ω. Таким образом,

$$\arg J \leqslant \arg W \leqslant \arg I.$$

(b) Доказательство теоремы 1 в общем случае опирается на тот факт, что совпадение $I = W = J$ в задачах 1 и 2 невозможно.

Рассмотрим сначала случай задачи 1. Пусть

$$\zeta = \Phi(z) = iK(z-p)/(1-\overline{p}z), \quad K = |(1-\overline{p}\omega)(\omega - p)|/((1-p\overline{\omega})(\omega-p)).$$

В терминах параметра ζ

$$\Omega_1 \, dz^2 = -\rho \frac{(\zeta - ic)(1 + ic\zeta)}{(\zeta - a)(1-\overline{a}\zeta)(\zeta - b)(1 - \overline{b}\zeta)\zeta} \, d\zeta^2 := Q_1(\zeta) \, d\zeta^2, \quad 0 < c \leqslant 1,$$

$$a = iK\frac{x+p}{1+px}, \quad b = iK\frac{x-p}{1-px}, \quad |a| > |b|.$$

Теперь I – направление критической траектории, выхоящей из точки $\zeta = 0$, $J = i$. Имеем: $icI/(ab) > 0$. В случае совпадения $I = J$ получаем: $ab < 0$, т.е. $b = -k\overline{a}$, $0 < k < 1$. Мы покажем, что такое соотношение невозможно, или, точнее, что при $b = -k\overline{a}$, $0 < k < 1$ нуль c ассоциированного к.д. не может лежать на мнимой оси. Рассмотрим задачу об экстремальном разбиении круга Δ на двусвязные области $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, где область $\mathcal{D}_1$ отделяет точки a, $-\overline{a}$, от точки 0, а область $\mathcal{D}_2$ отделяет точки a, $-\overline{a}$, 0 от единичной окружности. Области экстремального разбиения доставляют максимум функционалу

$$M(\mathcal{D}_1)+\beta^2 M(\mathcal{D}_2), \quad 0<\beta\leqslant 1.$$

Существует значение β_0, $0<\beta_0<1$, такое, что при $\beta=\beta_0$ область $\mathcal{D}_2$ вырождается. В силу симметрии условий задачи, ассоциированный с ней к.д. $\widehat{\Omega}\,d\zeta^2$ имеет вид:

$$\widehat{\Omega}\,d\zeta^2=-\rho\frac{(\zeta-ic(\beta))(1+ic(\beta)\zeta)}{(\zeta-a)(1-\overline{a}\zeta)(\zeta+\overline{a})(1+a\zeta)\zeta}\,d\zeta^2, \quad \rho>0.$$

При изменении β от 1 до β_0 $c(\beta)$ растет от 0 до 1. Пусть $c(\beta)=c$, где ic – нуль дифференциала $Q_1\,d\zeta^2$. Исследуем возможность касания траекторий дифференциалов $Q_1\,d\zeta^2$, $\widehat{\Omega}(\beta)\,d\zeta^2$. Условием касания является:

$$\frac{(\zeta+k\overline{a})(1+ka\zeta)}{(\zeta+\overline{a})(1+a\zeta)}>0.$$

Отсюда или $|\zeta|=1$ или $\zeta=t\overline{(a)}$, $-k<t<1/|a|$, $-1/|a|<t<-1$. Но критические траектории дифференциалов $Q_1\,d\zeta^2$, $\widehat{\Omega}(\beta)\,d\zeta^2$, выходящие из точки $\zeta=0$, имеют общие конечные точки, поэтому на мнимой оси должна быть точка касания траекторий, что невозможно.

Случай задачи 2. Пусть сперва $l\leqslant 1$. В терминах параметра $\zeta=\Phi(z)=(z-p)/(1-\overline{p}z)\chi$, где χ таково, что для $\lambda=\Phi(u)$, $\mu=\Phi(v)$ имеем $\mu=-\overline{\lambda}$ и

$$\Omega_2\,dz^2=\rho\frac{-i(\zeta-\lambda)(\zeta-\mu)}{(\zeta-a)(1-\overline{a}\zeta)(\zeta-b)(1-\overline{b}\zeta)\zeta}\,d\zeta^2:=Q_2(\zeta)\,d\zeta^2, \quad \rho>0.$$

Тогда $Ii/(ab)>0$, $J=i$. В случае совпадения $I=J$ получаем: $ab<0$, $b=-k\overline{a}$, $0<k<1$. Рассмотрим задачу об экстремальном разбиении круга на двусвязную область $\mathcal{D}_1$ и четырехугольник $\mathcal{D}_2$, где область $\mathcal{D}_1$ отделяет точки $a,-\overline{a}$ от 0, две противоположные стороны четырехугольника лежат на единичной окружности, а две другие отделяют 0 от $a,-\overline{a}$. Пусть области экстремального разбиения реализуют максимум функционала

$$\widehat{D}(l)=M(\mathcal{D}_1)+l^2M(\mathcal{D}_2), \quad 0<l<1.$$

Ассоциированный с этой задачей к.д. имеет вид:

$$\widehat{\Omega}_2(l)\,d\zeta^2 = \rho\frac{i(\zeta-\lambda(l))(\zeta+\overline{\lambda(l)})}{(\zeta-a)(1-\overline{a}\zeta)(\zeta+\overline{a})(1+a\zeta)\zeta}\,d\zeta^2.$$

Существует значение $l=\widehat{l}$, при котором четырехугольник вырождается. При уменьшении l от 1 до $\widehat{l}$ $\arg(\lambda(l))$ возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Положим $\lambda(l)=\lambda$, где λ – нуль дифференциала $Q_2\,d\zeta^2$. Исследуем возможность касания траекторий дифференциалов $Q_2\,d\zeta^2$, $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$. Как и в случае задачи 1, касание траекторий происходит на отрезках прямой $\zeta=t\overline{a}$, $-1/|a|<t<-1$, $-k<t<1/|a|$, или на единичной окружности. Отсюда следует, что траектория γ_0 к.д. $Q_2\,d\zeta^2$ не может пересекать отрезок мнимой оси $[0,i]$, являющийся траекторией к.д. $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$. Мы покажем сначала, что траектория γ_0 должна лежать в левой полуплоскости. Это следует из того , что длина в Q_2-метрике дуги единичной окружности $[-\overline{\lambda},i]$ больше длины в той же метрике дуги $[i,\lambda]$. Действительно, пусть $A(\zeta)=|(\zeta-a)(\zeta+k\overline{a})|$, $B(\zeta)=|(\zeta+\overline{a})(\zeta-ka)|$. Тогда

$$A^2-B^2=-(1-k)(1-k|a^2|)4\mathrm{Re}\,(\zeta)\mathrm{Re}\,(a),$$

откуда следует, что $A>B$ при $\mathrm{Re}\,(\zeta)>0$. Имеем:

$$\int\limits_i^{-\overline{\lambda}}\Big|\sqrt{\widehat{\Omega}_2}\,d\zeta\Big| = \int\limits_i^{-\overline{\lambda}}\sqrt{2\mathrm{Im}\,(\zeta-\lambda)}\frac{1}{A(\zeta)}\Big|\frac{d\zeta}{\zeta}\Big|,$$

и при замене $\zeta=-\overline{z}$

$$\int\limits_i^{-\overline{\lambda}}\Big|\sqrt{\widehat{\Omega}_2}\;d\zeta\Big| = \int\limits_i^{\lambda}\sqrt{2\mathrm{Im}(z+\overline{\lambda})}\;\frac{1}{B(z)}\Big|\frac{dz}{z}\Big| > \int\limits_i^{\lambda}\sqrt{2\mathrm{Im}\,(z-\lambda)}\frac{1}{A(z)}\Big|\frac{dz}{z}\Big|.$$

Мы покажем теперь, что в точках линии касания $\zeta=-t\overline{a}, 0<t<k$ невозможно касание траекторий к.д. $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$ с этой линией, и следовательно невозможен перегиб траектории к.д. $Q_2\,d\zeta^2$ относительно траектории к.д. $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$. Это приводит к противоречию, т.к. вблизи точки $\zeta=-k\overline{a}$ траектории к.д. $Q_2\,d\zeta^2$ касаются траекторий к.д. $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$ снизу, а вблизи точки $\zeta=0$ – сверху. Условие касания траектории $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$ с прямой $\zeta=-t\overline{a}$ есть

$$i\frac{(t\overline{a}+\lambda)(t\overline{a}-\overline{\lambda})}{(t\overline{a}+a)(1+\overline{a}^2t)}>0.$$

Отсюда

$$i\left(\left|\frac{\lambda-a}{\lambda+t\overline{a}}\right|^2(ta\lambda+1)+\left|\frac{\lambda+\overline{a}}{\lambda-ta}\right|^2(ta\overline{\lambda}-1)+2\overline{a}\mathrm{Re}\,\lambda\right)>0. \qquad (4)$$

Положим

$$P(t)=|\lambda+t\overline{a}|^2, \quad Q(t)=|\lambda-ta|^2.$$

Приравнивая к нулю мнимую часть выражения (4), получим

$$\frac{Q(1)}{P(t)}\big(P(t)+1-|a|^2\big)-\frac{P(1)}{Q(t)}\big(Q(t)+1-|a|^2\big)+4\mathrm{Re}\,(a)\mathrm{Re}\,\lambda=0,$$

откуда, после преобразований, $Q(t)Q(1)=P(t)P(1)$. Но

$$Q(t)Q(1)-P(t)P(1)=-4\mathrm{Re}\,(a)\mathrm{Re}\,\lambda((1+|a|^2)(1+t)-4\mathrm{Im}\,(a)\mathrm{Im}\,\lambda)>0.$$

Рассмотрим теперь отображение $w=\int^{\zeta}\sqrt{\widehat{\Omega}_2}\,du$, и пусть Π – образ при этом отображении единичного круга, разрезанного по мнимой оси от $\zeta=0$ до $\zeta=i$ по критической траектории к.д. $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$, соединяющей точки $a,-\overline{a}$, и по мнимой оси от точки $\zeta=-i$ до точки пересечения этой траектории с мнимой осью. Пусть L – образ отрезка $[0,-k\overline{a}]$, Γ – образ критической траектории к.д. $Q_2\,d\zeta^2$, соединяющей точки $a,-k\overline{a}$. Тогда $\mathrm{Im}\,(w)$ строго возрастает при движении точки вдоль Γ от a к $-k\overline{a}$, поскольку на этой траектории не может быть точек касания с траекториями к.д. $\widehat{\Omega}_2\,d\zeta^2$. Из поведения траекторий к.д. $Q_2\,d\zeta^2$ вблизи простого полюса в точке $-k\overline{a}$ теперь ясно, что образ такой траектории в точке, лежащей на L, касается прямой $\mathrm{Im}\,(w)=\mathrm{const}$ снизу. С другой стороны, при движении точки вдоль критической траектории к.д. $Q_2\,d\zeta^2$, выходящей из нуля, от единичной окружности к нулю, $\mathrm{Im}\,(w)$ тоже возрастает по аналогичной причине. Из поведения траекторий вблизи простого полюса в начале координат следует, что образ такой траектории в точке, лежащей на L, должен касаться прямой $\mathrm{Im}\,(w)=\mathrm{const}$ сверху. Однако в таком случае на L должна существовать точка, в которой выполняется необходимое условие перегиба (2), что по доказанному невозможно. Таким образом, теорема 1 доказана для $\alpha<1$, $l_-<l<l_+$. □

Пусть $1<\alpha\leqslant\alpha_+$. Отметим сперва, что $\Omega_1(\alpha_+)\,dz^2$ при $x\to 1$ стремится к дифференциалу

$$\widehat{\Omega_1}\,dz^2=\rho\frac{(z-c(1))(1-\overline{c(1)}z)}{(z-1)^2(z+1)^2(z-p)(1-\overline{p}z)}\,dz^2.$$

Критические траектории этого дифференциала разбивают круг на две полособразные области с вершинами в -1, 1. Высота этих областей должна быть одинаковой, поэтому должны быть равны коэффициенты в разложениях функции $\widehat{\Omega_1}$ в окрестностях двойных полюсов $z=-1$, $z=1$, т.е. $|1+c(1)|^2/4|1+p|^2 = |1-c(1)|^2/4|1-p|^2$. Отсюда следует, что критическая траектория, соединяющая точки $p, c(1)$, лежит на гиперболической прямой, соединяющей эти точки, являющейся траекторией к.д.

$$\Omega^*(1)\,dz^2 = -\frac{dz^2}{(z+1)^2(z-1)^2}.$$

Это означает, что в этом предельном случае имеет место совпадение $I(1) = W(1) = J(1)$. Кроме того, очевидно, что $\mathrm{Im}\,(W(1) < 0$. Покажем теперь, что при $\alpha = \alpha_+(x)$, $0 < x < 1$ выполняется условие

$$\arg\, I(x) < \arg\, W(x) < \arg\, J(x),$$

откуда следует, что то же верно и для всех $1 < \alpha \leqslant \alpha_+$. Допустим,что $\arg\, J < \arg\, W < \arg\, I$. В таком случае траектория σ_p должна пересекать траекторию γ_p между точками p и c. Тогда на отрезке σ_p между p и этой точкой пересечения должна быть точка касания с траекторией дифференциала $\Omega_1\,dz^2$, что невозможно. Этим утверждение теоремы 1 доказано и для случая $1 < \alpha \leqslant \alpha_+$.

§7. Граничные случаи

Из теоремы 1 следует, что наименьшее и наибольшее значения функционалов $\mathcal{M}_k$, $k=1,2$, достигаются только при положении точки p на вещественной (соответственно, мнимой оси) z-плоскости. При этом экстремальные конфигурации симметричны относительно соответствующей оси (см. рис. 1, 2). Отсюда и из единственности экстремальной конфигурации вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p \in \Delta$, $\mathrm{Re}\,p > 0$, $\mathrm{Im}\,p > 0$, $0 < x < 1$ и пусть точка p принадлежит гиперболическому эллипсу*

$$\rho(-x,p) + \rho(x,p) = \log\frac{1+p_0}{1-p_0},$$

где $\rho(u,v)$ – гиперболическое расстояние, p_0 и $p_1 = i\sqrt{\frac{p_0-x^2}{1-p_0^2}}$ – точки пересечения указанной кривой с вещественной и мнимой осью z-плоскости. Пусть $\mathcal{M}_k$, $\kappa = 1,2$, – функционалы, определенные в

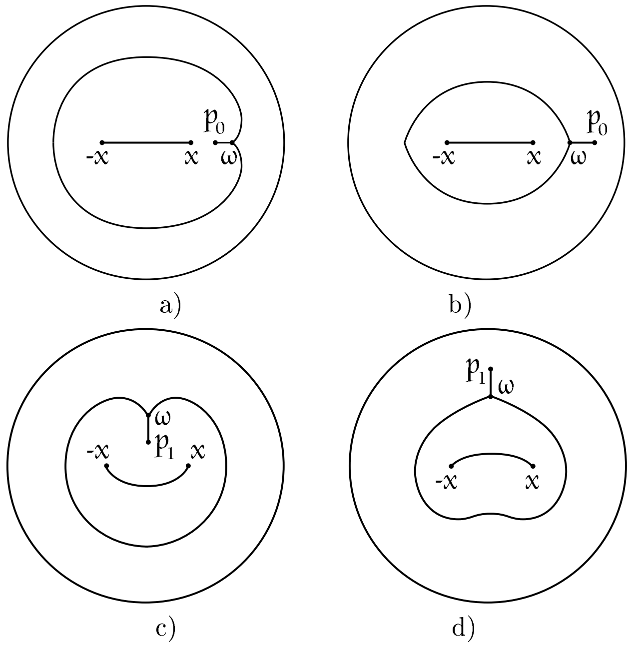

Рис. 1

задачах 1 и 2, $\Omega_1(p,\alpha)\,dz^2$*,* $\Omega_2(p,l)\,dz^2$ *– ассоциированные квадратичные дифференциалы. Тогда имеем неравенства*

$$\mathcal{M}_1(p_0,\alpha) < \mathcal{M}_1(p,\alpha) < \mathcal{M}_1(p_1,\alpha), \quad \mathcal{M}_2(p_0,l) < \mathcal{M}_2(p,l) < \mathcal{M}_2(p_1,l).$$

При этом к.д. $\Omega_1(p_0,\alpha)\,dz^2$*,* $\Omega_1(p_1,\alpha)\,dz^2$ *однозначно определяются следующими условиями:*

$$\int\limits_C \Omega_1^{1/2}(p_0,\alpha)\,dz = \alpha, \quad \int\limits_{p_0}^{c} \Omega_1^{1/2}(p_0,\alpha)\,dz = (1-\alpha)/2,$$

$$\int\limits_C \Omega_1^{1/2}(p_1,\alpha)\,dz = \alpha, \quad \int\limits_{p_1}^{c} \Omega_1(p_1,\alpha)\,dz = (1-\alpha)/2.$$

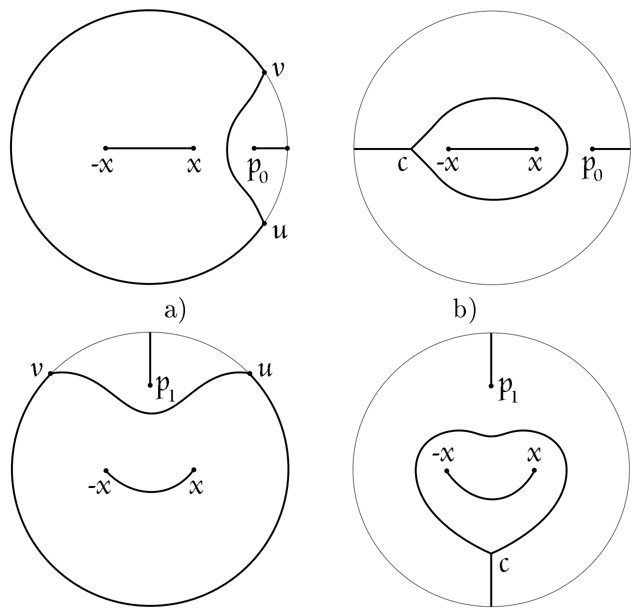

Рис. 2

Квадратичные дифференциалы $\Omega_2(p_0,l)\,dz^2$, $\Omega_2(p_1,l)\,dz^2$ *однозначно определяются условиями: при* $l<1$

$$\int\limits_{-x}^{x}\Omega_2^{1/2}(p_0,l)\,dz=1/2,\quad \int\limits_{p_0}^{1}\Omega_2^{1/2}(p_0,l)\,dz=l/2,$$

$$\int\limits_{\gamma}\Omega_2^{1/2}(p_1,l)\,dz=1-l,\quad \int\limits_{p_1}^{i}\Omega_2^{1/2}(p_1,l)\,dz=l/2,$$

где $\gamma=\{z:z\in C,\arg v<\arg z<2\pi-\arg u\}$, *при* $l>1$

$$\int\limits_{-i}^{c}\Omega_2^{1/2}(p_1,l)\,dz=l-1,\quad \int\limits_{p_1}^{i}\Omega_2^{1/2}(p_1,l)\,dz=l/2.$$

Замечание. Экстремальные значения функционалов $\mathcal{M}_k$, $k = 1, 2$, задач 1 и 2 весьма просто выражаются через Ω_k-длины соответствующих ортогональных траекторий и их дуг ассоциированного квадратичного дифференциала. На этом вопросе мы не останавливаемся.

Литература

1. J. A.Jenkins, *On the existence of certain general extremal mappings. I, II.* — Ann. Math.(2) **66** (1957), 440–453; Tohoku Math.J.(2) **45**, No. 2 (1993), 249–257.
2. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **139** (1980), 1–243.
3. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
4. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 1, 3–86.
5. J. A. Jenkins, *On the mixed problem for extremal decompositions.* — Indiana Math. J. **49** (2000), No. 3, 891–896.
6. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 5, 1–60.
7. U. Pirl, *Uber die geometrical Gestalt eines Extremalkontinuums aus der Theorie der konformen Abbildungen.* — Math. Nachr. **39** (1969), Nos. 4–6, 297–312.
8. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Задача Вуоринена о максимуме конформного модуля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 120–134.

Emel'yanov E. G. The tangent properties of trajectories of certain two quadratic differentials.

The dependence of functional values in some extremal decomposition problem from location of poles of associated quadratic differentials is established. The proof is based on analysis of geometrical properties of trajectories for certain two quadratic differentials.

С.-Петербургский государственный экономический университет Садовая ул., 21
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: emelyanov@rambler.ru

Поступило 30 сентября 2013 г.