Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

Ю. В. Дымченко

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЁМКОСТЬЮ КОНДЕНСАТОРА И МОДУЛЕМ СЕМЕЙСТВА РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной работе доказано существование и единственность экстремальных функций для ёмкости и модуля конденсатора в финслеровом пространстве. Также доказано соотношение между ёмкостью конденсатора и модуля семейства разделяющих поверхностей. Для случая евклидовой метрики соответствующие результаты были доказаны в работе В. А. Шлыка [5]. Данная работа продолжает исследования ёмкости конденсатора и модулей семейств кривых и поверхностей, приведённых в работе [3].

Пусть G – открытое множество в R^n, $(\cdot,\cdot)$ – евклидово скалярное произведение. Пусть $\Phi(x,\xi) : \overline{G}\times R^n \to R^+$ – функция, дважды дифференцируемая по ξ при любом $x \in \overline{G}$, имеющая непрерывные на $\overline{G} \times R^n$ частные производные по ξ до второго порядка включительно и удовлетворяющая условиям:

1) Для любого $a > 0$ выполнено $\Phi(x, a\xi) = a\Phi(x,\xi)$ и $\Phi(x,\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$;
2) Для любых $\xi, \eta \in R^n$ квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g(x,\xi)\eta_i\eta_j$ положительно определена, где

$$g_{ij}(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi^2(x,\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

являются непрерывными функциями по x и по ξ. Функция $\Phi(x,\xi)$ определяет структуру финслерова многообразия [4].

В дальнейшем будут рассматриваться направленные кривые, т.е. кривые, у которых выделены начало и конец.

Ключевые слова: ёмкость коденсатора, модуль семейства кривых, семейство разделяющих поверхностей, финслерово пространство.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00038) ДВО РАН (грант 12-II-CO-01M-002) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.A18.21.0353).

Введём в рассмотрение функцию $H(x,\eta) = \sup\{(\xi,\eta) : \Phi(x,\xi) \leqslant 1\}$. Заметим, что функция H обладает такими же свойствами, как и Φ [8, лемма 3.1.2]. Из этих свойств можно вывести формулу (1.24) из [4]:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi_i}\eta_i \leqslant \Phi(x,\eta) \tag{1}$$

для любых $\xi, \eta \in R^n$, и аналогичное неравенство для функции H. Пусть $\{e_i(x)\}_{i=1}^n$ – произвольный базис в R^n, непрерывно зависящий от x. Определим объём следующим образом [8, глава 2]:

$$d\sigma = d\sigma_\Phi = \frac{|B^n|}{|B_x^n|}dx_1 \dots dx_n.$$

В числителе и знаменателе находятся евклидовы объёмы единичного n-мерного шара B^n и множества

$$B_x^n = \left\{(\xi_1,\dots,\xi_n) \in R^n : \Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i(x)\right) < 1\right\}.$$

Определим длину кривой и расстояние $d(x,y)$ между точками x, y посредством элемента длины $ds_\Phi = \Phi(x,dx)$.

Будем говорить, что кривая γ соединяет множество A с множеством B, если для какого-либо её параметрического представления $x(t)$, $t_0 < t < t_1$, выполняются условия

$$\liminf_{t\to t_0} d(x(t),A) = \liminf_{t\to t_1} d(x(t),B) = 0.$$

Пусть E_0, $E_1 \subset \overline{G}$ – замкнутые непересекающиеся множества. Упорядоченную тройку множеств (E_0, E_1, G) назовём конденсатором.

Пусть $p > 1$, а q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Определим (p,Φ)-ёмкость конденсатора следующим образом:

$$C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G) = \inf \int\limits_G H(x,\nabla u)^p \, d\sigma,$$

где инфимум берётся по всем допустимым функциям u, то есть по функциям, непрерывным и локально липшицевым в G, и таким, что для любых точек $x_0 \in E_0 \cap \overline{G}$, $x_1 \in E_1 \cap \overline{G}$ выполняется

$$\limsup_{G\ni x\to x_0} u(x) \leqslant 0, \quad \liminf_{G\ni x\to x_1} u(x) \geqslant 1.$$

Определим пространство $L_{p,n,\Phi}(G)$ вектор-функций $f : R^n \to R^n$ с нормой

$$\|f\|_{p,n,\Phi} = \left(\int\limits_G H(x,f)^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пространство векторов ξ с нормой $\|\xi\| = H(x,\xi) + H(x,-\xi)$ при фиксированном x в силу строгой выпуклости функции H по второму аргументу и неравенства $|\xi \cdot \eta| \leqslant \Phi(x,\xi)H(x,\eta)$ является полным и равномерно выпуклым. Следовательно, можно доказать (см. [1]), что пространство $L_{p,n,\Phi}(G)$ является полным и равномерно выпуклым.

Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в G. Назовём (p,Φ)-модулем семейства Γ следующую величину:

$$M_{p,\Phi}(\Gamma) = \inf \int\limits_G \rho^p \, d\sigma, \tag{2}$$

где инфимум берется по борелевским неотрицательным функциям ρ таким, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено $\int\limits_\gamma \rho\Phi(x,dx) \geqslant 1$. Функции ρ, удовлетворяющие этому условию, называются допустимыми для модуля.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для (p,Φ)-почти всех кривых, если семейство кривых, для которых оно неверно, имеет (p,Φ)-модуль, равный нулю.

Легко видеть, что инфимум в определении (2) можно брать по борелевским неотрицательным функциям, для которых неравенство

$$\int\limits_\gamma \rho\Phi(x,dx) \geqslant 1$$

выполняется лишь для (p,Φ)-почти всех $\gamma \in \Gamma$. Такие функции назовем почти допустимыми для $M_{p,\Phi}(\Gamma)$.

Функцию ρ назовем экстремальной для $M_{p,\Phi}(\Gamma)$, если она почти допустима и для нее достигается инфимум в (2).

Введём в рассмотрение пространство функций $L^1_{p,\Phi}(G)$, для которых почти всюду в G определён градиент и у которых норма

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{p,n,\Phi} < \infty.$$

Если u_k – фундаментальная последовательность в этом пространстве, то существует функция $f \in L_{p,n,\Phi}(G)$, для которой $\|\nabla u_k - f\| \to 0$ при

$k \to \infty$. Следовательно, для (p,Φ)-почти всех кривых $\gamma \subset G$ имеем:

$$\left| \int\limits_{\gamma} (\nabla u_k - f) \cdot dx \right| \leqslant \int\limits_{\gamma} H(x, \nabla u_k - f)\Phi(x, dx) \to 0 \tag{3}$$

при $k \to \infty$ в силу известных свойств модуля семейства мер (см. [6]). Отсюда, в частности, следует, что $\int\limits_{\gamma} f \cdot dx = 0$ для (p,Φ)-почти всех кривых $\gamma \subset G$. Поэтому в силу результатов п. 4.3 из [7] получим, что для функции f существует первообразная, то есть скалярная функция u такая, что $f = \nabla u$ почти всюду в G. Значит, пространство $L^1_{p,\Phi}(G)$ полно.

Функцию v назовем (p,Φ)-точной, если она является пределом в $L^1_{p,\Phi}(G)$ некоторой последовательности допустимых функций. Функцию h назовем (p,Φ)-пробной, если она является пределом в $L^1_{p,\Phi}(G)$ последовательности функций из $L^1_{p,\Phi}(G)$, локально липшицевых в G и равных нулю в некоторой окрестности $E_0 \cup E_1$. В случае, если не может возникнуть недоразумения, мы будем такие функции называть точными и пробными.

Точная функция u_0 называется экстремальной для емкости, если для нее достигается инфимум в определении емкости.

Определим функцию

$$\zeta(e_1(x)) = \frac{|B^n|}{|B^{n-1}|} \frac{|B_x^{n-1}|}{\Phi(x, e_1)|B_x^n|},$$

где B^{n-1} – $(n-1)$-мерный единичный шар, а B_x^{n-1} определяется аналогично B_x^n по векторам $e_2, \ldots, e_n$. Легко проверить, что эта функция не зависит от $e_2, \ldots, e_n$.

Определим k-мерную поверхность в R^n как образ открытого k-мерного параллелепипеда при непрерывном отображении его в R^n. Будем говорить, что $(n-1)$-мерная поверхность τ отделяет E_0 от E_1 в R^n, если существуют непересекающиеся открытые множества A и B такие, что $A \cup B = R^n \setminus \tau$, $E_0 \subset A$, $E_1 \subset B$. Семейство таких поверхностей обозначим через $\Sigma(R^n)$. Также введём семейство поверхностей $\Sigma(E_0, E_1, G) = \{\tau \cap G : \tau \in \Sigma(R^n)\}$ и назовём их поверхностями, отделяющими E_0 от E_1 в G. Для них определим элемент площади $d\nu = \zeta(n) d\sigma_{\overline{\Phi}}$, где $\overline{\Phi}$ – финслерова метрика, индуцированная метрикой Φ на поверхности, а n – вектор нормали к поверхности, направление которого будет определено далее.

В [8, теорема 3.3.1] доказана следующая

Лемма 1. *Пусть u – кусочно непрерывно дифференцируемая функция такая, что для почти всех t $u^{-1}(t)$ является компактом и f – непрерывная функция в G. Тогда верна формула коплощади*

$$\int_G fH(x,\nabla u)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{u^{-1}(t)} f\,d\nu\right)dt. \tag{4}$$

Заметим, что в [8] рассматривается финслеров градиент, в то время как в данной работе мы используем обычный градиент, и обозначение $H(x,\nabla u)$ соответствует обозначению $F(\nabla\psi)$ в [8].

Пусть дано некоторое семейство Σ $(n-1)$-мерных поверхностей в G. (p,Φ)-Модуль семейства Σ определим аналогично модулю семейства кривых, используя элемент площади $d\nu$. Подобным образом определим понятие почти всех поверхностей, допустимой, почти допустимой и экстремальной функции для модуля семейства поверхностей.

§1. Существование и единственность экстремальных функций для (p,Φ)-емкости и (p,Φ)-модуля.

Теоремы этого и следующего параграфов для случая p-ёмкости и p-модуля были доказаны в [5].

Теорема 1. *Если $C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G)<\infty$, то существует единственная (с точностью до аддитивной постоянной) экстремальная функция u_0 для указанной ёмкости.*

Доказательство. Пусть $u_k, k=1,2,\ldots$ – последовательность допустимых функций такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_G H(x,\nabla u)^p\,d\sigma = C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G)=c^p,\quad c\geqslant 0.$$

Если $c=0$, то очевидно, что $u_k\to 0$ в $L^1_{p,\Phi}(G)$. Поэтому будем считать, что $c>0$. Если последовательность u_k не сходится в $L^1_{p,\Phi}(G)$, то можно указать две подпоследовательности $\{u_{jk}\}$, $j=0,1$ и $\varepsilon>0$ такое, что $\int_G H(x,\nabla u_{jk})^p\,d\sigma=c^p_{jk}$ и

$$\left\|\frac{u_{1k}}{c}-\frac{u_{2k}}{c}\right\|\geqslant 2\varepsilon,\quad k=1,2,\ldots. \tag{5}$$

Здесь и далее в этом доказательстве норма берётся в пространстве $L^1_{p,\Phi}(G)$.
Поскольку $v_k = \frac{1}{2}(u_{1k}+u_{2k})$ – допустимая функция для $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)$, то $\int\limits_G H(x, \nabla v_k)^p \, d\sigma \geqslant c^p$. Ясно, что $\|u_{jk}/c_{jk}\| = 1$ и $c_{jk} \to c$ при $k \to \infty$.

В силу (5), имеем при больших k

$$\left\| \frac{u_{1k}}{c_{1k}} - \frac{u_{2k}}{c_{2k}} \right\| \geqslant \varepsilon.$$

Отсюда в силу равномерной выпуклости пространства $L^1_{p,\Phi}(G)$ имеем

$$\left\| \frac{u_{1k}}{2c_{1k}} + \frac{u_{2k}}{2c_{2k}} \right\| \leqslant 1 - \delta,$$

где $k > k_0$. С другой стороны,

$$1 \leqslant \left\| \frac{v_k}{c} \right\| \leqslant \left\| \frac{u_{1k}}{2c_{1k}} + \frac{u_{2k}}{2c_{2k}} \right\| + o(1),$$

что противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, предел u_k существует. Если v_0 – еще одна экстремальная функция, то заменяя u_{1k} на u_0 и u_{2k} на v_0, установим равенство $\nabla u_0 = \nabla v_0$ для почти всех $x \in G$. Следовательно, $u_0 = v_0 + \mathrm{const}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть Γ – семейство кривых в G. Тогда существует единственная (с точностью до множества лебеговой меры нуль) экстремальная функция для $M_{p,\Phi}(\Gamma)$.*

Доказательство. Если $M_{p,\Phi}(\Gamma) = \infty$, то в качестве экстремальной функции можно взять $\rho \equiv \infty$.

Пусть $M_{p,\Phi}(\Gamma) < \infty$ и ρ_k – последовательность допустимых функций такая, что $\int\limits_G \rho_k^p d\sigma \to M_{p,\Phi}(\Gamma)$ при $k \to \infty$. Рассуждая как в теореме 1, получим, что существует функция $\rho \in L_{p,\Phi}(G)$ такая, что

$$\int\limits_G |\rho_k - \rho|^p d\sigma \to 0, \quad k \to \infty.$$

Отсюда для (p, Φ)-почти всех $\gamma \in \Gamma$ существует подпоследовательность ρ_{k_m} такая, что $\int\limits_\gamma |\rho_{k_m} - \rho| ds_\Phi \to 0$, а это значит, что ρ почти допустима для $M_{p,\Phi}(\Gamma)$ и, очевидно, для нее достигается инфимум в (2).

Если ρ' – еще одна экстремальная функция, то применяя аналогичные рассуждения, получим, что $\int\limits_G |\rho' - \rho|^p \, d\sigma = 0$, т. е. $\rho' = \rho$ почти всюду. Теорема доказана. □

Аналогичное утверждение имеет место и для семейства $(n-1)$-мерных поверхностей в G.

Теорема 3. *Если $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G) > 0$, то существует единственная (с точностью до множества лебеговой меры нуль) экстремальная функция для $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)$ такая, что $\lim\limits_{x \to E_j, x \in \gamma} u(x) = j$, $j = 0, 1$, для (p, Φ)-почти всех кривых γ, соединяющих E_0 и E_1 в G. Кроме того, любая последовательность допустимых функций $u_k(x)$, для которой*

$$\int\limits_G H(x, \nabla u_k)^p \, d\sigma \to C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G), \tag{6}$$

сходится к $u(x)$ при $k \to \infty$ почти всюду в $G \setminus (E_0 \cup E_1)$.

Доказательство. Пусть u_k – любая последовательность допустимых функций, для которой выполняется (6). Используя метод из теоремы 1, получим, что u_k сходится к некоторой функции $u \in L^1_{p,\Phi}(G)$. Это означает, что для почти всех кривых $\gamma \subset G$ (исключая семейство кривых Γ_0 нулевого (p, Φ)-модуля) $\int\limits_\gamma |\nabla u_k - \nabla u| \, ds_\Phi \to 0$ при $k \to \infty$ ([6, теорема 2]). Для семейства Γ_0 существует суммируемая функция ρ такая, что $\int\limits_\gamma \rho \, ds_\Phi = \infty$ для любой $\gamma \in \Gamma_0$. Согласно теореме 4.2.6 из [7], существует множество $E \subset G$ лебеговой меры нуль такое, что любые две точки из $G \setminus E$ можно соединить кривой γ, для которой $\int\limits_\gamma \rho \, ds_\Phi < \infty$.

Пусть дана кривая γ из $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Возьмем точку, лежащую на $\gamma \setminus E$ и предположим, что последовательность $u_k(x_0)$ сходится. Рассмотрим дугу $\gamma' \subset \gamma$, которая соединяет x_0 с E_0. Если $x \in \gamma' \setminus E$, то верно неравенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} \big|\nabla u_k - \nabla u\big| ds_\Phi \leqslant \int\limits_\gamma |\nabla u_k - \nabla u| ds_\Phi,$$

где первый интеграл берется по части кривой γ, соединяющей x_0 с x. Отсюда получим, что

$$u_k(x)-u_k(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\,dx_i \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i=u(x)-u(x_0),$$

$$k\to\infty,\quad x\in\gamma'\setminus E,$$

то есть на $\gamma'\setminus E$ $u_k(x)\rightrightarrows u(x)$.

Из этого соотношения и того факта, что $u_k(x)\to 0$ при $x\to E_0$, $x\in\gamma'$, получим, что $u(x)\to 0$ при $x\to E_0$, $x\in\gamma'$.

Таким образом, мы доказали, что по почти всем кривым $u(x)\to 0$, когда $x\to E_0$, и аналогично $u(x)\to 1$, если $x\in E_1$.

Кроме того, так как любую точку $x\in G\setminus E$ можно соединить с x_0 кривой из $\Gamma\setminus\Gamma_0$, можно заметить, что $u_k(x)\to u(x)$ при $k\to\infty$ на $G\setminus E$.

Далее предположим, что последовательность $u_k(x_0)$ не сходится. Это значит, что существуют две подпоследовательности $u'_k(x_0)\to c'$ и $u''_k(x_0)\to c''$ при $k\to\infty$, и $c'\neq c''$. Рассуждая аналогично, получим функции $u'(x)$ и $u''(x)$ соответственно, которые в $G\setminus E$ будут связаны равенством $u''(x)=u'(x)-c'+c''$. Отсюда для почти всех кривых $\gamma\in\Gamma$ $u''(x)-u'(x)=c''-c'$, $x\in\gamma\setminus E$. Но так как по почти всем кривым $u''(x)-u'(x)\to 0$, если $x\to E_0\cup E_1$, то $c'-c''=0$ и $u'(x)=u''(x)$ почти всюду в G. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Точная функция u является экстремальной функцией для ёмкости конденсатора тогда и только тогда, когда для любой пробной функции w выполнено равенство*

$$\int\limits_G H(x,\nabla u)^{p-1}\sum_{i=1}^{n}H'_i(x,\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,d\sigma=0,$$

где через H'_i обозначена производная функции H по i-й координате второго аргумента.

Доказательство. Для любой пробной функции w функция $u\pm\varepsilon w$ для любого $\varepsilon>0$ является допустимой для ёмкости. Поэтому верно неравенство

$$\int\limits_G H(x,\nabla u\pm\varepsilon\nabla w)^p\,d\sigma\geqslant\int\limits_G H(x,\nabla u)^p\,d\sigma.$$

Используя формулу конечных приращений и (1), получим, что для $0<\varepsilon<1$

$$\begin{aligned}&\frac{|H(x,\nabla u\pm\varepsilon\nabla w)^p-H(x,\nabla u)^p|}{\varepsilon}\\&\qquad\leqslant pH(x,\nabla u\pm\varepsilon_0\nabla w)^{p-1}\left|\sum_{i=1}^n\frac{\partial w}{\partial x_i}H_i'(x,\nabla u\pm\varepsilon\nabla w)\right|\\&\qquad\leqslant pH(x,\nabla u\pm\varepsilon_0\nabla w)^{p-1}H(x,\nabla w)\end{aligned}$$

при некотором $\varepsilon_0\in[0,\varepsilon]$. Отсюда следует, что функция в левой части неравенства ограничена некоторой суммируемой функцией, и поэтому можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_G\frac{H(x,\nabla u\pm\varepsilon\nabla w)^p-H(x,\nabla u)^p}{\varepsilon}\,d\sigma\\&=\int\limits_G\lim_{\varepsilon\to0}\frac{H(x,\nabla u\pm\varepsilon\nabla w)^p-H(x,\nabla u)^p}{\varepsilon}\,d\sigma\\&=\pm p\int\limits_G H(x,\nabla u)^{p-1}\sum_{i=1}^n H_i'(x,\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}\,d\sigma,\end{aligned}$$

что и доказывает необходимость условия теоремы.

Обратно, пусть выполняется равенство, приведенное в формулировке теоремы, и пусть v – любая функция, допустимая для ёмкости. Тогда $w=u-v$ – пробная функция. Подставляя её в указанное равенство, имеем:

$$\begin{aligned}&\int\limits_G H(x,\nabla u)^{p-1}\sum_{i=1}^n H_i'(x,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\sigma\\&\qquad\qquad=\int\limits_G H(x,\nabla u)^{p-1}\sum_{i=1}^n H_i'(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Левая часть по теореме Эйлера об однородных функциях равна $\int\limits_G H(x,\nabla u)^p\,d\sigma$, а правая часть, в силу (1), не больше, чем

$\int\limits_G H(x,\nabla u)^{p-1} H(x,\nabla v)\,d\sigma$. Далее, применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\int\limits_G H(x,\nabla u)^p\,d\sigma \leqslant \int\limits_G H(x,\nabla u)^{p-1} H(x,\nabla v)\,d\sigma$$
$$\leqslant \left(\int\limits_G H(x,\nabla u)^p\,d\sigma\right)^{1/q} \left(\int\limits_G H(x,\nabla v)^p\,d\sigma\right)^{1/p},$$

то есть $\int\limits_G H(x,\nabla u)^p\,d\sigma \leqslant \int\limits_G H(x,\nabla v)^p\,d\sigma$. Отсюда в силу произвольности функции v следует, что u является экстремальной функцией для ёмкости. Теорема доказана. □

§2. Связь между (p,Φ)-емкостью конденсатора и (q,Φ)-модулем семейства разделяющих поверхностей.

Обозначим $E_0 \cup E_1$, $\Sigma(k) = \{\tau \in \Sigma(EG) : d(\tau, E_0) \geqslant \frac{1}{k}, d(E_1,\tau) \geqslant \frac{1}{k}\}$, $k = 1,2,\ldots$. Последовательность конденсаторов $(E_0(k), E_1(k), G(k))$, $k = 1,2,\ldots$, назовём аппроксимирующей для (E_0, E_1, G), если выполняются следующие условия:

(1) $G(k)$ – область, $\partial G(k) \cap E = \varnothing$;

(2) $E_0(k)$, $E_1(k)$ – непересекающиеся компакты, каждый из которых содержится в $G(k)$ и является объединением конечного числа непересекающихся замкнутых областей, $E_j \Subset E_j(k)$, $\partial E_j(k) \cap E = \varnothing$ $j = 0,1$;

(3) $\Sigma(k) \subset \Sigma(E_0(k), E_1(k), G(k))$.

(4) $G(k+1) \subset G(k)$, $E_j(k+1) \Subset E_j(k)$, $j = 0,1$; $E_0(k+1) \cup E_1(k+1) \Subset E_0(k) \cup E_1(k)$.

Пусть u_k равна экстремальной функции для $(E_0(k), E_1(k), G(k))$ при $x \in G(k)$ и $u_k, \nabla u_k = 0$ при $x \notin G(k)$.

Слово в слово повторяя соответствующие доказательства из [5], можно доказать, что $\Sigma(E_0, E_1, G)$ непусто, $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)$ конечно, $M_{q,F}(\Sigma(E_0, E_1, G)) = \lim\limits_{k\to\infty} M_{q,F}(\Sigma(k))$, и что для конденсатора (E_0, E_1, G) существует аппроксимирующая последовательность $(E_0(k), E_1(k), G(k))$ такая, что

$$C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G) \leqslant C_{p,\Phi}(E_0(k), E_1(k), G(k)) \leqslant C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G) + 1/k. \quad (7)$$

Теорема 5. $M_{q,\Phi}(\Sigma(E_0,E_1,G)) \geqslant (C_{p,\Phi}(D))^{-\frac{q}{p}}$.

Доказательство. Пусть $M_{q,F}(\Sigma(E_0,E_1,G)) < \infty$. Зададим функцию f, допустимую для $M_{q,F}(\Sigma(E_0,E_1,G))$. Её можно считать равной нулю при $x \notin G$. Пусть v_k – допустимые функции для $(E_0(k), E_1(k), G(k))$ такие, что

$$\int\limits_{G(k)} H(x,\nabla v_k)^p\, d\sigma = \int\limits_{G} H(x,\nabla v_k)^p\, d\sigma < C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G) + \frac{1}{k}.$$

Заметим, что множество $v_k^{-1}(y) = \{x \in G(k) : v_k(x) = y\}$ для всех $y \in (0,1)$ разбивает область $G(k)$ на два открытых множества $V_0 \supset E_0$, $V_1 \supset E_1$. Тем самым на $(0,1)$, исключая конечное число значений, выполняются соотношения $\omega = \partial G(k) \cup v_k^{-1}(y) \in \Sigma(R^n)$, $\omega \cap G = v_k^{-1}(y) \in \Sigma(E_0,E_1,G)$. Отсюда, применяя неравенство Гельдера и формулу коплощади, имеем:

$$\Bigg(\int\limits_{G(k)} f^q\, d\sigma\Bigg)^{\frac{1}{q}} (C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G) + 1/k)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geqslant \Bigg(\int\limits_{G(k)} f^q\, d\sigma\Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg(\int\limits_{G(k)} H(x,\nabla v_k)^p\, d\sigma\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geqslant \int\limits_{G} f H(x,\nabla v_k)\, d\sigma \geqslant \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{v_k^{-1}(y)} f d\nu\Bigg)\, dy \geqslant 1.$$

Используя произвол в выборе f и устремляя k к бесконечности, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана. □

Пусть $\omega \in \Sigma(R^n)$, $\omega(b) = \{x \in R^n : d(\omega,x) < b\}$, где $0 < b < d(E,x)$, u_0 – экстремальная функция для $C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G)$ и u_0, $\nabla u_0 = 0$ при $x \notin G$.

Лемма 2. *Если* $E \subset G, E \cap \partial G = \varnothing$, *то*

$$\int\limits_{\omega(b)} H(x,\nabla u_0)^{p-1}\, d\sigma \geqslant 2b C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G).$$

Доказательство. Пусть A_j – объединение всех компонент связности α множества $R^n \setminus \omega$, для которых $\alpha \cap E_j \neq \varnothing, j = 0,1$. Ясно, что

$A_0 \cap A_1 = \varnothing$. Положим $F_j = \{x \in R^n : 0 < d(R^n \setminus A_j, x) < b\}$. Тогда $F_j \subset A_j$, $F_0 \cup F_1 \subset \omega(b)$. Далее рассмотрим случай $j = 1$. Пусть

$$h = \begin{cases} u/b - u_0, & x \in G, \\ 0, & x \notin G, \end{cases}$$

где $u = \min(b, d(R^n \setminus A_1, x))$ при $x \in R^n$. В силу леммы 3.2.3 из [8] $H(x, \nabla u) \leqslant 1$ для почти всех $x \in R^n$, $\nabla u = 0$ для почти всех $x \notin F_1$. Отсюда нетрудно заключить, что h – (p, Φ)-пробная функция для $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)$. Подставляя h в равенство теоремы 4, получаем для u_0 следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int\limits_{F_1} H(x, \nabla u_0)^{p-1}\, d\sigma &\geqslant \int\limits_{F_1 \cap G} H(x, \nabla u_0)^{p-1} H(x, \nabla u)\, d\sigma \\ &\geqslant \int\limits_{G} H(x, \nabla u_0)^{p-1} \sum_{i=1}^{n} H_i'(x, \nabla u_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\sigma \\ &= b \int\limits_{G} H(x, \nabla u_0)^{p}\, d\sigma = bC_{p,\Phi}(E_0, E_1, G). \end{aligned}$$

Аналогично установим неравенство

$$\int\limits_{F_0 \cap G} H(x, \nabla u_0)^{p-1}\, d\sigma \geqslant bC_{p,\Phi}(E_0, E_1, G).$$

Объединяя эти два неравенства, получим:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\omega(b)} H(x, \nabla u_0)^{p-1}\, d\sigma &\geqslant \int\limits_{\omega(b) \cap G} H(x, \nabla u_0)^{p-1}\, d\sigma \\ &\geqslant \int\limits_{F_0 \cap G} + \int\limits_{F_1 \cap G} \geqslant 2bC_{p,\Phi}(E_0, E_1, G), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Лемма 3. *Пусть $V \subset R^n$ —область такая, что $E \subset V$, $\partial V \cap E = \varnothing$, v – экстремальная функция для $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, V)$, $\nabla v = 0$ при $x \notin V$. Если $V \subset G$ с некоторой окрестностью, $V \cap E = G \cap E$, $\nu(\partial V) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует r_0, зависящее только от ε и области*

V такое, что

$$\int\limits_{\omega} f_r\, d\nu \geqslant (1-\varepsilon) C_{p,\Phi}(E_0, E_1, V)$$

для (q,Φ)-почти всех $\omega \in \Sigma(E_0, E_1, G)$, где

$$f_r = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} H(x, \nabla v)^{p-1}\, dx$$

(здесь интеграл берётся по мере Лебега) и $r < \min(d(\omega, E), r_0)$.

Доказательство. Пусть $\nu(\omega) < \infty$. Возьмем $b > 0$, $r > 0$ такие, что $b + r < d(\omega, E)$. Если через ω_y обозначить сдвиг поверхности ω на вектор y, то при $r < r_0$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\omega(b)} f_r d\sigma &= |B(0,r)|^{-1} \int\limits_{B(0,r)} \int\limits_{\omega(b)} H(x+y, \nabla v(x+y))^{p-1}\, d\sigma(x)\, dy \\ &= \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \int\limits_{\omega_y(b)} H(x, \nabla v(x))^{p-1} \frac{d\sigma(x-y)}{d\sigma(x)}\, d\sigma(x)\, dy \\ &\geqslant 2b(1-\varepsilon) C_{p,\Phi}(E_0, E_1, V), \end{aligned} \tag{8}$$

так как ω_y удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Здесь r_0 возьмем таким, что $\frac{d\sigma(x-y)}{d\sigma(x)} > 1 - \varepsilon$ при $x \in V$, $|y| < r_0$.

Введем функцию $\delta(x) = d(\omega, x)$. Имеем $H(x, \nabla\delta) = 1$ и по формуле коплощади

$$\int\limits_{\omega(b)} f_r d\sigma = \int\limits_0^b ds \int\limits_{\delta^{-1}(s)} f_r(x) d\nu.$$

Обозначим через $P(s)$ внутренний интеграл справа в предыдущем равенстве. Так как f_r непрерывна и если ω – полиэдральная поверхность (поверхность, составленная из конечного числа частей гиперплоскостей), то

$$\lim_{s\to 0} P(s) = 2 \int\limits_{\omega} f_r d\nu.$$

Отсюда при $b \to 0$ из (8) получаем требуемое неравенство. В случае произвольной поверхности конечной площади требуемое утверждение следует из теоремы 2.4.2 в [9]. $\square$

Лемма 4. $\int\limits_{\omega} H(x,\nabla v)^{p-1}\,d\sigma \geqslant C_{p,\Phi}(E_0,E_1,V)$ *для* (q,Φ)*-почти всех* $\omega \in \Sigma(E_0,E_1,G)$.

Это утверждение вытекает из леммы 3 и того факта, что

$$\left\|f_r - H(x,\nabla v)^{p-1}\right\|_{L_{q,\Phi}(G)} \to 0$$

при $r \to 0$, где $L_{q,\Phi}(G)$ – пространство функций ρ с нормой $|\rho|_{L_{q,\Phi}(G)} = \left(\int\limits_G \rho^q d\sigma\right)^{1/q} < \infty$.

Теорема 6. $M_{q,\Phi}(\Sigma(E_0,E_1,G)) = (C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G))^{-\frac{q}{p}}$.

Доказательство. Пусть конденсатор $(E_0(k),E_1(k),G(k))$ и функции u_k указаны в определении аппроксимирующей последовательности конденсаторов и $\widetilde{E}_j(k)$ – множества, определяемые так же, как и E_j, с условиями $\widetilde{E}_j \subset E_j(k)$ с некоторой окрестностью, $E \cap E_j(k) = E \cap \widetilde{E}_j(k)$, $\widetilde{E}_j(k)$ – замыкание некоторого открытого множества, $\partial\widetilde{E}_j(k) \cap E = \varnothing$. Заметим, что в определении емкости достаточно рассмотреть ограниченные допустимые и экстремальные функции (см. [5]). Экстремальная функция ограничена: $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. Аппроксимируем изнутри область $G(s)$ последовательностью областей $G_m(s)$ таких, что $\nu(\partial G_m(s)) < \infty, G_m(s) \cap E = G(s) \cap E, G_m(s) \Subset G_{m+1}(s)$,

$$\partial G_m(s) \cap E = \varnothing, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m(s) = G(s).$$

Пусть $g_{m,s}$ – экстремальная функция для $(E_0(s),E_1(s),G_m(s))$, $0 \leqslant g_{m,s} \leqslant 1$ на $G_m(s)$. Используя равномерную выпуклость пространства $L_{n,p,\Phi}(G_m(s))$, находим, что последовательность $g_{m,s}$ при фиксированном s является фундаментальной, следовательно, сходится к некоторой функции g_s в некотором пространстве $L^1_{p,\Phi}(G_{m_0}(s))$ при $m \to \infty$. При этом

$$\lim_{m\to\infty} C_{p,\Phi}(E_0(s),E_1(s),G_m(s)) = \int\limits_{G(s)} H(x,\nabla g_s)^p\,d\sigma \leqslant C_{p,\Phi}(E_0(s),E_1(s),G(s)),$$

$g_s = j$ на $E_j(s)$. Применяя теорему 4.6 из [2], устанавливаем, что

$$\int\limits_{G(s)} H(x, \nabla g_s)^p \, d\sigma \geqslant C_{p,\Phi}(\widetilde{E}_0(s), \widetilde{E}_1(s), G(s))$$

и существует функция $w_s \in C^\infty(G(s))$, допустимая для $C_{p,\Phi}(\widetilde{E}_0(s), \widetilde{E}_1(s), G(s))$ и удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_{G(s)} H(x, \nabla(w_s - g_s))^p \, d\sigma \leqslant \frac{1}{s},$$

$$\int\limits_{G} H(x, \nabla w_s)^p \, d\sigma \leqslant \int\limits_{G} H(x, \nabla g_s)^p \, d\sigma + \frac{1}{s}.$$

Пусть $w_s{=}0$ вне $G(s)$. Тогда функция w_s допустима для $C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)$ и для нее справедливы оценки

$$\begin{aligned} C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G) &\leqslant \int\limits_{G} H(x, \nabla w_s)^p \, d\sigma \\ &\leqslant \int\limits_{G(s)} H(x, \nabla v_s)^p \, d\sigma + \frac{1}{s} \leqslant C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G) + \frac{2}{s}. \end{aligned}$$

Применяя метод доказательства теоремы 1, получим, что $w_s \to u_0$ в $L^1_{p,\Phi}(G)$. Тогда $g_s \to u_0$ при $s \to \infty$ в $L^1_{\rho,\Phi}(G)$. Поэтому доказанные утверждения приводят к следующим соотношениям:

$$\int\limits_{\omega} H(x, \nabla g_s)^{p-1} \, d\nu \geqslant \lim_{m \to \infty} C_{p,\Phi}(E_0(s), E_1(s), G_m(s)) \geqslant C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G),$$

$$\int\limits_{\omega} H(x, \nabla u_0)^{p-1} \, d\nu \geqslant C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G).$$

для (q, Φ)-почти всех $\omega \in \Sigma(k)$. Поскольку

$$M_{q,\Phi}(\Sigma(E_0, E_1, G)) = \lim_{k \to \infty} M_{q,\Phi}(\Sigma(k)),$$

то получаем, что функция $\frac{H(x,\nabla u_0)^{p-1}}{C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G)}$ почти-допустима для $M_{q,\Phi}(\Sigma(E_0, E_1, G))$ и поэтому

$$M_{q,\Phi}(\Sigma(E_0, E_1, G)) \leqslant \int\limits_{G} \frac{H(\nabla u_0)^{(p-1)q}}{C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)^q} d\sigma = C_{p,\Phi}(E_0, E_1, G)^{-\frac{q}{p}}.$$

Из теоремы 5 и этого неравенства следует утверждение теоремы. □

Следствие 1. *Пусть u – (p,Φ)-точная функция. Тогда u – экстремальная функция для $C_{p,\Phi}(E_0,E_1,G)$ в том и только в том случае, если*

$$\int\limits_{\omega} H(x,\nabla u)^{p-1}\,d\nu \geqslant \int\limits_{G} H(x,\nabla u)^{p}\,d\sigma$$

для (q,Φ)-почти всех $\omega \in \Sigma(E_0,E_1,G)$.

Литература

1. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, В. Задорожный, А. Перов, В. Соболев, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М., 1978.
2. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.* М., 1983.
3. Ю. В. Дымченко, *Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах.* — Мат. заметки **85**, No. 4 (2009), 594–602.
4. Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.* М., 1981.
5. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
6. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **126**, No. 3, (1957), 171–219.
7. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* — GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.
8. Z. Shen, *Lectures on Finsler geometry.* — Series on Multivariate Analysis Series, World Scientific Publishing Company, 2001.
9. W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity.* — Trans. Amer. Math. Soc. **126**, No. 3 (1967), 460–473.

Dymchenko Yu. V. The relation between capacity of condenser and module of the separated surfaces in Finsler spaces.

In this paper, the existence and uniqueness of extremal functions for capacity of condenser and module of the family of curves in Finsler spaces has been proved. Also it is proved the relation between capacity of condenser and module of the separating surfaces in Finsler spaces.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, г. Владивосток, ул. Радио, 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail: dymch@mail.ru

Поступило 20 июня 2013 г.