Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

В. Н. Дубинин

К ТЕОРЕМЕ ДЖЕНКИНСА О ПОКРЫТИИ ОКРУЖНОСТЕЙ ГОЛОМОРФНЫМИ В КРУГЕ ФУНКЦИЯМИ

Введение

Обозначим через S класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$, голоморфных и однолистных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$. В 1953 году Дженкинс [1] поставил и решил задачу о максимуме линейной меры множества значений на окружности $|w| = \rho$, $1/4 < \rho < 1$, не принимаемых функцией $w = f(z)$ класса S в круге U. Эту задачу можно интерпретировать как задачу о минимуме линейной меры пересечения окружности $|w| = \rho$ с образом круга U при отображении функцией класса S, т.е. как задачу о покрытии окружностей (см. §2, п.2 Добавления в [2]). Функция, реализующая минимум в задаче Дженкинса, отображает круг U конформно и однолистно на всю w-плоскость, из которой удалена дуга окружности $|w| = \rho$, симметрично расположенная относительно вещественной оси и пересекающая ее отрицательную часть, и луч $-\infty < w < -\rho$. Результат Дженкинса [1] вытекает из свойств круговой симметризации [3], применения которой в геометрической теории функций в то время только начинали зарождаться. Поэтому не удивительно, что вскоре после статьи [1] появились обобщения и уточнения теоремы Дженкинса на случай других классов однолистных функций (см., например, [4–7]). В несколько более общей ситуации подход Дженкинса [1] был использован в работах [8, 9]. Следуя Дженкинсу, не представляет труда распространить его результат на некоторые классы многолистных функций. Так, упомянутая выше теорема покрытия Дженкинса остается справедливой, если в определении класса S заменить условие однолистности на однолистность в среднем по окружности. Последнее означает, что если функция f отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(f)$, лежащую над w-плоскостью,

Ключевые слова: симметризация, емкость конденсатора, риманова поверхность, p-листная функция, полином Чебышева.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 11-01-00038) и ДВО РАН (проект N 12-I-ОМН-02).

то полная угловая мера открытых дуг, лежащих на $\mathscr{R}(f)$ над любой окружностью $|w| = \rho$, где $\rho > 0$, не превосходит 2π [10, §8.6]. Указания на этот факт, а также на то, как надо развивать метод симметризации применительно к римановым поверхностям, даны в знаменитой книге Дженкинса [10, §8.5 и §8.6]. Для простоты изложения ограничимся далее только p-листными в круге U функциями, т.е. функциями f, которые принимают в U каждое свое значение не более, чем p раз. Наиболее распространенные классы p-листных функций:

S_p – класс функций вида

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots, \tag{1}$$

голоморфных и p-листных в круге U;

D_p – класс функций вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots, \tag{2}$$

голоморфных p-листных и не принимающих значение $w = 0$ в круге U. (Обозначения классов не являются общепринятыми.) Если функция $f \in S_p$, то риманова поверхность функции, обратной $f^{1/p}$ (поверхность $\mathscr{R}(f^{1/p})$), удовлетворяет определению 8.7 из книги [10]. В случае, когда $f \in D_p$, риманова поверхность $\mathscr{R}(f)$ функции, обратной f, принадлежит классу областей из определения 8.5 [10]. Из определения круговой симметризации в [10] и доказательства в [1] нетрудно видеть как теорему Дженкинса [1] можно распространить на случай функций классов S_p и D_p (вместо класса S). Вместе с тем, остается нерешенным вопрос о покрытии окружностей многолистными функциями f с учетом точек ветвления поверхностей $\mathscr{R}(f)$. В работе [11] введены следующие классы функций:

$S_p(\tau)$ – класс мероморфных p-листных в круге U функций вида (1), для которых суммарная кратность полюсов в U не превосходит $p-1$, а расстояние от точки $w = 0$ до ближайшего ненулевого критического значения равно τ, $0 < \tau < \infty$, $p \geqslant 2$ (под критическим значением понимается величина $f(z)$ в точке z, где $f'(z) = 0$);

$D_p(\lambda)$ – класс голоморфных p-листных в круге U функций f вида (2), для которых при любом $\rho \geqslant \lambda$ прообраз окружности f^{-1} $(\{w : |w| = \rho\})$ не содержит замкнутую кривую в круге U, $0 \leqslant \lambda < \infty$.

Заметим, что каждая функция класса S_p принадлежит некоторому классу $S_p(\tau)$ и, кроме того, мы допускаем наличие полюсов. Класс D_p принадлежит классу $D_p(\lambda)$ при любом $\lambda > 0$, $D_p = D_p(0)$ (см. [11]).

В настоящей работе теорема Дженкинса [1] распространяется на функции классов $S_p(\tau)$ и $D_p(\lambda)$ (теоремы 1 и 2 из §3). Экстремальная функция в классе $S_p(\tau)$ отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(\tau/T_p)$ с разрезом вдоль некоторой дуги над окружностью $|w| = \rho$, симметричной относительно вещественной оси, а также вдоль луча над вещественной осью от центра указанной дуги до бесконечности. Здесь $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \dots$ – полином Чебышева первого рода степени p. Аналогично, экстремальная функция в классе $D_p(\lambda)$ отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(\lambda T_p)$ с разрезом вдоль некоторой дуги над $|w| = \rho$, симметричной относительно вещественной оси, а также вдоль луча над вещественной осью от центра этой дуги до бесконечности (см. §2). В отличие от работы [1] мы используем не круговую симметризацию Полиа [3], а круговую симметризацию из статьи [11]. Доказанные в §3 утверждения можно распространить на случай функций, p-листных в среднем по окружности [10, 12].

§1. Симметризация функций и конденсаторов

Нам понадобится принцип симметризации конденсаторов из статьи [11]. В данном параграфе приводятся необходимые определения и основной результат этой статьи. Следуя [11], симметризацию конденсаторов определим через симметризацию функций. Автору известно прямое определение симметризации конденсаторов. Однако доказательство его эквивалентности определению в [11] требует большого объема работы, в то время как определение [11] вполне подходит для наших целей. Всюду ниже под римановой поверхностью будем понимать компактную риманову поверхность с краем. Мы представляем такую поверхность лежащей над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и "склеенной", из плоских областей с естественным определением проекций, локальных параметров и окрестностей для точек на такой поверхности [13]. Нам понадобится описание римановой поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева T_p, $p \geqslant 2$. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_p(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_p(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2 - 1})^p + (z - \sqrt{z^2 - 1})^p), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_z.$$

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышева $z = \cos(k\pi/p)$, $k = 1, \ldots, p-1$, разбивают z–плоскость на p попарно непересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, как $B_1, \ldots B_p$. Полином T_p отображает область B_1 конформно и однолистно на область D_1 – w–плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \ldots B_{p-1}$ отображаются этим полиномом на области $D_2, \ldots D_{p-1}$ – w-плоскости с разрезом вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_p отображается на область D_p – w-плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1, \ldots, p$, следующим образом. Область D_1 склеивается “крест на крест”, с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^-. Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathscr{D}_k$, соответственно, $k = 1, \ldots, p$.

Будем говорить, что множество $\mathscr{B}$ на произвольной римановой поверхности $\mathscr{R}$ *удовлетворяет условию* (A), если ни для какого ρ, $1 < \rho < \infty$, оно не содержит замкнутую жорданову кривую, лежащую над окружностью $\gamma(\rho) := \{w : |w| = \rho\}$ и не покрывающую эту окружность p–кратно. Например, любое множество на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, с проекцией в $|w| > 1$, удовлетворяет условию (A).

Конденсатором на римановой поверхности $\mathscr{R}$ называется упорядоченная пара $\mathscr{C} = (\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1)$ непустых непересекающихся замкнутых множеств $\mathscr{E}_k \subset \overline{\mathscr{R}}$, $k = 0, 1$. Множества $\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1$ называются *пластинами* конденсатора $\mathscr{C}$. *Емкость* конденсатора $\mathscr{C}$ определяется равенством

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} = \inf \int\limits_{\mathscr{R}\setminus(\mathscr{E}_0\cup\mathscr{E}_1)} |\bigtriangledown\mathscr{V}|^2 d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\mathscr{V}$, непрерывным в $\overline{\mathscr{R}}$, липшицевым на любом компактном подмножестве множества $\mathscr{R}\setminus(\mathscr{E}_0 \cup \mathscr{E}_1)$, равным нулю на множестве $\mathscr{E}_0$ и единице на $\mathscr{E}_1$. Известно, что если одна из пластин конденсатора содержит границу $\partial\mathscr{R}$ и если существует потенциальная функция $\mathscr{P}$, т.е. функция, непрерывная в $\overline{\mathscr{R}}$, гармоническая в $\mathscr{R} \setminus (\mathscr{E}_0 \cup \mathscr{E}_1)$ и равная k на $\mathscr{E}_k$, $k = 0, 1$, то

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} = \int\limits_{\mathscr{R}\setminus(\mathscr{E}_0\cup\mathscr{E}_1)} |\nabla \mathscr{P}|^2 d\sigma.$$

Непосредственно из определения емкости конденсатора вытекает свойство монотонности: включения $\mathscr{E}_j^1 \subset \mathscr{E}_j^2$, $j = 0, 1$, влекут неравенство

$$\operatorname{cap}(\mathscr{E}_0^1, \mathscr{E}_1^1) \leqslant \operatorname{cap}(\mathscr{E}_0^2, \mathscr{E}_1^2).$$

Из теоремы 1 работы [11] следует

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более, чем p раз, и пусть $\mathscr{C} = (\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1)$ – конденсатор на поверхности $\mathscr{R}$, имеющий потенциальную функцию $\mathscr{P}(W)$. Предположим, что пластина $\mathscr{E}_0$ содержит границу $\partial\mathscr{R}$, а множество $\mathscr{R} \setminus \mathscr{E}_0$ удовлетворяет условию (A). Тогда*

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} \geqslant \operatorname{cap}\operatorname{Sym}\mathscr{C},$$

где $\operatorname{Sym}\mathscr{C} = (\operatorname{Sym}\mathscr{E}_0, \operatorname{Sym}\mathscr{E}_1)$ *и* $\operatorname{Sym}\mathscr{E}_k = \{W \in \mathscr{R}(T_p) : \operatorname{Sym}\mathscr{P}(W) = k\}$, $k = 0, 1$.

Ниже дается определение симметризованной функции $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ по заданной функции $\mathscr{V}$ в несколько этапов. Напомним сначала определения круговой симметризации множеств и функций, заданных в круге $\overline{U}$ (см., например, [12,14]). Пусть B – открытое в $\overline{U}$ множество. Круговая симметризация относительно вещественной положительной полуоси сопоставляет множеству B кругосимметричное множество B^*, определенное следующим образом. Если при данном $\rho, 0 \leqslant \rho \leqslant 1$, окружность $\gamma(\rho)$ не пересекается с множеством B, то она не пересекается и с множеством B^*. Если $\gamma(\rho) \subset B$, то $\gamma(\rho) \subset B^*$. В остальных случаях множество B^* пересекается с $\gamma(\rho)$ по открытой дуге с центром на вещественной положительной полуоси и линейной меры, равной мере пересечения множества B с $\gamma(\rho)$. Нетрудно увидеть, что множество B^* открыто в $\overline{U}$. Рассмотрим вещественнозначную функцию v, непрерывную в $\overline{U}$ и открытые в $\overline{U}$ множества $B_a = \{w \in \overline{U} : v(w) > a\}$, $-\infty < a < +\infty$. Результатом круговой симметризации (относительно вещественной положительной полуоси) функции v называют функцию v^*:

$$v^*(w) = \sup\{a : w \in B_a^*\}, \quad w \in \overline{U}.$$

Пусть $\mathscr{R}$ – риманова поверхность, лежащая над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и покрывающая каждую точку w не более, чем p раз и пусть $\mathscr{B}$ – множество на $\mathscr{R}$, открытое относительно $\mathscr{R}_e := \{W \in \mathscr{R} : |\mathrm{pr}W| \geqslant 1\}$ и удовлетворяющее условию (A). Обозначим через $\mathscr{U}$ p-листный круг, лежащий на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ над множеством $|w| > 1$, и пусть $\mathscr{L}$–луч на $\overline{\mathscr{U}}$, который лежит над L^+ и принадлежит области $\mathscr{D}_1$. Круговая симметризация относительно луча $\mathscr{L}$ сопоставляет множеству $\mathscr{B}$ кругосимметричное множество $\mathscr{B}^* \subset \overline{\mathscr{U}}$, определенное следующим образом. Если при данном ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathscr{B}^*$. Если множество $\mathscr{B}$ содержит замкнутую кривую, p-кратно лежащую над $\gamma(\rho)$, то $\mathscr{B}^*$ содержит замкнутую кривую, p-кратно лежащую над $\gamma(\rho)$. В остальных случаях часть множества $\mathscr{B}^*$, лежащая над $\gamma(\rho)$, представляет собой открытую дугу на $\overline{\mathscr{U}}$, симметричную относительно луча $\mathscr{L}$ (с центром на $\mathscr{L}$) и линейной меры, равной суммарной мере всех дуг на $\mathscr{B}$, лежащих над $\gamma(\rho)$. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $\mathscr{V}$ в $\overline{\mathscr{R}}_e$, для которой множества $\mathscr{B}_a(\mathscr{V}) \equiv \mathscr{B}_a := \{W \in \mathscr{R}_e : \mathscr{V}(W) > a\}$, $0 \leqslant a \leqslant +\infty$, удовлетворяют условию (A) и которая в точках границы поверхности $\mathscr{R}$ обращается в нуль. Результатом круговой симметризации (относительно луча $\mathscr{L}$) функции $\mathscr{V}$ назовем функцию $\mathscr{V}^*$:

$$\mathscr{V}^*(W) = \begin{cases} \sup\{a \geqslant 0 : W \in \mathscr{B}_a^*\}, & \text{если } \{a \geqslant 0 : W \in \mathscr{B}_a^*\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad W \in \overline{\mathscr{U}}.$$

Пусть вновь $\mathscr{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более, чем p раз, и пусть $\mathscr{V}$ – неотрицательная непрерывная функция на $\overline{\mathscr{R}}$, для которой множество $\mathscr{B}_0(\mathscr{V})$ удовлетворяет условию (A) и которая в точках границы поверхности $\mathscr{R}$ обращается в нуль. Результатом симметризации функции $\mathscr{V}$ назовем функцию $\mathrm{Sym}\mathscr{V}$, заданную на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, которая в круге $\overline{\mathscr{U}}$ совпадает с функцией $\mathscr{V}^*$:

$$\mathrm{Sym}\mathscr{V}(W) := \mathscr{V}^*(W), \quad W \in \overline{\mathscr{U}}. \tag{3}$$

В остальных точках поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ функция $\mathrm{Sym}\mathscr{V}$ определяется следующим образом. Пусть w – произвольная фиксированная точка круга $\overline{U}$. Значения функции $\mathscr{V}$ в точках W с проекцией $\mathrm{pr}W = w$ обозначим как

$$v_1(w) \geqslant v_2(w) \geqslant \ldots \geqslant v_p(w), \quad w \in \overline{U}. \tag{4}$$

Если для данной точки w не существует точки $W \in \mathscr{R}$ с $\mathrm{pr}W = w$ либо если указанных выше значений (с учетом кратности) меньше, чем p, то соответствующие значения $v_k(w)$ полагаем равными нулю. Поступая так в каждой точке $w \in \overline{U}$, определим в $\overline{U}$ p непрерывных функций $v_k(w)$, $k = 1, \dots, p$. Для каждой пары функций (v_k, v_l), $1 \leqslant k < l \leqslant p$, определим F-преобразование, которое сопоставляет этой паре пару других функций (v_k', v_l'):

$$v_k'(w) = (\max(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, \quad w \in \overline{U},$$
$$v_l'(w) = (\min(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, \quad w \in \overline{U},$$

где $*$ означает круговую симметризацию относительно вещественной положительной полуоси. Проведем F-преобразование над парой (v_1, v_2), затем над парой (v_1', v_3), $((v_1')', v_4)$ и т.д. В результате получим совокупность функций

$$(\dots((v_1')')'\dots)', v_2', v_3', \dots, v_p',$$

которую переименуем вновь соответственно как

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_p,$$

считая при этом

$$M(v_1) \geqslant m(v_1) \geqslant M(v_2) \geqslant M(v_3) \geqslant \dots \geqslant M(v_p).$$

Здесь

$$M(v) = \max\{v(w) : |w| = 1\}, \quad m(v) = \min\{v(w) : |w| = 1\}.$$

Далее повторим предыдущую процедуру с набором функций $v_2, \dots, v_p$, затем с $v_3, \dots, v_p$, пока, наконец, не получим совокупность функций $v_1, v_2, \dots, v_p$, удовлетворяющих неравенствам

$$M(v_k) \geqslant m(v_k) \geqslant M(v_{k+1}) \geqslant m(v_{k+1}), \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Перераспределяя значения функций $v_k(w)$ в каждой точке внутри круга U, можно считать, что выполняются неравенства (4) и $v_k = v_k^*$, $k = 1, \dots, p$. Доопределим теперь функцию $\mathrm{Sym}\mathscr{V}$ в точках поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, лежащих над кругом $\overline{U}$, по правилу

$$\mathrm{Sym}\mathscr{V}(W) := v_k((-1)^{k+1}\mathrm{pr}W), \quad W \in \overline{\mathscr{D}_k}, \quad |\mathrm{pr}W| \leqslant 1, \quad k = 1, \dots, p. \tag{5}$$

Над окружностью $|w| = 1$ функция $\mathrm{Sym}\mathscr{V}$ однозначно определялась нами разными способами. Однако оба способа приводят к одним и тем же значениям функции $\mathrm{Sym}\mathscr{V}$ над $|w| = 1$ [11]. Таким образом, функция $\mathrm{Sym}\mathscr{V}$ однозначно определяется соотношениями (3) и (5).

§2. Экстремальные функции

Обозначим через $L_p(s)$, $s > 1$, лемнискату

$$L_p(s) = \{z : |T_p(z)| < s\},$$

и пусть T_p^{-1} означает непрерывную ветвь функции, обратной полиному Чебышева T_p, заданную на луче $[0, +\infty]$, и отображающую этот луч на луч $[\cos(\pi/(2p)), +\infty]$. В плоскости $\mathbb{C}_z$ рассмотрим континуум $E_1^p(s,t)$, $s > 1$, $0 < t < 2\pi p$, состоящий из отрезка

$$[-T_p^{-1}(s), -\cos(\pi/(2p))]$$

и замкнутой дуги $\gamma_p(s,t)$ на $\partial L_p(s)$, симметричной относительно вещественной оси, с центром в точке $-T_p^{-1}(s)$ и такой, что

$$|\Delta_{\gamma_p(s,t)} \arg T_p(z)| = t.$$

При фиксированных p, s и $t \to 0$ континуум $E_1^p(s,t)$ стремится к отрезку $[-T_p^{-1}(s),\ -\cos(\pi/(2p))]$, а в случае $t \to 2\pi p$ он превращается в объединение этого отрезка с кривой $\partial L_p(s)$. Положим по определению

$$c_p(s,t) := \mathrm{cap} E_1^p(s,t) = \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E_1^p(s,t), \infty)},$$

где $\mathrm{cap}(\cdot)$ – логафмическая емкость, а $r(\Omega, \infty)$ означает внутренний радиус области Ω относительно бесконечности [14]. Из общих фактов геометрической теории функций следует, что при фиксированном $s > 1$ функция $c_p(s,t)$ является непрерывной и строго возрастающей на промежутке $0 < t < 2\pi p$. Нижняя грань значений $c_p(s,t)$ на этом промежутке равна $4^{-1}[T_p^{-1}(s) - \cos(\pi/(2p))]$, а верхняя грань совпадает с логарифмической емкостью замкнутой лемнискаты $\overline{L_p}(s)$, т.е. равна

$$\mathrm{cap}\overline{L_p}(s) = \Big(\frac{s}{2^{p-1}}\Big)^{1/p}$$

(см. [2, гл. VII, §1]). Фиксируем число τ,

$$\tau > \frac{1}{2}\sin^{2p}\frac{\pi}{4p}, \tag{6}$$

и число ρ, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{\tau}{T_p(\cos\frac{\pi}{2p} + 2(2\tau)^{1/p})} < \rho < \min(1, \tau). \tag{7}$$

Левая часть в (7) строго меньше правой ввиду неравенства (6) и неравенства

$$\tau < T_p(\cos\frac{\pi}{2p} + 2(2\tau)^{1/p}).$$

Последнее неравенство вытекает, например, из принципа мажорации И.П. Митюка [15, теорема 4.2], примененного к функции $f(z;p,\tau)$ из работы [11]. Регулярную функцию в этом принципе можно заменить на мероморфную [16]. Далее, неравенства (7) влекут за собой неравенства

$$4^{-1}[T_p^{-1}(\frac{\tau}{\rho}) - \cos\frac{\pi}{2p}] < \frac{1}{2}(2\tau)^{1/p} < \frac{1}{2}(\frac{2\tau}{\rho})^{1/p},$$

где $\tau/\rho > 1$. Из сказанного выше о функции $c_p(s,t)$ следует существование единственного числа $t = t_p(\tau,\rho)$ такого, что

$$c_p(\tau/\rho, t_p(\tau,\rho)) = \frac{1}{2}(2\tau)^{1/p}. \tag{8}$$

По теореме Римана существует единственная функция

$$\varphi(z) = \varphi_p(z;\tau,\rho),$$

конформно и однолистно отображающая круг U на внешность континуума $E_1^p(\tau/\rho, t_p(\tau,\rho))$ так, что в окрестности начала координат имеет место разложение

$$\varphi(z) = \frac{c_p(\tau/\rho, t_p(\tau,\rho))}{z} + a_0 + a_1 z + \dots .$$

Учитывая равенство (8), заключаем, что суперпозиция

$$f_1(z;p,\tau,\rho) := \frac{\tau}{T_p(\varphi_p(z;\tau,\rho))} = z^p + \dots$$

принадлежит классу $S_p(\tau)$. Функция $f_1(z;p,\tau,\rho)$ является экстремальной в проблеме накрытия окружностей в классе $S_p(\tau)$ (см. теорему 1). Она отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(\tau/T_p)$ с разрезом вдоль жордановой дуги, лежащей над окружностью $\gamma(\rho)$, симметричной относительно вещественной оси и имеющей линейную меру $\rho t_p(\tau,\rho)$, и вдоль луча над вещественной осью от центра указанной дуги до бесконечности.

Рассмотрим теперь континуум $E_2^p(s,t)$, $s > 1$, $0 < t < 2\pi p$, на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}_z$, состоящий из луча $[-\infty, -T_p^{-1}(s)]$ на отрицательной вещественной полуоси и дуги $\gamma_p(s,t)$. При $t \to 0$ континуум $E_2^p(s,t)$

стремится к лучу $[-\infty, -T_p^{-1}(s)]$, а в случае $t \to 2\pi p$ он превращается в объединение этого луча с кривой $\partial L_p(s)$. Положим по определению

$$r_p(t; s, \sigma) := r(\mathbb{C}_z \setminus E_2^p(s,t), \sigma), \ \sigma \geqslant \cos(\pi/(2p)).$$

При фиксированных p, s, σ функция $r_p(t; s, \sigma)$ является непрерывной и строго убывающей на промежутке $0 < t < 2\pi p$. Верхняя грань значений этой функции равна $4[\sigma + T_p^{-1}(s)]$, а нижняя грань совпадает с $r(L_p(s), \sigma)$ при $\sigma < T_p^{-1}(s)$, равна нулю при $\sigma = T^{-1}(s)$ и равна $r(\mathbb{C}_z \backslash ([-\infty, -T_p^{-1}(s)] \bigcup \overline{L}_p(s)), \sigma)$, когда $\sigma > T_p^{-1}(s)$. Всюду ниже

$$t = \alpha_p(u; s, \sigma)$$

будет означать функцию, обратную $u = r_p(t; s, \sigma)$ при заданных значениях параметров p, s и σ $(0 < t < 2\pi p)$. Фиксируем λ, $0 < \lambda < \infty$; ρ, $\lambda < \rho < \infty$; а также t и σ, определенные выше. По теореме Римана, существует единственная функция $\psi(z) = \psi_p(z; \lambda, \rho, t, \sigma)$, конформно и однолистно отображающая круг U на область $\mathbb{C}_z \backslash E_2^p(\rho/\lambda, t)$ так, что $\psi(0) = \sigma$ и $\psi'(0) > 0$. Суперпозиция

$$f_2(z; p, \lambda, \rho, t, \sigma) := \lambda T_p(\psi_p(z; \lambda, \rho, t, \sigma))$$

принадлежит классу $D_p(\lambda)$ и является экстремальной функцией в этом классе в проблеме покрытия окружностей (теорема 2). Она отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(\lambda T_p)$ с разрезом вдоль жордановой дуги, лежащей над окружностью $\gamma(\rho)$, симметричной относительно вещественной оси и имеющую линейную меру ρt, и вдоль луча над вещественной осью от центра указанной дуги до бесконечности.

§3. Теоремы искажения

Пусть f – мероморфная в круге U функция, отображающая этот круг на риманову поверхность обратной функции $\mathscr{R}(f)$, лежащую над w-плоскостью. Обозначим через $m_f(\rho)$ суммарную линейную меру всех дуг на $\mathscr{R}(f)$, лежащих над окружностью $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < \infty$. Другими словами, $m_f(\rho)$ есть линейная мера накрытия поверхностью $\mathscr{R}(f)$ окружности $\gamma(\rho)$ с учетом кратности.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу $S_p(\tau)$ при значении τ, удовлетворяющем неравенству* (6), *и пусть ρ – произвольное вещественное число, для которого выполняются неравенства* (7). *Тогда*

$$m_f(\rho) \geqslant \rho[2\pi p - t_p(\tau, \rho)]. \tag{9}$$

Равенство достигается для функции $f_1(z;p,\tau,\rho)$.

Доказательство. Фиксируем числа τ,ρ, удовлетворяющие неравенствам (6), (7), соответственно, и функцию $f\in S_p(\tau)$. Предположим противное, т.е. пусть

$$m_f(\rho)<\rho[2\pi p-t_p(\tau,\rho)], \tag{10}$$

и рассмотрим конденсатор

$$C(r)=(\{z:|z|=1\},\{z:|z|\leqslant r\}),\quad 0<r<1.$$

Образ этого конденсатора $C_f(r)$ при отображении τ/f, лежащий на поверхности $\mathscr{R}(\tau/f)$, удовлетворяет условиям леммы 1 (см. [11, §2]). Здесь и далее отображение в w-плоскость и на соответствующую риманову поверхность обозначаем одной буквой. Пусть $\mathrm{Sym}\mathscr{E}_0$ – первая пластина конденсатора $\mathrm{Sym}C_f(r)\subset\mathscr{R}(T_p)$, т.е.

$$\mathrm{Sym}\mathscr{E}_0=\{W\in\mathscr{R}(T_p):\mathrm{Sym}\mathscr{P}(W)=0\},$$

где $\mathscr{P}(W)$ – потенциальная функция конденсатора $C_f(r)$. Так как $\rho<\tau$, то над окружностью $\gamma(\tau/\rho)$ функция $\mathrm{Sym}\mathscr{P}(W)$ определяется по формуле

$$\mathrm{Sym}\mathscr{P}(W)=\begin{cases}\sup\{a\geqslant 0:W\in\mathscr{B}_a^*\}, & \text{если } \{a\geqslant 0:W\in\mathscr{B}_a^*\}\neq\emptyset,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\mathscr{B}_a=\{W\in\mathscr{R}_e:\mathscr{P}(W)>a\}$, $\mathscr{B}_a^*$ – результат круговой симметризации множества $\mathscr{B}_a$ относительно луча $\mathscr{L}$ (см. §1). Ввиду условия (10) на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ существует дуга Γ, содержащая дугу $T_p(\gamma_p(\tau/\rho,t_p(\tau,\rho)))$ как собственное подмножество и обладающая тем свойством, что $\Gamma\bigcap\mathscr{B}_a^*=\varnothing$ при любом $a\geqslant 0$. На дуге Γ выполняется равенство $\mathrm{Sym}\mathscr{P}(W)=0$ и, следовательно, $\Gamma\subset\mathrm{Sym}\mathscr{E}_0$. Так как поверхность $\mathscr{R}(\tau/f)$ односвязная и число нулей функции τ/f не превышает $p-1$, то над любой окружностью $\gamma(s)$, $0<s<\tau/\rho$, либо нет точек поверхности $\mathscr{R}(\tau/f)$, либо найдется по крайней мере одна точка множества $\mathscr{R}(\tau/f)$, не принадлежащая множеству $\mathscr{B}_0$, т.е. существует точка, где потенциальная функция $\mathscr{P}(W)$ равна нулю. Простой анализ определения симметризации функции (§1) показывает, что в этом случае функция $\mathrm{Sym}\mathscr{P}(W)=0$ на множестве $T_p([-T_p^{-1}(\tau/\rho),-\cos(\pi/(2p))])$. Поэтому указанное множество принадлежит пластине $\mathrm{Sym}\mathscr{E}_0$. Суммируя выше сказанное, заключаем, что пластина $\mathrm{Sym}\mathscr{E}_0$ содержит образ континуума $E_1^p(\tau/\rho, t_p(\tau,\rho))$ на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ при отображении полиномом T_p как собственное подмножество. Пусть $\widetilde{C}(r)$ – "образ" конденсатора $\mathrm{Sym}\, C_f(r)$ при отображении $\varphi^{-1}\circ T_p^{-1}$, $\varphi(z) = \varphi_p(z;\tau,\rho)$. Первая пластина конденсатора $\widetilde{C}(r)$ совпадает с множеством $E_0 := \varphi^{-1}\circ T_p^{-1}(\mathrm{Sym}\mathscr{E}_o) \neq \partial U$. Что касается второй пластины, то ввиду разложений рассматриваемых функций в окрестностях соответствующих точек она представляет собой "почти круг" с центром в начале радиуса $r(1+o(1))$, $r\to 0$. Из конформной инвариантности емкости, леммы 1 и асимптотической формулы для емкости конденсатора (см. [14, формула (1.6)]) следует

$$-\frac{2\pi}{\log r} = \mathrm{cap}\, C(r) = \mathrm{cap}\, C_f(r) \geqslant \mathrm{cap}\,\mathrm{Sym} C_f(r) = \mathrm{cap}\,\widetilde{C}(r)$$
$$= -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi\left[\log r(U\backslash E_0, 0)\right]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r\to 0.$$

Отсюда

$$r(U\backslash E_0, 0) \geqslant 1,$$

что противоречит включению $U\backslash E_0 \subset U$, $U\backslash E_0 \neq U$. Равенство в (9) для функции $f_1(z;p,\tau,\rho)$ вытекает из ее определения. Теорема доказана. □

Если в неравенствах (7) положить формально $p=1$ и $\tau\to\infty$, то эти неравенства превращаются в неравенства для параметра ρ в теореме Дженкинса [1]: $1/4 < \rho < 1$.

Теорема 2. *Для любой функции $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ класса $D_p(\lambda)$, $0<\lambda<\infty$, и любого ρ, $0<\rho<\infty$, справедливо неравенство*

$$m_f(\rho) \geqslant \rho\left[2\pi p - \alpha_p\left(\frac{|a_1|}{\lambda T_p'(\sigma)}; \frac{\rho}{\lambda}, \sigma\right)\right], \tag{11}$$

где $\sigma = T_p^{-1}(|a_0|/\lambda)$. Равенство в (11) достигается для функций

$$f_2(z;p,\lambda,\rho,t,\sigma)$$

при любых t, $0<t<2\pi p$, и $\sigma \geqslant \cos(\pi/(2p))$.

Доказательство. Можно считать, что $m_f(\rho) \neq 2\pi p\rho$. Фиксируем числа λ,ρ, а также функцию $f\in D_p(\lambda)$, и вновь рассмотрим конденсатор $C(r)$ из доказательства предыдущей теоремы. Образ этого конденсатора $C_f(r)$ при отображении f/λ, лежащий на поверхности

$\mathscr{R}(f/\lambda)$, удовлетворяет условиям леммы 1. По определению симметризации, первая пластина конденсатора $\operatorname{Sym} C_f(r)$ содержит образ континуума $E_2^p(\rho/\lambda, t)$ на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ при отображении T_p, где $t = 2\pi p - m_f(\rho)/\rho$. Обозначим через $\widetilde{C}(r)$ образ конденсатора $\operatorname{Sym} C_f(r)$ при отображении суперпозицией $\psi^{-1} \circ T_p^{-1}$, $\psi(z) = \psi_p(z; \lambda, \rho, t, \sigma)$, $\sigma = T_p^{-1}(|a_0|/\lambda)$. Из геометрического смысла модуля производной следует, что вторая пластина конденсатора $\widetilde{C}(r)$ содержит круг с центром в начале координат радиуса

$$\widetilde{r}(r) = r\frac{|a_1|(1+o(1))}{\lambda T_p'(\sigma)\psi_p'(0)}, \quad r \to 0.$$

Учитывая конформную инвариантность емкости, лемму 1 и монотонность емкости конденсатора, получаем последовательно

$$-\frac{2\pi}{\log r} = \operatorname{cap} C(r) = \operatorname{cap} C_f(r) \geqslant \operatorname{cap} \operatorname{Sym} C_f(r)$$

$$= \operatorname{cap} \widetilde{C}(r) \geqslant -\frac{2\pi}{\log \widetilde{r}(r)}.$$

Отсюда

$$|a_1| \leqslant \lambda T_p'(\sigma)\psi_p'(0) = \lambda T_p'(\sigma) r_p(\rho/\lambda, t, \sigma), \tag{12}$$

что эквивалентно

$$t \leqslant \alpha_p\left(\frac{|a_1|}{\lambda T_p'(\sigma)}; \frac{\rho}{\lambda}, \sigma\right)$$

и неравенство (11) доказано. Равенство в (12) и следовательно, в (11) достигается для функции $f_2(z; p, \lambda, \rho, t, \sigma)$. Теорема доказана. $\square$

Литература

1. J. A. Jenkins, *On values omitted by univalent functions.* — Amer. J. Math. **75** (1953), 406–408.
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М. (1966).
3. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М. (1962).
4. T. Kubo, *Symmetrization and univalent functions in an annulus.* — J. Math. Soc. Japan **6** (1954), 55–67.
5. S. Sato, *Две теоремы об ограниченных функциях.* — Сугаку **7** (1955), 99–101.
6. S. Sato, *О значениях, не принимаемых ограниченными однолистными функциями.* — Кэнкю хококу. Сидзэн Качаку. Liberal Arts J. Natur. Sci. **6** (1955), 1–6.

7. A. W.Goodman and E. Reich, *On regions omitted by univalent functions*. II. — Canad. J. Math. **7** (1955), 83–88.
8. М. И. Ревяков, *О значениях, не принимаемых однолистными функциями.* — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова **94** (1968), 123–129.
9. А. Ю. Солынин, *Некоторые оценки для регулярных функций, выпускающих значения на окружности.* Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1983. Депонировано в ВИНИТИ No. 2016–83, 17 с.
10. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения.* М. (1962).
11. В. Н. Дубинин, *Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям.* — Мат. сб. **203** (2012), 79–94.
12. W. K. Hayman, *Multivalent functions.* Second ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
13. А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций.* М. (1968).
14. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49** (1994), 3–76.
15. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* Кубанский гос. ун-т, Краснодар (1980).
16. В. Н. Дубинин, *О принципах мажорации для мероморфных функций.* — Мат. заметки **84** (2008), 803–808.

Dubinin V. N. On the Jenkins covering circle theorem for holomorphic functions in a disk.

The well-known Jenkins' theorem on values omitted by univalent functions is extended for some meromorphic p-valent functions in the unit disk. The multiplicity of the function covering and the values of the functions in the critical points is taken into account.

Дальневосточный федеральный университет,
ул.Суханова 8, 690950 Владивосток;
Институт прикладной метематики,
ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041 Владивосток, Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 1 июля 2013 г.