Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 418, 2013 г.

М. В. Бабушкин, В. В. Жук

О КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА

Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой; $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве C; $\omega_r(f,h)$ – модуль непрерывности функции f порядка r в пространстве C.

Хорошо известно (см. [1, сс. 272–275], [2, сс. 204–211], [3, сс. 202–205]), что для любой $f \in C^{(k)}$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$E_n(f) \leqslant C(k,r,\gamma)\frac{1}{(n+1)^k}\omega_r\left(f^{(k)}, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right), \tag{1}$$

где постоянная $C(k,r,\gamma)$ зависит только от выписанных аргументов.

Неравенства типа (1) играют важную роль в теории аппроксимации и их изучению (в различных направлениях) посвящено большое количество работ многих авторов.

Утверждения аналогичные соотношению (1) принято называть прямыми теоремами теории аппроксимации или обобщёнными неравенствами типа Джексона.

В статье устанавливается ряд утверждений, содержащих модификации неравенства (1). При этом особое внимание уделяется постоянным, которые входят в эти неравенства.

§1. Обозначения. Вспомогательные предложения

1.1. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел. Запись $k = \overline{a,b}$, где $a, b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. Все функции предполагаются вещественными. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0, символ $(+\infty)\cdot 0$ понимается как

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, обобщенная теорема Джексона.

$+\infty$, отношение $\frac{\infty}{\infty}$ считается равным 1; сумма $\sum\limits_a^b$ при $b < a$ считается равной 0. Через H_n обозначаем множество тригонометрических полиномов порядка не выше n; $H = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$. При $1 \leqslant p < \infty$ через L_p обозначаем пространство измеримых 2π-периодических функций f, у которых $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < \infty$; $L_\infty = C$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\|_\infty = \|f\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Пусть в пространстве C введена полунорма P. Будем говорить, что P принадлежит классу A, если выполнены условия:

(1) существует такая постоянная M, не зависящая от f, что $P(f) \leqslant M \|f\|$ для любой $f \in C$;
(2) полунорма P инвариантна относительно сдвига, т. е. для любой $f \in C$ и любого $h \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $P(f(\cdot + h)) = P(f)$.

Пространство C, в котором введена полунорма P, принадлежащая классу A, будем называть пространством CP.

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

– коэффициенты Фурье функции f; при $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(f, x) = a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx; \quad A_0(f, x) = \frac{a_0(f)}{2}.$$

Для $f \in L_1$ полагаем $\rho_k(f) = \sqrt{a_k(f)^2 + b_k(f)^2}$,

$$B_{k,\alpha} = \begin{cases} A_k(f, x), & \text{если } \alpha/2 \in \mathbb{Z}, \\ b_k(f) \cos kx - a_k(f) \sin kx, & \text{если } (\alpha + 1)/2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1$. Через $S_n(f)$, $\sigma_n(f)$, $R_{n,r}(f)$ обозначаем соответственно суммы Фурье, Фейера, Рисса функции f:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x), \quad \sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x),$$

$$R_{n,r}(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right) A_k(f,x).$$

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – числовая последовательность. Тогда

$$\Delta\mu_k = \mu_{k+1} - \mu_k, \quad \Delta^2\mu_k = \mu_{k+2} - 2\mu_{k+1} + \mu_k.$$

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда через $\delta_t^r(f)$ обозначаем конечную симметричную разность r-го порядка функции f с шагом t:

$$\delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{(r-2k)t}{2}\right).$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$. Через $\omega_r(f)_p$ обозначаем модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве L_p: $\omega_r(f,h)_p = \sup\limits_{|t|\leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|_p$.

Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$, то $E_n(f)_p$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве L_p: $E_n(f)_p = \inf\limits_{T \in H_n} \|f - T\|_p$.

Пусть $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $E_n(f) = \inf\limits_{T \in H_n} P\,(f - T)$ – наилучшее приближение порядка n функции f в пространстве CP.

Полагаем

$$\Omega_{r,n}(f,h)_p = \sup_{|t|\leqslant h} E_n(\delta_t^r(f))_p, \quad \Omega_{r,n}(f,h) = \sup_{|t|\leqslant h} E_n(\delta_t^r(f)).$$

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in CP$. Через $\omega_r(f)$ обозначаем модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве CP: $\omega_r(f,h) = \sup\limits_{|t|\leqslant h} P(\delta_t^r(f))$.

Пусть $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$C(p) = \sup_{m\in\mathbb{Z}_+}\sup_{f\in L_p}\frac{\|S_m(f)\|_p}{\|f\|_p}, \quad C_n(p) = \sup_{m\in\mathbb{Z}_+}\sup_{f\in L_p}\frac{E_n(S_m(f))_p}{E_n(f)_p}.$$

Замечание 1. Легко убедиться, что при $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство $C_n(p) \leqslant C(p)$. Хорошо известно (см. [4, сс. 593–595]), что $C(p) < \infty$ при $1 < p < \infty$.

1.2. Нам понадобятся следующие известные результаты.

Теорема A (см. [5, с. 539]). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\|T\|_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|T\|_q .$$

Следствие A. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$E_m(T)_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} E_m(T)_q.$$

Теорема B (см. [6, с. 114]). *Пусть полунорма* $P \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$P\left(T^{(r)}\right) \leqslant \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r P\left(\delta_h^r(T)\right).$$

Теорема C (см. [6, сс. 56, 67, 68]). *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$. *Тогда* $\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_p = 0$.

Теорема D (см. [6, с. 65]). *Пусть* $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо неравенство* $P\left(\sigma_n(f)\right) \leqslant P(f)$.

Теорема E (см. [6, сс. 165–166]). *Пусть* $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $k > n$. *Тогда*

$$E_n\left(\sigma_k(f)\right) \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{k-n}{k+1} E_n(f).$$

Лемма A (см. [7, с. 34]). *Пусть* $a \geqslant 1$, $x \geqslant -1$. *Тогда* $(1+x)^a \geqslant 1+ax$.

Лемма B. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leqslant \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

В условиях леммы B стоящие там константы не могут быть улучшены.

Эта лемма хорошо известна. Приведём её доказательство.

Доказательство. Положим $a_m = \frac{C_{2m}^m\sqrt{m}}{2^{2m}}$. Легко видеть, что

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{m+\frac{1}{2}}{\sqrt{m(m+1)}} > 1.$$

Следовательно, при $m > 1$ имеем $a_m > a_1 = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулой Стирлинга, находим

$$a_m = \frac{\sqrt{4\pi m}(2m)^{2m}e^{-2m}(1+\varepsilon_{2m})}{\left(\sqrt{2\pi m}m^m e^{-m}\left(1+\varepsilon_m\right)\right)^2}\frac{\sqrt{m}}{2^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1+\varepsilon_{2m}}{\left(1+\varepsilon_m\right)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \ \square$$

1.3. Установим ряд предложений вспомогательного характера.

Лемма 1. *Пусть* $0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 \sin^{2m}(\gamma t)\, dt \leqslant (\sin\gamma)^{2m}\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}.$$

Доказательство. Установим неравенство

$$\sin(\gamma t) \leqslant (\sin\gamma)\sin\frac{\pi t}{2} \quad \text{при } t \in [0,1]. \tag{2}$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$f(t) = (\sin\gamma)\sin\frac{\pi t}{2} - \sin(\gamma t).$$

Её вторая производная имеет вид

$$f''(t) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(\sin\gamma)\sin\frac{\pi t}{2} + \gamma^2\sin(\gamma t).$$

Так как $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\gamma \geqslant \frac{2\gamma}{\pi}$. Поскольку $\sin x$ возрастает при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\gamma t \leqslant \frac{\pi t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\pi t}{2} \geqslant \sin(\gamma t)$. Принимая во внимание сказанное, имеем

$$f''(t) \leqslant -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{2\gamma}{\pi}\sin(\gamma t) + \gamma^2\sin(\gamma t) = \left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\gamma\sin(\gamma t) \ \leqslant\ 0.$$

Следовательно, функция $f(t)$ выпукла вверх на $[0,1]$. Кроме того, $f(0) = f(1) = 0$. Таким образом, $f(t) \geqslant 0$ на $[0,1]$, значит, справедливо неравенство (2).

Возведём обе части неравенства (2) в степень $2m$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. Учитывая, что

$$\int\limits_0^1 \sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2m} t\, dt = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}},$$

находим

$$\int_0^1 \sin^{2m}(\gamma t)\,dt \;\leqslant\; (\sin\gamma)^{2m}\int_0^1 \sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt \;=\; (\sin\gamma)^{2m}\,\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\int_0^1 \sin^{2m}(\gamma t)\,dt \;\geqslant\; \frac{\sin^{2m}\gamma}{2m+1}.$$

Доказательство. Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то при $t \in [0,1]$ будет $\sin(\gamma t) \geqslant t\sin\gamma$. Следовательно,

$$\int_0^1 \sin^{2m}(\gamma t)\;dt \geqslant \int_0^1 (t\sin\gamma)^{2m}\;dt = (\sin\gamma)^{2m}\int_0^1 t^{2m}\,dt = \frac{\sin^{2m}\gamma}{2m+1}. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant 0$. *Тогда*

$$\int_0^1 t^{\alpha}\sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt \geqslant \frac{1}{2\sqrt{m}+\alpha}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\alpha}\sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt &= \int_0^1 \sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt - \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\left(\int_0^x \sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt\right)dx \\ &= \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} - \alpha\int_0^1 x^{\alpha}\left(\int_0^1 \sin^{2m}\frac{\pi x t}{2}\,dt\right)dx. \qquad (3)\end{aligned}$$

Применяя лемму 1 при $\gamma = \frac{\pi x}{2}$, получаем

$$\int_0^1 x^{\alpha}\left(\int_0^1 \sin^{2m}\frac{\pi x t}{2}\,dt\right)dx \leqslant \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}\int_0^1 x^{\alpha}\sin^{2m}\frac{\pi x}{2}\,dx.$$

Возвращаясь к (3), находим

$$\int_0^1 t^{\alpha}\sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt \;\geqslant\; \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} - \alpha\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}\int_0^1 t^{\alpha}\sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 t^\alpha \sin^{2m} \frac{\pi t}{2}\, dt \geqslant \frac{1}{\alpha + \frac{2^{2m}}{C_{2m}^m}}.$$

Осталось воспользоваться леммой B. $\square$

Лемма 4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $-2m-1 < \alpha < 0$. *Тогда*

$$\int_0^1 t^\alpha \sin^{2m} \frac{\pi t}{2}\, dt \geqslant \frac{2m+1}{2\sqrt{m}(2m+1+\alpha)}.$$

Доказательство. Полагая $\gamma = \frac{\pi x}{2}$ в лемме 2, находим

$$\int_0^1 x^\alpha \left(\int_0^1 \sin^{2m} \frac{\pi x t}{2}\, dt \right) dx \geqslant \frac{1}{2m+1} \int_0^1 x^\alpha \sin^{2m} \frac{\pi x}{2}\, dx.$$

Воспользуемся равенством (3), которое справедливо при $\alpha > -2m-1$. Имеем

$$\int_0^1 t^\alpha \sin^{2m} \frac{\pi t}{2}\, dt \geqslant \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} - \frac{\alpha}{2m+1} \int_0^1 x^\alpha \sin^{2m} \frac{\pi x}{2}\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 t^\alpha \sin^{2m} \frac{\pi t}{2}\, dt \geqslant \frac{2m+1}{2m+1+\alpha} \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}.$$

Применение леммы B завершает доказательство. $\square$

Лемма 5. *Пусть* $a_k \geqslant 0$ *при* $k = \overline{1,\infty}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $m + r > 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+1} \right)^{2m+2r} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant \frac{D_1(m,r)}{(n+1)^{2r}} \int_0^1 t^{2r-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{2r} \sin^{2m} \frac{k\pi t}{2(n+1)}\, dt, \quad (4)$$

где

$$D_1(m,r) = \left(\int_0^1 t^{2r-1} \sin^{2m} \frac{\pi t}{2} \, dt \right)^{-1}.$$

При $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$D_1(m,r) \leqslant \frac{4\sqrt{m}(m+r)}{2m+1}, \quad \text{если } -m < r < \frac{1}{2};$$
$$D_1(m,r) \leqslant 2\sqrt{m} - 1 + 2r, \quad \text{если } r \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть $k = \overline{1, n}$, $t \in [0,1]$. В силу убывания функции $\frac{\sin x}{x}$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеем

$$\sin\left(\frac{k}{n+1}\frac{\pi t}{2}\right) \geqslant \frac{k}{n+1} \sin\frac{\pi t}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin^{2m} \frac{k\pi t}{2(n+1)} \geqslant \left(\frac{k}{n+1}\right)^{2m} \sin^{2m}\frac{\pi t}{2}.$$

Умножим обе части полученного неравенства на t^{2r-1} и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. Получаем

$$\int_0^1 t^{2r-1} \sin^{2m} \frac{k\pi t}{2(n+1)} \, dt \geqslant \left(\frac{k}{n+1}\right)^{2m} \int_0^1 t^{2r-1} \sin^{2m} \frac{\pi t}{2} \, dt. \tag{5}$$

Положим

$$\alpha_k = k^{2r} \int_0^1 t^{2r-1} \sin^{2m} \frac{k\pi t}{2(n+1)} \, dt = \int_0^k t^{2r-1} \sin^{2m} \frac{\pi t}{2(n+1)} \, dt.$$

Очевидно, что последовательность $\{\alpha_k\}$ возрастает. Пользуясь неравенством (5), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{2m+2r} a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}}a_k$$
$$=\left(\int_0^1 t^{2r-1}\sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt\right)^{-1}\frac{1}{(n+1)^{2r}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^{2r}\int_0^1 t^{2r-1}\sin^{2m}\frac{k\pi t}{2(n+1)}\,dt.$$

По теореме Леви

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^{2r}\int_0^1 t^{2r-1}\sin^{2m}\frac{k\pi t}{2(n+1)}\,dt=\int_0^1 t^{2r-1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^{2r}\sin^{2m}\frac{k\pi t}{2(n+1)}\,dt.$$

Откуда следует неравенство (4).

Оценки для $D_1(m,r)$ получаются применением лемм 3 и 4. $\square$

Лемма 6. *Пусть* $a_k\geqslant 0$ *при* $k=\overline{1,\infty}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\in\mathbb{R}$; *последовательность положительных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что* $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k k^{m+r}=+\infty$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{m+r}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^m\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\right)\sup_{k\geqslant n+1}\left(\frac{1}{k^m}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l l^{m+r}a_l\right).$$

Доказательство. Пусть $N>n$. Положим $b_k=a_k$ при $k=\overline{1,N}$, $b_k=0$ при $k>N$, $Q_k=\sum\limits_{l=1}^{k}\lambda_l l^{m+r}b_l$, $\mu_k=(\lambda_k k^{m+r})^{-1}$.

Считая $s>n+1$ и применяя преобразование Абеля, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_k}b_k+\sum_{k=n+1}^{s}b_k=Q_s\mu_s+\sum_{k=n+1}^{s-1}Q_k\left(\mu_k-\mu_{k+1}\right).$$

Устремляя s к ∞, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_k}a_k+\sum_{k=n+1}^{N}a_k&=\sum_{k=n+1}^{\infty}Q_k\left(-\Delta\mu_k\right)\\&\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^m\left|\Delta\mu_k\right|\right)\sup_{k\geqslant n+1}\frac{Q_k}{k^m}\\&\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^m\left|\Delta\mu_k\right|\right)\sup_{k\geqslant n+1}\left(\frac{1}{k^m}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l l^{m+r}a_l\right).\end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $N\to\infty$, получаем требуемое. $\square$

Лемма 7. *Пусть* $a\geqslant 0$, $b>0$, $k\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$k^a\Delta^2\frac{1}{k^{a+b}}\leqslant\frac{(a+b)(a+b+1)}{b(b+1)}\Delta^2\frac{1}{k^b}.$$

Доказательство. Считая x любым положительным числом, положим

$$\Delta^2x^\alpha=(x+2)^\alpha-2(x+1)^\alpha+x^\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta^2\frac{1}{x^{a+b}}&=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{(x+t_1+t_2)^{a+b}}\right)''dt_1\,dt_2\\&=(a+b)(a+b+1)\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(x+t_1+t_2)^{a+b+2}}\,dt_1\,dt_2\\&\leqslant(a+b)(a+b+1)\int_0^1\int_0^1\frac{1}{x^a(x+t_1+t_2)^{b+2}}\,dt_1\,dt_2\\&=\frac{(a+b)(a+b+1)}{x^ab(b+1)}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{(x+t_1+t_2)^b}\right)''dt_1\,dt_2\\&=\frac{(a+b)(a+b+1)}{x^ab(b+1)}\Delta^2\frac{1}{x^b}.\end{aligned}$$

Таким образом, для любого положительного x

$$x^a \Delta^2 \frac{1}{x^{a+b}} \leqslant \frac{(a+b)(a+b+1)}{b(b+1)} \Delta^2 \frac{1}{x^b}.$$

В частности, это неравенство справедливо и для натуральных x. $\square$

Лемма 8. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $b > 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) \Delta^2 \frac{1}{k^b} = \frac{1}{(n+1)^b}.$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля при $N > n+1$, имеем

$$\sum_{k=n+1}^{N} (k-n) \Delta^2 \frac{1}{k^b} = (N-n) \Delta \frac{1}{(N+1)^b} - \frac{1}{(N+1)^b} + \frac{1}{(n+1)^b}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем требуемое. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $b > 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \frac{1}{k^b} \leqslant \frac{b+1}{(n+1)^b}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 8. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \frac{1}{k^b} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n+n+1) \Delta^2 \frac{1}{k^b} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) \Delta^2 \frac{1}{k^b} + (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{k^b} \\ &= \frac{1}{(n+1)^b} + (n+1) \left(-\Delta \frac{1}{(n+1)^b} \right).\end{aligned}$$

Ясно, что

$$-\Delta \frac{1}{(n+1)^b} = b \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t^{b+1}} \leqslant \frac{b}{(n+1)^{b+1}}.$$

Окончательно находим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \frac{1}{k^b} \leqslant \frac{1}{(n+1)^b} + \frac{(n+1)b}{(n+1)^{b+1}} = \frac{b+1}{(n+1)^b}.$$ $\square$

Замечание 2. В связи с леммами 7–9 см. [6, с. 166–167], где соответствующие утверждения даны без доказательств.

§2. Основные теоремы

При доказательстве утверждений этого параграфа существенно используется преобразование Абеля. Сначала мы изложим результаты, при доказательстве которых преобразование Абеля применяется один раз, затем те, при установлении которых оно применяется дважды.

2.1. В дальнейшем

$$V_n(f) = A_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \left(\frac{k}{n+1} \right)^{m+r} \right) A_k(f).$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$, $1 < q \leqslant p$, $q < \infty$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in (0, 2\pi)$; *последовательность неравных нулю вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию:* $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k|\, k^{m+r} = +\infty$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_p$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_q$. *Тогда справедливы неравенства*

$$E_n(f)_p \leqslant \|f - V_n(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C(q)}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma} \left| \Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right| \left\| \delta^m_{\frac{\nu}{k}} \left(U(f)\right) \right\|_q .$$

Доказательство. Пусть сначала $f \in H$. Положим $x_k = \lambda_k k^{m+r} A_k(f)$, $\mu_k = \left(\lambda_k k^{m+r}\right)^{-1}$, $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} x_l$. Считая $N > n+1$ и применяя преобразование Абеля, имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k x_k - \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \mu_{n+1})\, x_k = \mu_N S_N - \sum_{k=n+1}^{N-1} S_k \Delta \mu_k.$$

Следовательно,

$$\|S_N(f)-V_n(f)\|_p$$

$$=\left\|\frac{1}{\lambda_N N^{m+r}}S_N\left(U^{(m)}(f)\right)-\sum_{k=n+1}^{N-1}S_k\left(U^{(m)}(f)\right)\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right\|_p$$

$$\leqslant\frac{1}{|\lambda_N|N^{m+r}}\left\|S_N\left(U^{(m)}(f)\right)\right\|_p+\sum_{k=n+1}^{N-1}\left\|S_k\left(U^{(m)}(f)\right)\right\|_p\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k|\,k^{m+r}=+\infty$, то первое слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю при $N\to\infty$. Таким образом,

$$\|f-V_n(f)\|_p\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\left\|S_k\left(U^{(m)}(f)\right)\right\|_p\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|.$$

Отсюда, применяя теорему A, находим

$$\|f-V_n(f)\|_p\leqslant 2^{1-\frac{q}{p}}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\gamma}\left\|S_k\left(U^{(m)}(f)\right)\right\|_q\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|. \tag{6}$$

Теперь, используя теорему B и учитывая определение $C\,(q)$, получаем

$$\left\|S_k\left(U^{(m)}(f)\right)\right\|_q=\left\|S_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_q\leqslant\left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(S_k\left(U(f)\right)\right)\right\|_q$$

$$=\left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m\left\|S_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right\|_q\leqslant C(q)\left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right\|_q. \tag{7}$$

Сопоставляя (6) и (7), находим, что

$$\|f-V_n(f)\|_p\leqslant\frac{2^{1-\frac{q}{p}}C(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m+\gamma}\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right\|_q.$$

Пусть теперь f является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы. Применяя последнее неравенство к функции $\sigma_l(f)$, имеем

$$\|\sigma_l\left(f-V_n\left(f\right)\right)\|_p\leqslant\frac{2^{1-\frac{q}{p}}C(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m+\gamma}\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U\left(\sigma_l(f)\right)\right)\right\|_q.$$

Принимая во внимание теорему C, находим

$$\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U\left(\sigma_l(f)\right)\right)\right\|_q=\left\|\sigma_l\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U\left(f\right)\right)\right)\right\|_q\leqslant\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U\left(f\right)\right)\right\|_q.$$

Таким образом,

$$\left\|\sigma_l\left(f-V_n\left(f\right)\right)\right\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}C(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m+\gamma}\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right\|_q.$$

Учитывая, что $\|f-\sigma_l(f)\|_p \to 0$ (теорема C), получаем требуемое. □

Замечание 3. Пусть $r\in\mathbb{N}$. Обозначим через $W^{(r)}$ множество 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-ая производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на любом отрезке, а r-ая производная $f^{(r)}$ суммируема на периоде. Тогда для функции $f\in W^{(r)}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A_k(f,x)\right)^{(r)}$ является рядом Фурье функции $f^{(r)}$. Если же $f\in L_1$ такова, что сопряжённая функция $\widetilde{f}$ принадлежит классу $W^{(r)}$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_k(f)\cos kx+a_k(f)\sin kx\right)^{(r)}$$

является рядом Фурье r-ой производной функции $\widetilde{f}$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $p=q$. *Тогда*

$$\|f-V_n(f)\|_p \leqslant \frac{C(p)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m}\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right\|_p.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\|f-V_n(f)\|_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m+\gamma}\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\right)\sup_{k\geqslant n+1}\frac{1}{k^m}\left\|S_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_q.$$

Доказательство. Применяя неравенство (6) к функции $\sigma_l(f)$, имеем

$$\left\|\sigma_l\left(f-V_n\left(f\right)\right)\right\|_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\gamma}\left\|S_k\left(U^{(m)}(\sigma_l(f))\right)\right\|_q\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|.$$

Пользуясь теоремой C, находим

$$\left\|S_k\left(U^{(m)}(\sigma_l(f))\right)\right\|_q=\left\|\sigma_l\left(S_k^{(m)}(U(f))\right)\right\|_q \leqslant \left\|S_k^{(m)}(U(f))\right\|_q.$$

Поэтому

$$\left\|\sigma_l\left(f-V_n\left(f\right)\right)\right\|_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\gamma}\left\|S_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_q\left|\Delta\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|.$$

Принимая во внимание теорему С и переходя к пределу при $l \to \infty$ в последнем неравенстве, получаем

$$\|f - V_n(f)\|_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\gamma} \left\| S_k^{(m)}\left(U(f)\right) \right\|_q \left| \Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right|.$$

Остальная часть доказательства очевидна. □

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $\nu \in (0, \pi]$. *Тогда*

$$\|f - V_n(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C(q)}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma} \left| \Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right| \right) \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_q. \quad (8)$$

Доказательство. При $k \geqslant n+1$

$$\left\| \delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right) \right\|_q \leqslant \sup_{|t| \leqslant \frac{\nu}{n+1}} \left\| \delta^m_t\left(U(f)\right) \right\|_q = \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_q.$$

Сопоставляя это неравенство с теоремой 1, получаем требуемое. □

Замечание 4. Следствие 3 вытекает и из следствия 2. Действительно, применяя теорему В и принимая во внимание определение постоянной $C(q)$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^m} \left\| S_k^{(m)}\left(U(f)\right) \right\|_q &\leqslant \frac{1}{k^m} \frac{k^m}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \left\| \delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(S_k\left(U(f)\right)\right) \right\|_q \\
&= \frac{1}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \left\| S_k\left(\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right) \right) \right\|_q \\
&\leqslant \frac{C(q)}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \left\| \delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right) \right\|_q.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\sup_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^m} \left\| S_k^{(m)}\left(U(f)\right) \right\|_q \leqslant \frac{C(q)}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_q.$$

Осталось сопоставить последнее неравенство со следствием 2.

Замечание 5. Приведём оценку суммы ряда, стоящего в правой части неравенства (8), дополнительно предполагая, что $m \geqslant 1$, $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant n+1$, последовательность $\{\lambda_k k^{m+r}\}_{k=n+1}^{\infty}$ возрастает,

$\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k k^{r-\gamma} = +\infty$. Именно, мы покажем, что в сформулированных условиях

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma} \left|\Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| \leqslant (m+\gamma) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k k^{r-\gamma+1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1}(n+1)^{r-\gamma}}. \quad (9)$$

Приступаем к доказательству неравенства (9). Положим $a = m+\gamma$, $b = r-\gamma$. Тогда при $l > n+1$

$$\sum_{k=n+1}^{l} k^a \left(\frac{1}{\lambda_k k^{a+b}} - \frac{1}{\lambda_{k+1}(k+1)^{a+b}}\right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{l} \frac{1}{\lambda_k k^b} - \sum_{k=n+1}^{l} \left(\frac{k}{k+1}\right)^a \frac{1}{\lambda_{k+1}(k+1)^b}$$

$$= \frac{1}{\lambda_{n+1}(n+1)^b} + \sum_{k=n+2}^{l} \frac{1}{\lambda_k k^b} \left(1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^a\right) - \left(\frac{l}{l+1}\right)^a \frac{1}{\lambda_{l+1}(l+1)^b}.$$

Применяя лемму A, находим

$$1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^a = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^a \leqslant 1 - \left(1 + a\left(-\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{a}{k}.$$

Так как $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant n+1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{l} k^a \left(\frac{1}{\lambda_k k^{a+b}} - \frac{1}{\lambda_{k+1}(k+1)^{a+b}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=n+2}^{l} \frac{a}{\lambda_k k^{b+1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1}(n+1)^b} - \left(\frac{l}{l+1}\right)^a \frac{1}{\lambda_{l+1}(l+1)^b}.$$

Устремляя l к ∞ и принимая во внимание, что $\lim\limits_{l\to\infty} \lambda_{l+1}(l+1)^b = +\infty$, приходим к (9).

Следствие 4. *Пусть $q = 2$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\|f - V_n(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{2}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left|\Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| \left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right\|_2.$$

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $q = 2$, $\nu \in (0, \pi]$. *Тогда*

$$\|f - V_n(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{2}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left| \Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right| \right) \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_2 .$$

Для доказательства следствий 4 и 5 достаточно положить $q = 2$ в теореме 1 и следствии 3, соответственно, и принять во внимание, что $C(2) = 1$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$, $1 < q \leqslant p$, $q < \infty$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r - \gamma > 0$, $\nu \in (0, \pi]$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_p$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_q$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \frac{m+r}{r-\gamma} \frac{1}{(n+1)^{r-\gamma}} \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_q .$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 3, полагая в нём $\lambda_k = 1$ при $k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma} \left| \Delta \frac{1}{k^{m+r}} \right| \right) \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_q . \tag{10}$$

Ясно, что при $k \geqslant n + 1$

$$k^{m+\gamma} \left(\frac{1}{k^{m+r}} - \frac{1}{(k+1)^{m+r}} \right) = k^{m+\gamma} (m+r) \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{m+r+1}}$$

$$\leqslant (m+r) \int_k^{k+1} \frac{t^{m+\gamma}}{t^{m+r+1}}\, dt = \frac{m+r}{r-\gamma} \left(\frac{1}{k^{r-\gamma}} - \frac{1}{(k+1)^{r-\gamma}} \right).$$

Значит,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma} \left| \Delta \frac{1}{k^{m+r}} \right| \leqslant \frac{m+r}{r-\gamma} \frac{1}{(n+1)^{r-\gamma}} . \tag{11}$$

Осталось сопоставить (10) и (11). □

Замечание 6. Теорему 2 при $m \in \mathbb{N}$ можно доказать и сопоставляя следствие 3 с замечанием 5. Осуществляя это сопоставление, имеем

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \left((m+\gamma) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^{r-\gamma+1}} + \frac{1}{(n+1)^{r-\gamma}}\right) \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Остаётся заметить, что

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^{r-\gamma+1}} \leqslant \frac{1}{r-\gamma} \frac{1}{(n+1)^{r-\gamma}}.$$

Следствие 6. *Пусть* $q = 2$ *и выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{2}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \frac{m+r}{r - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} \frac{1}{(n+1)^{r-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}} \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_2.$$

Для доказательства достаточно положить $q = 2$ в теореме 2.

Следствие 7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $\nu \in (0, \pi]$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_p$ *такова, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_p$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_p \leqslant \frac{C(p)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \left(1 + \frac{m}{r}\right) \frac{1}{(n+1)^r} \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_p.$$

В частности,

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_p \leqslant \frac{C(p)}{2^m} \left(1 + \frac{m}{r}\right) \frac{1}{(n+1)^r} \omega_m \left(U(f), \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

В случае $p = 2$ *справедливо и неравенство*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{m}{r}\right) \frac{1}{(n+1)^r} \omega_m \left(U(f), \frac{\pi}{n+1}\right)_2.$$

Для доказательства следствия 7 достаточно положить $p = q$ в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$, $1 < q \leqslant p$, $q < \infty$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in (0, 2\pi)$; *последовательность неравных нулю вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию:* $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k|\, k^{m+r} = +\infty$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_p$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_q$. *Тогда справедливо неравенство*

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C_n(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma} \left| \Delta \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right| E_n\left(\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right)_q .$$

Следствие 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и, кроме того,* $\nu \in (0, \pi]$, $r - \gamma > 0$, $\lambda_k = 1$ *при* $k = \overline{1, \infty}$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}} C_n(q)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \frac{m+r}{r-\gamma} \frac{1}{(n+1)^{r-\gamma}} \Omega_{m,n}\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_q .$$

Доказательства теоремы 3 и следствия 8 аналогичны доказательствам теорем 1 и 2 соответственно.

2.2. Дополним приведённые выше результаты применительно к пространству L_2.

Теорема 4. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $m + r > 0$. *Функция* $f \in L_2$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r A_k(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_2$. *Тогда*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_2 \leqslant \frac{D_2(m,r)}{2^m (n+1)^r} \left(\int_0^1 t^{2r-1} \left\| \delta^m_{\frac{\pi t}{n+1}}\left(U(f)\right) \right\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$D_2(m,r) = \left(\int_0^1 t^{2r-1} \sin^{2m} \frac{\pi t}{2}\, dt \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

При $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$D_2(m,r) \leqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{m}(m+r)}{2m+1}}, \qquad \text{если } -m < r < \frac{1}{2};$$
$$D_2(m,r) \leqslant \sqrt{2\sqrt{m}-1+2r}, \qquad \text{если } r \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 5. Полагая в ней $a_k = \pi\rho_k^2(f)$ и принимая во внимание, что

$$\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{2m+2r}\rho_k^2(f) + \pi\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_k^2(f) = \|f - R_{n,m+r}(f)\|_2^2,$$
$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)k^{2r}\sin^{2m}\frac{kh}{2} = \frac{1}{2^{2m}}\left\|\delta_h^m\left(U(f)\right)\right\|_2^2,$$

получаем требуемое. □

Замечание 7. Можно показать, что в условиях теоремы 4

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_2 \leqslant \|f - Q_n(m,r;f)\|_2$$
$$\leqslant \frac{D_2(m,r)}{2^m(n+1)^r}\left(\int_0^1 t^{2r-1}\left\|\delta^m_{\frac{\pi t}{n+1}}\left(U(f)\right)\right\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$Q_n(m,r;f)$$
$$= A_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - D_2(m,r)\left(\int_0^1 t^{2r-1}\sin^{2m}\frac{k\pi t}{2(n+1)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right)A_k(f).$$

Теорема 5. *Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$. Функция $f \in L_2$ такова, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r A_k(f)$ является рядом Фурье некоторой функции $U(f) \in L_2$. Тогда*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_2 \leqslant \frac{D_3(m,r)}{2^m(n+1)^r}\omega_m\left(U(f), \frac{\pi}{n+1}\right)_2,$$

где

$$D_3(m,r) = \left(2r\int\limits_0^1 t^{2r-1}\sin^{2m}\frac{\pi t}{2}\,dt\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

При $m \in \mathbb{N}$, $r \geqslant \frac{1}{2}$ *справедлива оценка*

$$D_3(m,r) \leqslant \sqrt{1+\frac{2\sqrt{m}-1}{2r}}.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 4 и принять во внимание, что при $r > 0$

$$\int\limits_0^1 t^{2r-1}\left\|\delta^m_{\frac{\pi t}{n+1}}(U(f))\right\|_2^2 dt$$
$$\leqslant \left(\int\limits_0^1 t^{2r-1}\,dt\right)\omega_m\left(U(f),\frac{\pi}{n+1}\right)_2^2 = \frac{1}{2r}\omega_m\left(U(f),\frac{\pi}{n+1}\right)_2^2.$$

Теорема 5 допускает следующую переформулировку.

Теорема 5′. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$. *Функция* $f \in L_2$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r A_k(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_2$. *Тогда*

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^{2m+2r}-k^{2m+2r}}{(n+1)^{2m+2r}}E_k(f)_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{D_3(m,r)}{2^m(n+1)^r}\omega_m\left(U(f),\frac{\pi}{n+1}\right)_2.$$

Для доказательства достаточно заметить, что для $f \in L_2$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$ справедливо равенство

$$\|f - R_{n,\alpha}(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^{2\alpha}-k^{2\alpha}}{(n+1)^{2\alpha}}E_k(f)_2^2,$$

и воспользоваться теоремой 5.

Теорема 6. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$; *последовательность неравных нулю вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию:* $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k|\,k^{m+r} = +\infty$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_2$ *такова, что ряд*

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|f - V_n(f)\|_2 \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2m} \left| \Delta \frac{1}{\lambda_k^2 k^{2m+2r}} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^m} \left\| S_k^{(m)}(U(f)) \right\|_2 .$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля

$$\|f - V_n(f)\|_2^2 = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_{n+1}^2} \left(\frac{k}{n+1} \right)^{2m+2r} \rho_k(f)^2 + \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k(f)^2,$$

$$\left\| S_k^{(m)}(U(f)) \right\|_2^2 = \pi \sum_{l=1}^{k} \lambda_l^2 l^{2m+2r} \rho_l(f)^2.$$

Остаётся воспользоваться леммой 6, считая в ней $a_k = \pi \rho_k(f)^2$. $\square$

Следствие 9. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $\nu \in (0, \pi]$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_2$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой фукции* $U(f) \in L_2$. *Тогда*

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{\left(2 \sin \frac{\nu}{2}\right)^m} \sqrt{1 + \frac{m}{r}} \frac{1}{(n+1)^r} \omega_m \left(U(f), \frac{\nu}{n+1} \right)_2 .$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 6. Полагая в ней $\lambda_k = 1$ при $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|f - R_{n,m+r}(f)\|_2 \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2m} \left| \Delta \frac{1}{k^{2m+2r}} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^m} \left\| S_k^{(m)}(U(f)) \right\|_2 .$$

В доказательстве теоремы 2 было показано (см. неравенство (11) при $\gamma = 0$), что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2m} \left| \Delta \frac{1}{k^{2m+2r}} \right| \leqslant \frac{2m+2r}{2r} \frac{1}{(n+1)^{2r}} .$$

В силу теоремы В при $k \geqslant n+1$

$$\frac{1}{k^m}\left\|S_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_2 \leqslant \left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^{-m}\left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(S_k\left(U(f)\right)\right)\right\|_2$$
$$\leqslant \left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^{-m}\left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right\|_2 \leqslant \left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^{-m}\omega_m\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_2.$$

Осталось сопоставить приведённые неравенства. □

Необходимо отметить, что вопросам, относящимся к оценке констант в прямых теоремах теории аппроксимации в пространстве L_2, посвящено много работ различных авторов.

2.3. Остановимся теперь на результатах, аналогичных изложенным в пункте 2.1, но при которых преобразование Абеля применяется дважды.

В дальнейшем

$$W_n(f) = A_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\left(\frac{k}{n+1}\right)^{m+r}\right)A_k(f)$$
$$+(n+1)\left(\Delta\frac{1}{\lambda_{n+1}(n+1)^{m+r}}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\lambda_k k^{m+r}A_k(f).$$

Теорема 7. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $q \leqslant p$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in (0, 2\pi)$; последовательность неравных нулю вещественных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям: $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k|\,k^{m+r} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta\left(\lambda_k k^{m+r}\right)^{-1} = 0$. Пусть, далее, функция $f \in L_p$ такова, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ является рядом Фурье некоторой функции $U(f) \in L_q$. Тогда*

$$\|f - W_n(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m+\gamma}(k+1)\left|\Delta^2\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right\|_q.$$

Доказательство. Пусть сначала $f \in H$. Положим $x_k = \lambda_k k^{m+r}A_k(f)$, $\mu_k = \left(\lambda_k k^{m+r}\right)^{-1}$, $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} x_l$, $\sigma_k = \sum\limits_{l=1}^{k}\left(1 - \frac{l}{k+1}\right)x_l$.

Применяя преобразование Абеля при $N > n+1$, находим

$$\sum_{k=1}^{N+1} \mu_k x_k - \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \mu_{n+1})\, x_k = \mu_{N+1} S_{N+1} + \sum_{k=n+1}^{N} S_k\,(\mu_k - \mu_{k+1})\,.$$

Рассмотрим сумму в правой части последнего равенства. Снова применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=n+1}^{N} S_k\,(\mu_k - \mu_{k+1})$$
$$= -(N+1)\sigma_N \Delta\mu_N + (n+1)\sigma_n \Delta\mu_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{N-1} (k+1)\sigma_k \Delta^2 \mu_k.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N+1} \mu_k x_k - \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \mu_{n+1})\, x_k - (n+1)\sigma_n \Delta\mu_{n+1}$$
$$= \mu_{N+1} S_{N+1} - (N+1)\sigma_N \Delta\mu_N + \sum_{k=n+1}^{N-1} (k+1)\sigma_k \Delta^2 \mu_k.$$

Иными словами,

$$S_{N+1}(f) - W_n(f) = \frac{1}{\lambda_{N+1}(N+1)^{m+r}} \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k k^{m+r} A_k(f)$$
$$-(N+1)\left(\Delta \frac{1}{\lambda_N N^{m+r}}\right) \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \lambda_k k^{m+r} A_k(f)$$
$$+ \sum_{k=n+1}^{N-1} (k+1)\left(\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right) \sum_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \lambda_l l^{m+r} A_l(f). \tag{12}$$

Заметим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k k^{m+r} A_k(f) \right\|_p = \left\| S_{N+1}^{(m)}\,(U(f)) \right\|_p, \tag{13}$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \lambda_l l^{m+r} A_l(f) \right\|_p = \left\| \sigma_k^{(m)}\,(U(f)) \right\|_p. \tag{14}$$

Сопоставляя (12)–(14), получаем

$$\|S_{N+1}(f)-W_n(f)\|_p \leqslant \frac{1}{|\lambda_{N+1}|\,(N+1)^{m+r}}\left\|S_{N+1}^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_p$$
$$+(N+1)\left|\Delta\frac{1}{\lambda_N N^{m+r}}\right|\left\|\sigma_N^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_p$$
$$+\sum_{k=n+1}^{N-1}(k+1)\left|\Delta^2\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_p.$$

Устремляя N к бесконечности, имеем

$$\|f-W_n(f)\|_p \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_p. \tag{15}$$

В силу теоремы A

$$\left\|\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_p \leqslant 2^{1-\frac{q}{p}}k^{\gamma}\left\|\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_q. \tag{16}$$

Принимая во внимание теорему B, находим

$$\left\|\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right\|_q \leqslant \left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m\left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(\sigma_k\left(U(f)\right)\right)\right\|_q$$
$$=\left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m\left\|\sigma_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right\|_q. \tag{17}$$

Сопоставляя (15)– (17), получаем, что для любой $f\in H$

$$\|f-W_n(f)\|_p$$
$$\leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{m+\gamma}(k+1)\left|\Delta^2\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\left\|\sigma_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right\|_q. \tag{18}$$

Последнее неравенство справедливо и для любой функции f, удовлетворяющей условиям теоремы. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить (18) к функции $\sigma_N(f)$ и устремить N к бесконечности.

Для завершения доказательства заметим, что $\left\|\sigma_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right\|_q \leqslant \left\|\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right\|_q$ (см. теорему C). □

Следствие 10. *Пусть выполнены условия теоремы 7 и, кроме того, $p = q$. Тогда*

$$\|f-W_n(f)\|_p \leqslant \left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^{-m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| \left\|\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right\|_p.$$

Следствие 11. *Пусть выполнены условия теоремы 7, $\nu \in (0,\pi]$. Тогда*

$$\|f - W_n(f)\|_p$$
$$\leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k+1)\left|\Delta^2\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\right)\omega_m\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Доказательства следствий 10 и 11 очевидны.

Положим

$$Y_n(f) = A_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^{m+r}\right)A_k(f)$$
$$+(n+1)\left(\Delta\frac{1}{(n+1)^{m+r}}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)k^{m+r}A_k(f). \qquad (19)$$

Теорема 8. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $q \leqslant p$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $r - \gamma > 0$, $\nu \in (0,\pi]$. Пусть, далее, функция $f \in L_p$ такова, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ является рядом Фурье некоторой функции $U(f) \in L_q$. Тогда*

$$\|f - Y_n(f)\|_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}(m+r)(m+r+1)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m(r-\gamma)(n+1)^{r-\gamma}}\omega_m\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Доказательство. Применяя следствие 11 при $\lambda_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, получаем

$$\|f - Y_n(f)\|_p$$
$$\leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k+1)\left|\Delta^2\frac{1}{k^{m+r}}\right|\right)\omega_m\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Оценим сумму ряда в правой части неравенства. Для этого воспользуемся леммами 7 и 9, полагая в них $a = m + \gamma$, $b = r - \gamma$. Имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{k^{m+r}}\right| \leqslant \frac{(m+r)(m+r+1)}{(r-\gamma)(r-\gamma+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)\Delta^2 \frac{1}{k^{r-\gamma}}$$

$$\leqslant \frac{(m+r)(m+r+1)}{(r-\gamma)(r-\gamma+1)} \frac{r-\gamma+1}{(n+1)^{r-\gamma}} = \frac{(m+r)(m+r+1)}{(r-\gamma)(n+1)^{r-\gamma}}. \tag{20}$$

Остальная часть доказательства очевидна. □

Теорема 9. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $q \leqslant p$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in (0, 2\pi)$*; последовательность неравных нулю вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям:* $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k|\, k^{m+r} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta\left(\lambda_k k^{m+r}\right)^{-1} = 0$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_p$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_q$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k-n)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| E_n\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)_q.$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 7, приходим к неравенству, аналогичному (18). Именно

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| E_n\left(\sigma_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right)_q.$$

В силу теоремы E

$$E_n\left(\sigma_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right)_q \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{k-n}{k+1} E_n\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)_q.$$

Осталось сопоставить приведённые неравенства. □

Следствие 12. *Пусть выполнены условия теоремы* 9 *и, кроме того,* $p = q$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{1}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k-n)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| E_n\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)_p.$$

Следствие 13. *Пусть выполнены условия теоремы* 9, $\nu \in (0,\pi]$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k-n)\left|\Delta^2\frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\right)\Omega_{m,n}\left(U(f),\frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Доказательства следствий 12 и 13 очевидны.

Теорема 10. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $q \leqslant p$, $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $r-\gamma > 0$, $\nu \in (0,\pi]$. *Пусть, далее, функция* $f \in L_p$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in L_q$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{2^{1-\frac{q}{p}}(m+r)(m+r+1)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m(r-\gamma)(r-\gamma+1)(n+1)^{r-\gamma}}\Omega_{m,n}\left(U(f),\frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 13, полагая в нём $\lambda_k = 1$ при $k=\overline{1,\infty}$. Имеем

$$E_n(f)_p \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{\pi}\frac{2^{1-\frac{q}{p}}}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k-n)\left|\Delta^2\frac{1}{k^{m+r}}\right|\right)\Omega_{m,n}\left(U(f),\frac{\nu}{n+1}\right)_q.$$

Применяя леммы 7 и 8 при $a = m+\gamma$, $b = r-\gamma$, получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{m+\gamma}(k-n)\left|\Delta^2\frac{1}{k^{m+r}}\right| \leqslant \frac{(m+r)(m+r+1)}{(r-\gamma)(r-\gamma+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\Delta^2\frac{1}{k^{r-\gamma}} \tag{21}$$
$$= \frac{(m+r)(m+r+1)}{(r-\gamma)(r-\gamma+1)}\frac{1}{(n+1)^{r-\gamma}}.$$

Остальное ясно. □

Теорема 11. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in (0,2\pi)$; *последовательность неравных нулю вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям:* $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k|\,k^{m+r} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta\left(\lambda_k k^{m+r}\right)^{-1} = 0$. *Пусть,* *далее, функция* $f \in CP$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in CP$*. Тогда*

$$P\left(f - W_n(f)\right) \leqslant \frac{1}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| P\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right).$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 7 для функций $f \in H$ при $N > n+1$ было установлено равенство (см. (12))

$$S_{N+1}(f) - W_n(f) = \frac{1}{\lambda_{N+1}(N+1)^{m+r}} \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k k^{m+r} A_k(f)$$

$$-(N+1)\left(\Delta \frac{1}{\lambda_N N^{m+r}}\right) \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \lambda_k k^{m+r} A_k(f)$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{N-1} (k+1)\left(\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right) \sum_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \lambda_l l^{m+r} A_l(f). \qquad (22)$$

Имеем

$$P\left(\sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k k^{m+r} A_k(f)\right) = P\left(S_{N+1}^{(m)}\left(U(f)\right)\right), \qquad (23)$$

$$P\left(\sum_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \lambda_l l^{m+r} A_l(f)\right) = P\left(\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right). \qquad (24)$$

Сопоставляя соотношения (22)–(24), получаем

$$P\left(S_{N+1}(f) - W_n(f)\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda_{N+1}|\,(N+1)^{m+r}} P\left(S_{N+1}^{(m)}\left(U(f)\right)\right)$$

$$+(N+1)\left|\Delta \frac{1}{\lambda_N N^{m+r}}\right| P\left(\sigma_N^{(m)}\left(U(f)\right)\right)$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{N-1} (k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| P\left(\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right).$$

Отсюда при $N \to \infty$ находим

$$P\left(f - W_n(f)\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| P\left(\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right). \qquad (25)$$

В силу теорем B и D

$$P\left(\sigma_k^{(m)}\left(U(f)\right)\right) \leqslant \left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m P\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(\sigma_k\left(U(f)\right)\right)\right)$$

$$= \left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m P\left(\sigma_k\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right)\right) \leqslant \left(\frac{k}{2\sin\frac{\nu}{2}}\right)^m P\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right). \quad (26)$$

Сопоставляя (25) и (26), приходим к выводу, что для любой $f \in H$ справедливо неравенство

$$P\left(f - W_n(f)\right) \leqslant \frac{1}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right| P\left(\delta_{\frac{\nu}{k}}^m\left(U(f)\right)\right).$$

Пусть теперь f – произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы. Так как $P\left(\sigma_N(f) - f\right) \to 0$, то, применяя последнее неравенство к функции $\sigma_N(f)$ и устремляя N к ∞, получаем требуемое. □

Следствие 14. *Пусть выполнены условия теоремы* 11, $\nu \in (0,\pi]$. *Тогда*

$$P\left(f - W_n(f)\right) \leqslant \frac{1}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k+1)\left|\Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}}\right|\right)\omega_m\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right).$$

Доказательство следствия 14 очевидно.

Теорема 12. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $\nu \in (0,\pi]$. *Пусть, далее, функция* $f \in CP$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in CP$. *Тогда*

$$P\left(f - Y_n(f)\right) \leqslant \frac{(m+r)(m+r+1)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m r(n+1)^r}\omega_m\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right),$$

где функция $Y_n(f)$ *определена равенством* (19).

Доказательство теоремы 12 получается сопоставлением следствия 14 и неравенства (20) (при $\gamma = 0$).

Теорема 13. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in (0, 2\pi)$; *последовательность неравных нулю вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям:* $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k|\, k^{m+r} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta\left(\lambda_k k^{m+r}\right)^{-1} = 0$. *Пусть,* *далее, функция* $f \in CP$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in CP$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{1}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k-n) \left| \Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right| E_n\left(\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right).$$

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 7, приходим к неравенству, аналогичному (18). Именно, для любой функции f, удовлетворяющей условиям теоремы, имеем

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m(k+1) \left| \Delta^2 \frac{1}{\lambda_k k^{m+r}} \right| E_n\left(\sigma_k\left(\delta^m_{\frac{\nu}{k}}\left(U(f)\right)\right)\right).$$

Остаётся воспользоваться теоремой E. □

Следствие 15. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $\nu \in (0, \pi]$. *Пусть, далее, функция* $f \in CP$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r B_{k,m}(f)$ *является рядом Фурье некоторой функции* $U(f) \in CP$. *Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{(m+r)(m+r+1)}{\left(2\sin\frac{\nu}{2}\right)^m r(r+1)(n+1)^r} \Omega_{m,n}\left(U(f), \frac{\nu}{n+1}\right).$$

Для доказательства следствия 15 достаточно положить $\lambda_k = 1$ (при $k \in \mathbb{N}$) в теореме 13 и воспользоваться неравенством (21) при $\gamma = 0$.

В связи с результатами, предшествующими изложенным выше, см. [6, сс. 165–168, 172, 173, 180–182].

Литература

1. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
2. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.
3. R. A. De Vore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation.* Berlin–New York, 1993.
4. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* М., 1961.
5. В. В. Арестов, *О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов.* — Мат. заметки **27**, No. 4 (1980), 539–547.
6. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
7. D. S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities.* Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

Babushkin M. V., Zhuk V. V. On the constants in inequalities of the generalized Jackson theorem type.

Some modifications of Jackson type inequalities are established. These inequalities contain estimates of best approximations of periodical functions by trigonometric polynomials in terms of the moduli of continuity of high orders. Special attention was payed to estimates of constants in the obtained inequalities.

С.-Петербургский национальный
исследовательский университет
информационных технологий,
механики и оптики, Кронверкский пр. 49,
197101 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: maxbabushkin@gmail.com

Поступило 29 августа 2013 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zhuk@math.spbu.ru