

А. В. Пастор

О СКЛЕИВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ РОДА g ИЗ ДВУХ И ТРЕХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Склейка поверхности из многоугольников. Рассмотрим k кругов D_1, D_2, \dots, D_k , на граничных окружностях которых отмечены в сумме $2n$ точек, так, что на каждой из окружностей отмечена хотя бы одна точка. Пусть на каждом из кругов D_i задана определенная ориентация (направление обхода против часовой стрелки), и одна из дуг, на которые отмеченные точки делят его окружность, помечена его номером i . Разобьем произвольным образом на пары все $2n$ получившихся дуг и склеим соответствующие дуги, учитывая ориентацию (склеиваемые дуги должны быть противоположно направлены). В результате получится компактная, ориентированная, но, возможно, несвязная поверхность без края. Отмеченные на граничных окружностях точки и дуги этих окружностей изображают на полученной поверхности некоторый граф.

Далее, мы для удобства будем называть круги D_1, D_2, \dots, D_k *многоугольниками*, отмеченные на кругах точки – *вершинами*, а дуги, на которые отмеченные точки разбивают окружность – *ребрами* многоугольника. Соответственно, m -угольником мы будем называть круг, на граничной окружности, которого отмечено ровно m точек. Тем самым мы допускаем существование многоугольников с одной и двумя вершинами. Для каждого из ребер многоугольника одну из его вершин назовем *начальной*, а другую *конечной*, в соответствии с порядком их следования при обходе против часовой стрелки.

Введем следующие обозначения.

Пусть $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, $m_1 + \dots + m_k = 2n$ и D_1, \dots, D_k – многоугольники, содержащие m_1, \dots, m_k ребер соответственно. Обозначим через

Ключевые слова: карта, ориентируемая поверхность, склейка.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-3229.2012.1, гранта РФФИ No. 11-01-00760-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 г.

$\varepsilon_g(m_1, \dots, m_k; k)$ количество способов склеить из этих многоугольников связную ориентированную поверхность рода g (т.е. количество способов разбить все $2n$ ребер на пары так, чтобы в результате склейки получилась связная поверхность рода g). Также положим

$$\varepsilon_g(n, k) = \sum_{m_1 + \dots + m_k = 2n} \varepsilon_g(m_1, \dots, m_k; k).$$

То есть $\varepsilon_g(n, k)$ – количество способов склеить связную ориентированную поверхность рода g из k многоугольников, в сумме имеющих $2n$ ребер.

При $n = 0$ положим $\varepsilon_0(0, 1) = 1$ и $\varepsilon_g(0, k) = 0$, если $g + k > 1$.

Следуя обозначениям, введенным в работах [3] и [4], положим

$$\mathbf{C}_g^{[k]}(z) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_g(n, k) z^n.$$

При $k = 1$ мы будем писать $\varepsilon_g(n)$ и $\mathbf{C}_g(z)$ вместо $\varepsilon_g(n, 1)$ и $\mathbf{C}_g^{[1]}(z)$ соответственно.

Склейки поверхности рода g из одного многоугольника впервые рассмотрели J. Nagel и D. Zagier в работе [9]. В этой работе количества таких склеек, были использованы для вычисления эйлеровой характеристики пространств модулей. В работе [9] была доказана следующая рекуррентная формула для чисел $\varepsilon_g(n)$

$$\varepsilon_g(n) = \frac{2n-1}{n+1} (2\varepsilon_g(n-1) + (n-1)(2n-3)\varepsilon_{g-1}(n-2)). \quad (1)$$

В настоящее время известно порядка десяти различных доказательств формулы (1). В частности, в работе [6] приведено доказательство этой формулы посредством прямой биекции.

Явные формулы для чисел $\varepsilon_g(n)$ при малых значениях g содержатся в работах [8] и [1].

Производящие функции $\mathbf{C}_g(z)$ и $\mathbf{C}_g^{[2]}(z)$ были рассмотрены в работах [3] и [4]. В работе [3] было доказано, что при всех $g > 0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{C}_g(z) = \frac{P_g(z)}{(1-4z)^{3g-\frac{1}{2}}}, \quad (2)$$

где $P_g(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами степени не более, чем $3g-1$, кратный z^{2g} , причем $P_g(1/4) \neq 0$.

При $g = 0$ общеизвестно, что $\varepsilon_0(n)$ – n -е число Каталана, поэтому

$$C_0(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}. \quad (3)$$

В работе [4] была получена аналогичная формула для производящей функции $C_g^{[2]}(z)$, а именно, доказано, что для любого $g \geq 0$

$$C_g^{[2]}(z) = \frac{P_g^{[2]}(z)}{(1 - 4z)^{3g+2}}, \quad (4)$$

где $P_g^{[2]}(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами степени не более, чем $3g + 1$, кратный z^{2g+1} , причем $P_g^{[2]}(1/4) > 0$. Также была предложена формула выражающая многочлен $P_g^{[2]}(z)$ через многочлены вида $P_h(z)$. В качестве следствия, в работе [4] были получены явные формулы для чисел $\varepsilon_0(n, 2)$, $\varepsilon_1(n, 2)$ и $\varepsilon_2(n, 2)$.

Другое доказательство явных формул для $\varepsilon_0(n, 2)$ и $\varepsilon_1(n, 2)$ было предложено в работе [10]. Также в работе [10] была получена явная формула для числа $\varepsilon_0(n, 3)$.

В ряде работ рассматривались аналогичные, но зависящие от большего числа параметров величины. Например, в работе [7] были рассмотрены числа $a_{p,q,k}^{(s)}$, которые можно интерпретировать как количество способов склеить p -угольник и q -угольник так, чтобы склеивались ровно s пар ребер, принадлежащих разным многоугольникам, и в результате склейки образовалась поверхность, на которой изображен граф на k вершинах. В работе [7] была получена формула для производящей функции $A_{p,q}^{(s)}(x) = \sum_{k \geq 1} a_{p,q,k}^{(s)} x^k$, однако полученная формула весьма громоздка и никаких (ни явных, ни рекуррентных) формул для самих чисел $a_{p,q,k}^{(s)}$ из нее не выведено.

В работе [2] были рассмотрены числа $N_{g,k}^l(\mathbf{b}, \boldsymbol{\ell}, \mathbf{n})$, где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)$, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots)$ и $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots)$ – последовательности целых неотрицательных чисел, удовлетворяющие ряду условий. Число $N_{g,k}^l(\mathbf{b}, \boldsymbol{\ell}, \mathbf{n})$ можно интерпретировать как количество способов склеить из нескольких многоугольников связную ориентированную поверхность рода g с краем, где k – количество пар склеиваемых ребер и l – количество не склеенных ни с кем ребер. Кроме того, для всех i должны выполняться следующие условия: количество i -угольников в склеиваемом наборе должно быть равно b_i ; количество компонент связности края, содержащих ровно i ребер, должно быть равно n_i (при этом количество

вершин, не лежащих на краю, должно быть равно n_0 : они считаются компонентами с нулем ребер). Параметр ℓ_i определяется сложнее: он должен быть равен суммарному количеству компонент связности края и не лежащих на краю вершин, для которых равна i следующая величина. Для не лежащей на краю вершины это сумма ее степени и количества отмеченных вершин многоугольников, при склеивании которых была образована данная вершина (в каждом многоугольнике отмечена ровно одна вершина); для компоненты связности границы это будет та же величина, вычисленная для вершины, получающейся стягиванием данной компоненты в точку (ребра, лежащие на границе, при стягивании удаляются). В работе [2] был получен ряд соотношений на эти числа.

В настоящей работе мы дадим элементарное доказательство формулы (4), получим аналогичную формулу для $C_g^{[3]}(z)$, и в качестве следствия получим явную формулу для $\varepsilon_1(n, 3)$.

1.2. Эквивалентные переформулировки. Задача о перечислении склеек поверхности рода g из k многоугольников имеет ряд эквивалентных переформулировок. Ниже мы рассмотрим те из них, которые нам понадобятся в данной работе. О других эквивалентных переформулировках, таких как, например, перечисление хордовых диаграмм на нескольких интервалах, можно прочитать в работах [3, 4, 2].

1.2.1. Перечисление помеченных карт.

Определение 1. *Под картой мы будем понимать упорядоченную пару (X, G) , состоящую из конечного неориентированного графа G (возможно, содержащего кратные ребра и петли), вложенного в компактную ориентированную поверхность X без края таким образом, что связные компоненты множества $X \setminus G$, называемые гранями карты, гомеоморфны дискам.*

Две карты (X, G) и (X', G') называются изоморфными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : X \rightarrow X'$, такой, что $f(G) = G'$.

Родом карты (X, G) называется род поверхности X .

Все необходимые сведения о картах (в частности, об их связи с перестановками) можно найти, например, в обзоре [5]. Ниже мы напомним понятия, необходимые для целей данной статьи.

Легко видеть, что описанная выше процедура склейки поверхности из k многоугольников дает карту с n ребрами и k гранями. Грани полученной карты соответствуют склеиваемым многоугольникам, поэтому занумеруем их числами от 1 до k так же, как и соответствующие многоугольники. Каждое ребро карты соответствует двум сторонам многоугольников. Поставим в соответствие каждому ребру карты пару противоположно направленных дуг (ориентированных ребер). Будем говорить, что дуга e принадлежит грани F , если она лежит на границе F и ориентирована в направлении обхода границы против часовой стрелки. Тогда, ориентируя ребра многоугольников против часовой стрелки, мы получим естественную биекцию между множеством всех дуг карты и множеством ребер многоугольников. Дуги карты, соответствующие помеченным ребрам многоугольников, пометим теми же числами.

Итак, мы получили карту с n ребрами и k гранями, грани которой занумерованы числами от 1 до k , и для любой грани одна из принадлежащих ей дуг помечена ее номером. Такие карты мы будем называть *помеченными*. Помеченные карты (X, G) и (X', G') мы будем считать *изоморфными*, если существует изоморфизм карт $f : (X, G) \rightarrow (X', G')$, сохраняющий номера граней и пометки на дугах. Можно заметить, что описанная выше процедура склейки однозначно с точностью до изоморфизма задает карту, а также что любая карта может быть единственным с точностью до изоморфизма способом склеена из некоторого набора многоугольников.

Таким образом, число $\varepsilon_g(n, k)$ можно интерпретировать как количество помеченных карт с n ребрами и k гранями на связной поверхности рода g . При этом, числу $\varepsilon_0(0, 1)$ будет соответствовать сфера с отмеченной на ней единственной вершиной.

Здесь и далее под количеством помеченных карт определенного вида мы подразумеваем количество с точностью до изоморфизма, то есть количество классов изоморфных помеченных карт. Аналогично, говоря о всевозможных помеченных картах данного вида мы будем подразумевать классы изоморфных помеченных карт.

Замечание 1. Заметим, что согласно формуле Эйлера, число вершин карты равно $n - k + 2 - 2g$. Поскольку оно должно быть положительным, при $n < k + 2g - 1$ имеем $\varepsilon_g(n, k) = 0$.

1.2.2. Карты и перестановки. Рассмотрим карту (X, G) , где граф G не содержит изолированных вершин. Поставим в соответствие каждому ребру графа G пару противоположно направленных дуг и обозначим множество всех полученных дуг через A . Для каждой вершины графа G рассмотрим все исходящие из нее дуги и упорядочим их циклически в порядке обхода по часовой стрелке. Тем самым мы зададим перестановку σ на множестве A : $\sigma(e)$ – дуга, выходящая из той же вершины, что и e , и следующая за e при циклическом упорядочении всех дуг, выходящих из данной вершины. Определим также перестановки $\iota, \tau \in S(A)$ следующим образом: $\iota(e)$ – дуга, *противоположная* дуге e , то есть соответствующая тому же ребру графа G , но направленная в противоположную сторону, и $\tau = \sigma\iota$. Поскольку $\iota^2 = 1$, имеем также $\sigma = \tau\iota$.

Замечание 2. Пусть σ, ι, τ – определенные выше перестановки на множестве A дуг карты (X, G) , F – грань карты (X, G) и дуга $e \in A$ принадлежит грани F . Тогда дуга $\tau(e)$ принадлежит той же грани F и является следующей за e при обходе границы F против часовой стрелки (см. рисунок 1). Поэтому дугу $\tau(e)$ мы будем называть *последующей* за дугой e , а дугу $\tau^{-1}(e)$ – *предшествующей*. Отметим также, что циклы перестановки σ соответствуют вершинам, циклы ι – ребрам и циклы τ – граням карты (X, G) .

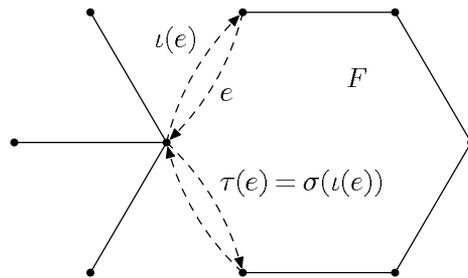


Рис. 1. Расположение дуг e и $\tau(e)$. Ребра обозначены сплошными, а дуги – пунктирными линиями.

Замечание 3. Широко известно (см., например, [5]), что для любой упорядоченной тройки (A, σ, ι) , где A – множество с четным числом

элементов, σ, ι – перестановки на этом множестве, и все циклы перестановки ι имеют длину 2, существует единственная с точностью до изоморфизма карта без изолированных вершин, для которой A будет множеством дуг, а σ и ι – определенными выше перестановками.

Отметим далее, что поскольку $\sigma = \tau\iota$, тройка (A, ι, τ) также задает единственную с точностью до изоморфизма карту без изолированных вершин (циклы перестановки ι будут соответствовать ребрам, а циклы τ – граням этой карты).

Теперь мы можем дать следующую эквивалентную переформулировку задачи о перечислении помеченных карт. Занумеруем все дуги помеченной карты числами от 1 до $2n$ в следующем естественном порядке: сначала последовательно нумеруем дуги первой грани, начиная с помеченной числом 1, в порядке обхода против часовой стрелки, далее аналогичным образом нумеруем дуги второй грани, и т. д. Тогда определенные выше перестановки ι и τ будут действовать на множестве $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Перестановка ι состоит из n циклов длины 2, а τ – из k циклов, элементы каждого из которых – последовательные натуральные числа. Как было отмечено в замечании 3, такая пара перестановок однозначно с точностью до изоморфизма задает карту, дуги которой занумерованы числами от 1 до $2n$ в указанном выше порядке. Таким образом, задача о перечислении помеченных карт эквивалентна задаче о перечислении пар перестановок описанного выше вида.

Поскольку циклы перестановки $\sigma = \tau\iota$ соответствуют вершинам карты, их количество равно $n - k + 2 - 2g$. Таким образом, число $\varepsilon_g(n, k)$ равно количеству пар перестановок $(\iota, \tau) \in S_{2n} \times S_{2n}$, таких, что перестановка ι состоит из n циклов длины 2, порождаемая ими группа $\langle \iota, \tau \rangle$ транзитивна и их произведение $\tau\iota$ разлагается в произведение $n - k + 2 - 2g$ независимых циклов.

§2. ОПЕРАЦИЯ УДАЛЕНИЯ РЕБРА

Основным инструментом в данной работе будет введенная в [10] операция удаления ребра. Напомним определение и основные свойства этой операции.

Пусть $M = (X, G)$ – связная помеченная карта рода g с v вершинами, $n+1$ ребром и k гранями, где $n > 0$. Обозначим через A множество дуг этой карты; через e_i – дугу, помеченную числом i ; через f_i – дугу, противоположную e_i , и через \tilde{e}_i соответствующее им ребро графа G .

На множестве A будут действовать определенные выше перестановки σ , ι и τ .

Удалим из графа G ребро \tilde{e}_1 . Если в получившемся графе есть изолированная вершина, удалим также и ее. Обозначим полученный граф через G' , а множество его дуг – через A' (т.е. $A' = A \setminus \{e_1, f_1\}$). Зададим на этом множестве перестановки $\iota' = \iota|_{A'}$ и $\sigma'(x) = \sigma^{s(x)}(x)$, где $s(x) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid \sigma^l(x) \in A'\}$. То есть перестановка ι' действует на элементы множества A' так же, как и перестановка ι , а перестановка σ' отличается от σ тем, что “пропускает” удаленные дуги e_1 и f_1 . Отметим, что число пропущенных дуг $s(x) - 1$ может быть равно 0, 1 или 2 (см. рисунок 2).

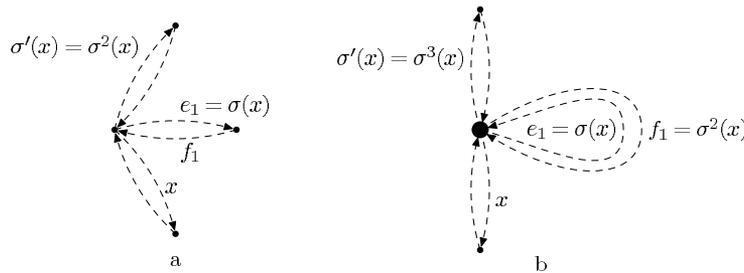


Рис. 2. Случай $s(x) = 2$ изображен на рисунке 2а, а случай $s(x) = 3$ – на рисунке 2б.

Как было отмечено в замечании 3, упорядоченная тройка (A', σ', ι') однозначно с точностью до изоморфизма задает карту \mathcal{M}' , не содержащую изолированных вершин, для которой A' будет множеством дуг, циклы перестановки ι' задают пары дуг, соответствующие ее ребрам, а циклы перестановки σ' соответствуют ее вершинам. Поскольку циклы перестановки ι' , соответствуют также и ребрам графа G' , а циклы σ' – его вершинам, мы получаем, что карта \mathcal{M}' имеет вид (X', G') , где X' – некоторая поверхность. Отметим, что в отличие от исходной карты, поверхность X' может быть несвязна.

Рассмотрим теперь перестановку $\tau' = \sigma'\iota'$ на множестве A' . Как было отмечено в замечании 2, ее циклы соответствуют граням карты $\mathcal{M}' = (X', G')$.

Лемма 1. Пусть $x \in A'$. Тогда

$$\tau'(x) = \begin{cases} \tau(x), & \tau(x) \in A' \\ \tau(f_1), & ((\tau(x) = e_1 \ \& \ \tau(f_1) \neq f_1) \vee (\tau(x) = f_1 \ \& \ \tau(e_1) = e_1)) \\ \tau(e_1), & ((\tau(x) = e_1 \ \& \ \tau(f_1) = f_1) \vee (\tau(x) = f_1 \ \& \ \tau(e_1) \neq e_1)). \end{cases}$$

Доказательство. Случай $\tau(x) \in A'$ очевиден. Рассмотрим случай $\tau(x) = e_1$ (случай $\tau(x) = f_1$ рассматривается аналогично). Пусть $y = \iota(x)$. Тогда $e_1 = \sigma(y)$. Предположим сначала, что $\tau(f_1) \neq f_1$. В этом случае $\sigma^2(y) = \sigma(e_1) = \sigma(\iota(f_1)) = \tau(f_1) \in A'$ (см. рисунок 3а), откуда

$$\tau'(x) = \sigma'(\iota'(x)) = \sigma'(y) = \sigma^2(y) = \tau(f_1).$$

Пусть теперь $\tau(f_1) = f_1$. Тогда $\sigma^2(y) = \tau(f_1) = f_1 \notin A'$ (см. рис. 3б), откуда

$$\tau'(x) = \sigma'(y) = \sigma^3(y) = \sigma(f_1) = \sigma(\iota(e_1)) = \tau(e_1). \quad \square$$

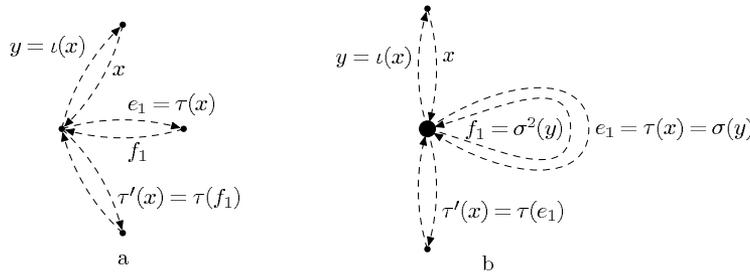


Рис. 3. Случай $\tau(f_1) \neq f_1$ изображен на рисунке 3а, а случай $\tau(f_1) = f_1$ — на рисунке 3б.

Замечание 4. Равенство $\tau(a) = a$ означает, что дуга a принадлежит грани, ограниченной единственным ребром, а соответствующее дуге a ребро \tilde{a} является петлей. Отметим, что оба равенства $\tau(e_1) = e_1$ и $\tau(f_1) = f_1$ одновременно выполняться не могут, поскольку карта (X, G) связна и $n > 0$.

Рассмотрим теперь циклы перестановки τ' . Очевидно, что циклы τ , не содержащие элементов e_1 и f_1 , являются также и циклами τ' . Рассмотрим циклы τ , содержащие e_1 и f_1 . Для них возможны следующие два случая:

- (1) e_1 и f_1 принадлежат разным циклам (e_1, a_1, \dots, a_p) и (f_1, b_1, \dots, b_q) ;
- (2) e_1 и f_1 принадлежат одному циклу $(e_1, a_1, \dots, a_p, f_1, b_1, \dots, b_q)$.

Фактически первый случай означает, что дуги e_1 и f_1 принадлежат разным граням карты (X, G) , а второй случай – что одной. В обоих случаях одно из чисел p или q может быть равно нулю: в первом случае это означает, что одна из дуг e_1 и f_1 является единственной дугой своей грани, а во втором – что эти дуги являются последовательными. Заметим также, что в первом случае граф G' обязательно будет связным. Рассмотрим эти случаи более подробно. В каждом из случаев мы вычислим количество граней и род карты (X', G') , а также расставим пометки так, чтобы получить помеченную карту или упорядоченную пару помеченных карт.

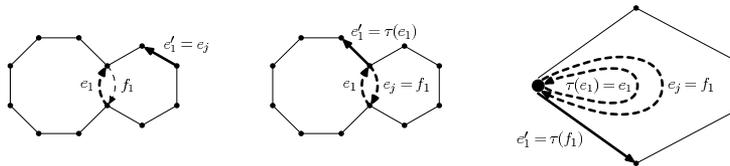


Рис. 4. Операция удаления ребра, случай 1. В каждом из подслучаев дуга, которая будет помечена числом 1, обозначена e'_1 .

1. e_1 и f_1 принадлежат разным циклам (e_1, a_1, \dots, a_p) и (f_1, b_1, \dots, b_q) . Из леммы 1 следует, что в перестановке τ' элементы этих двух циклов будут объединены в один цикл $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$. Фактически это означает, что в данном случае при удалении из карты (X, G) ребра \tilde{e}_1 две грани, граничившие по этому ребру, склеиваются в одну большую грань. Итого, мы получаем карту с v вершинами, n ребрами и $k - 1$ гранью. По формуле Эйлера, ее род равен g . Чтобы получить помеченную карту, присвоим грани, образовавшейся при удалении \tilde{e}_1 , номер 1; остальные грани перенумеруем числами от 2 до $k - 1$ в порядке возрастания исходных номеров и исправим соответствующим образом пометки на дугах. Осталось пометить числом 1 одну из дуг карты (X', G') . Пусть дуга f_1 принадлежала грани номер j исходной карты. Если $e_j \neq f_1$, то пометим числом 1 дугу e_j ; если $e_j = f_1$ и $\tau(e_1) \neq e_1$,

то пометим числом 1 дугу $\tau(e_1)$; если же $e_j = f_1$ и $\tau(e_1) = e_1$, то пометим числом 1 дугу $\tau(f_1)$ (см. рисунок 4). В итоге мы получим связную помеченную карту рода g с n ребрами и $k - 1$ гранью.

2. e_1 и f_1 принадлежат циклу $(e_1, a_1, \dots, a_p, f_1, b_1, \dots, b_q)$. В этом случае из леммы 1 следует, что в перестановке τ' будут циклы (a_1, \dots, a_p) и (b_1, \dots, b_q) (один из этих циклов может отсутствовать в случае, если $pq = 0$). То есть карта (X', G') содержит k граней, если $pq = 0$ и $k + 1$ грань, если $pq > 0$. Далее этот случай распадается на следующие три подслучая:

- 2.1. $pq = 0$ (то есть дуги e_1 и f_1 являются последовательными);
- 2.2. $pq > 0$ и граф G' связен;
- 2.3. $pq > 0$ и граф G' несвязен.

Рассмотрим эти случаи более подробно.

2.1. $pq = 0$. В этом случае дуги e_1 и f_1 являются последовательными, то есть выполняется одно из равенств: $e_1 = \tau(f_1)$ или $f_1 = \tau(e_1)$. Тогда один из концов ребра \tilde{e}_1 имеет степень 1. При удалении ребра \tilde{e}_1 этот конец становится изолированной вершиной и также удаляется. Следовательно, (X', G') – связная карта с $v - 1$ вершиной, n ребрами и k гранями. По формуле Эйлера, она имеет род g . Сохраним нумерацию граней и пометки на всех дугах, кроме удаленной дуги e_1 . Числом 1 пометим ту из дуг $\tau(e_1)$ и $\tau(f_1)$, которая принадлежит A' (см. рисунок 5). В итоге мы получим связную помеченную карту рода g с $v - 1$ вершиной, n ребрами и k гранями.

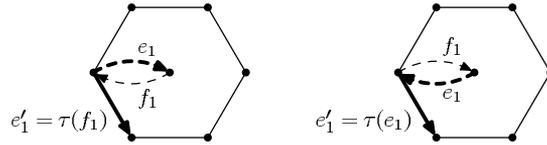


Рис. 5. Операция удаления ребра, случай **2.1**. Случай различного расположения дуг e_1 и f_1 .

2.2. $pq > 0$ и граф G' связен. В этом случае карта (X', G') связна и содержит v вершин, n ребер и $k + 1$ грань. По формуле Эйлера, она имеет род $g - 1$. Занумеруем числом 1 грань, соответствующую циклу (a_1, \dots, a_p) перестановки τ' и числом $k + 1$ грань, соответствующую циклу (b_1, \dots, b_q) . Отметим в этих гранях дуги a_1 и b_1 соответственно

(см. рисунок 6а). Все остальные пометки оставим без изменения. В итоге получится связная помеченная карта рода $g - 1$ с n ребрами и $k + 1$ гранью.

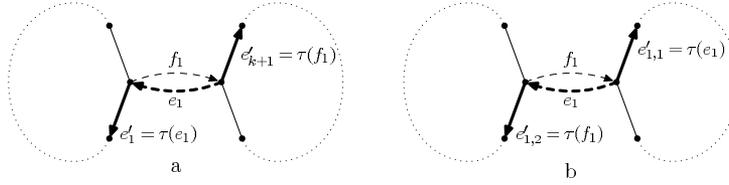


Рис. 6. Операция удаления ребра, случаи **2.2** и **2.3**.

В случае **2.2** (рис. 6а) дуги, которые будут помечены числами 1 и $k+1$, обозначены e'_1 и e'_{k+1} соответственно.

В случае **2.3** (рис. 6б) дуги, которые будут помечены числом 1 в картах (X'_1, G'_1) и (X'_2, G'_2) , обозначены $e'_{1,1}$ и $e'_{1,2}$ соответственно.

2.3. $pq > 0$ и граф G' несвязен. В этом случае карта (X', G') будет состоять из двух компонент связности. Очевидно, что концы ребра \tilde{e}_1 лежат в разных компонентах связности. Следовательно, в разных компонентах связности лежат также и дуги $a_1 = \tau(e_1)$ и $b_1 = \tau(f_1)$. Обозначим через (X'_1, G'_1) компоненту, содержащую первую из этих двух дуг и через (X'_2, G'_2) – вторую. Пометим числом 1 дуги a_1 и b_1 и занумеруем числом 1 содержащие их грани каждой из компонент (см. рисунок 6б). Остальные грани, принадлежащие каждой из компонент, и соответствующие им помеченные дуги перенумеруем в порядке возрастания исходных номеров. В итоге мы получим упорядоченную пару связных помеченных карт, в сумме содержащих v вершин, n ребер и $k + 1$ грань, причем каждая из карт содержит хотя бы одно ребро. Пусть первая из них имеет род g_1 , а вторая – род g_2 . Из формулы Эйлера следует, что $g_1 + g_2 = g$.

В работе [10] мы для каждого из случаев вычислили, сколькими способами будет получена каждая из карт указанного вида, если мы применим операцию удаления ребра ко всем связным помеченным картам рода g , содержащим $n+1$ ребер и k граней. Объединим эти результаты в следующую лемму.

Лемма 2 (см. [10, леммы 1–4]). *Применим операцию удаления ребра ко всем связным помеченным картам рода g с $n+1$ ребром и k гранями. Тогда*

1) *любая связная помеченная карта рода g с n ребрами и $k-1$ гранью, грань номер 1 которой содержит m дуг, будет получена $\frac{(m+1)(m+2)(k-1)}{2}$ способами;*

2) *любая связная помеченная карта рода g с n ребрами и k гранями будет получена двумя способами;*

3) *любая связная помеченная карта рода $g-1$ с n ребрами и $k+1$ гранью будет получена одним способом;*

4) *любая упорядоченная пара помеченных карт с ненулевым числом ребер, в сумме содержащих n ребер и $k+1$ грань, и имеющих суммарный род g , будет получена $C_{k-1}^{k_1-1} = C_{k-1}^{k_2-1}$ способами, где k_1 – количество граней в первой, а k_2 – во второй карте пары.*

Замечание 5. Случаи **2.1** и **2.3** очень похожи: фактически, вместо связной помеченной карты рода g с n ребрами и k гранями мы можем рассматривать упорядоченную пару из такой карты и карты, содержащей одну вершину, ноль ребер и одну грань – то есть сферу с отмеченной на ней одной точкой. Такая пара карт возникнет, если мы не будем удалять образующуюся при удалении ребра \check{e}_1 изолированную вершину, а поставим ей в соответствие указанную выше тривиальную карту. При этом будем считать тривиальную карту первой в упорядоченной паре, если дуга e_1 входит в ее единственную вершину, и второй, если e_1 из этой вершины выходит. В таком случае, каждая из указанных упорядоченных пар будет получена ровно одним способом, что соответствует формуле из пункта 4 леммы 2. Таким образом мы можем избавиться от случая **2.1** и убрать условие о том, что каждая карта пары содержит хотя бы одно ребро, в случае **2.3**.

Теорема 1. *Для любых целых чисел $n > 0$, $k > 0$ и $g \geq 0$ выполняется следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(n+1, k) = & \sum_{m_1+\dots+m_{k-1}=2n} \frac{(m_1+1)(m_1+2)(k-1)}{2} \varepsilon_g(m_1, \dots, m_{k-1}; k-1) \\ & + \sum_{\ell=1}^k \sum_{h=0}^g \sum_{i=0}^n C_{k-1}^{\ell-1} \varepsilon_h(i, \ell) \varepsilon_{g-h}(n-i, k-\ell+1) + \varepsilon_{g-1}(n, k+1). \end{aligned} \quad (5)$$

В случае, если $k-1 = 0$ или $g-1 = -1$, соответствующие слагаемые считаются равными нулю.

Доказательство. Применим операцию удаления ребра ко всем связным помеченным картам рода g с $n + 1$ ребром и k гранями. В тех случаях, когда получается связная помеченная карта рода g с n ребрами и k гранями, заменим ее на упорядоченную пару связных помеченных карт так, как это сказано в замечании 5. Подсчитав при помощи леммы 2 и замечания 5 количество способов, которым в результате примененных операций будет получен каждый из объектов (карта или упорядоченная пара карт) и сложив все полученные числа, мы получим требуемое равенство. \square

Следствие 1. При всех $n > 0$ выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_g(n, 2) = \varepsilon_{g+1}(n + 1) - \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) \varepsilon_{g+1-h}(n - i); \quad (6)$$

$$\varepsilon_g(n, 3) = \varepsilon_{g+1}(n + 1, 2) - 2 \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) \varepsilon_{g+1-h}(n - i, 2) - (n + 1)(2n + 1) \varepsilon_{g+1}(n). \quad (7)$$

Доказательство. Формулы (6) и (7) непосредственно следуют из теоремы 1 при подстановке в формулу (5) $g + 1$ вместо g , а также $k = 1$ и $k = 2$ соответственно. \square

§3. СКЛЕЙКИ ИЗ ДВУХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом разделе мы при помощи операции удаления ребра дадим элементарное доказательство формулы (4).

Теорема 2 (см. [4, теорема 4.2]). При всех $g \geq 0$

$$C_g^{[2]}(z) = \frac{P_g^{[2]}(z)}{(1 - 4z)^{3g+2}},$$

где $P_g^{[2]}(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий соотношению

$$P_g^{[2]}(z) = z^{-1} P_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}(z). \quad (8)$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (2), (3), (6) и учитывая тот факт, что $\varepsilon_{g+1}(0) = 0$ по замечанию 1, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_g^{[2]}(z) &= \sum_{n \geq 0} \varepsilon_g(n, 2) z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(\varepsilon_{g+1}(n+1) z^n - \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) z^i \cdot \varepsilon_{g+1-h}(n-i) z^{n-i} \right) \\
&= z^{-1} \mathbf{C}_{g+1}(z) - \sum_{h=0}^{g+1} \mathbf{C}_h(z) \mathbf{C}_{g+1-h}(z) \\
&= z^{-1} \mathbf{C}_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g \mathbf{C}_h(z) \mathbf{C}_{g+1-h}(z) - 2 \mathbf{C}_0(z) \mathbf{C}_{g+1}(z) \\
&= \frac{P_{g+1}(z)}{z(1-4z)^{3g+\frac{5}{2}}} - \sum_{h=1}^g \frac{P_h(z) P_{g+1-h}(z)}{(1-4z)^{3g+2}} - 2 \frac{(1-\sqrt{1-4z}) P_{g+1}(z)}{2z(1-4z)^{3g+\frac{5}{2}}} \\
&= \left(z^{-1} P_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}(z) \right) \frac{1}{(1-4z)^{3g+2}}.
\end{aligned}$$

В работе [3] было доказано, что при всех $h \geq 1$ многочлен $P_h(z)$ имеет целые коэффициенты и делится на z^{2h} . Из этого очевидно следует, что $P_g^{[2]}(z) = z^{-1} P_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}(z)$ — также многочлен с целыми коэффициентами. \square

Замечание 6. Многочлены $P_g(z)$ при $g = 1, \dots, 5$ были вычислены в работе [3]. Приведем эти значения.

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= z^2, \\
P_2(z) &= 21z^4 (z+1) \\
P_3(z) &= 11z^6 (158z^2 + 558z + 135), \\
P_4(z) &= 143z^8 (2339z^3 + 18378z^2 + 13689z + 1575), \\
P_5(z) &= 88179z^{10} (1354z^4 + 18908z^3 + 28764z^2 + 9660z + 675).
\end{aligned}$$

Многочлены $P_g^{[2]}(z)$ при $g = 0, 1, \dots, 5$ были вычислены в работе [4]. Приведем также и их.

$$\begin{aligned}
P_0^{[2]}(z) &= z, \\
P_1^{[2]}(z) &= z^3(20z + 21), \\
P_2^{[2]}(z) &= z^5(1696z^2 + 6096z + 1485), \\
P_3^{[2]}(z) &= z^7(330560z^3 + 2614896z^2 + 1954116z + 225225), \\
P_4^{[2]}(z) &= z^9(118652416z^4 + 1661701632z^3 \\
&\quad + 2532145536z^2 + 851296320z + 59520825), \\
P_5^{[2]}(z) &= z^{11}(68602726400z^5 + 1495077259776z^4 + 3850801696512z^3 \\
&\quad + 2561320295136z^2 + 505213089300z + 24325703325).
\end{aligned}$$

§4. СКЛЕЙКИ ИЗ ТРЕХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом разделе мы докажем аналогичную формуле (4) формулу для производящей функции $\mathbf{C}_g^{[3]}(z)$.

Теорема 3. *При всех $g \geq 0$*

$$\mathbf{C}_g^{[3]}(z) = \frac{P_g^{[3]}(z)}{(1-4z)^{3g+4,5}}, \quad (9)$$

где $P_g^{[3]}(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий соотношению

$$\begin{aligned}
P_g^{[3]}(z) &= z^{-1}P_{g+1}^{[2]}(z) - 2 \sum_{h=1}^g P_h(z)P_{g+1-h}^{[2]}(z) - 2z^2(1-4z)^2P_{g+1}''(z) \\
&\quad - ((48g+20)z+5)z(1-4z)P_{g+1}'(z) \\
&\quad - (48(2g+1)(3g+2)z^2 + (60g+44)z+1)P_{g+1}(z). \quad (10)
\end{aligned}$$

При этом многочлен $P_g^{[3]}(z)$ имеет степень не более $3g+3$ и делится на z^{2g+2} .

Доказательство. По формуле (7) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_g^{[3]}(z) &= \sum_{n \geq 0} \varepsilon_g(n, 3) z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \varepsilon_{g+1}(n+1, 2) z^{n-2} - 2 \sum_{n \geq 0} \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) z^i \cdot \varepsilon_{g+1-h}(n-i, 2) z^{n-i} \\
&\quad - \sum_{n \geq 0} (n+1)(2n+1) \varepsilon_{g+1}(n) z^n. \tag{11}
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1)(2n+1) \varepsilon_g(n) z^n.$$

Подставив его в формулу (11) и учитывая, что $P_0^{[2]}(z) = z$, а также воспользовавшись формулами (2), (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_g^{[3]}(z) &= z^{-1} \mathbf{C}_{g+1}^{[2]}(z) - 2 \sum_{h=1}^{g+1} \mathbf{C}_h(z) \mathbf{C}_{g+1-h}^{[2]}(z) - 2 \mathbf{C}_0(z) \mathbf{C}_{g+1}^{[2]}(z) - F_{g+1}(z) \\
&= \left(z^{-1} P_{g+1}^{[2]}(z) - 2 \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}^{[2]}(z) - 2z P_{g+1}(z) \right) \frac{1}{(1-4z)^{3g+4,5}} \\
&\quad - F_{g+1}(z). \tag{12}
\end{aligned}$$

Осталось вычислить $F_{g+1}(z)$. Применяя формулу (2) получим

$$\begin{aligned}
F_{g+1}(z) &= \sum_{n \geq 0} (n+1)(2n+1) \varepsilon_{g+1}(n) z^n \\
&= 2 \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) \varepsilon_{g+1}(n) z^n - 3 \sum_{n \geq 0} (n+1) \varepsilon_{g+1}(n) z^n \\
&= 2 (z^2 \mathbf{C}_{g+1}(z))'' - 3 (z \mathbf{C}_{g+1}(z))' \\
&= \mathbf{C}_{g+1}(z) + 5z \mathbf{C}'_{g+1}(z) + 2z^2 \mathbf{C}''_{g+1}(z) \\
&= \frac{2z^2 P''_{g+1}(z)}{(1-4z)^{3g+2,5}} + \frac{((48g+20)z+5)z P'_{g+1}(z)}{(1-4z)^{3g+3,5}} \\
&\quad + \frac{(48(2g+1)(3g+2)z^2 + (60g+42)z+1)P_{g+1}(z)}{(1-4z)^{3g+4,5}}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Подставив формулу (13) в формулу (12) получим требуемое равенство.

Осталось доказать, что вычисляемое по формуле (10) выражение $P_g^{[3]}(z)$ является многочленом с целыми коэффициентами, причем $\deg(P_g^{[3]}) \leq 3g + 3$ и $z^{2g+2} \mid P_g^{[3]}(z)$. Для этого воспользуемся доказанными в работах [3] и [4] свойствами многочленов $P_h(z)$ и $P_h^{[2]}(z)$: это многочлены с целыми коэффициентами, причем $\deg(P_h) \leq 3h - 1$, $z^{2h} \mid P_h(z)$, $\deg(P_h^{[2]}) \leq 3h + 1$ и $z^{2h+1} \mid P_h^{[2]}(z)$. Из этого следует, что все слагаемые в формуле (10) – многочлены с целыми коэффициентами степени не более $3g + 4$, кратные z^{2g+2} . Таким образом, $P_g^{[3]}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\deg(P_g^{[3]}) \leq 3g + 4$ и $z^{2g+2} \mid P_g^{[3]}(z)$. Пусть a_{3g+2} – коэффициент многочлена $P_{g+1}(z)$ при z^{3g+2} . Из формулы (10) легко видеть, что коэффициент $P_g^{[3]}(z)$ при z^{3g+4} равен

$$(-32(3g+2)(3g+1) + 4(48g+20)(3g+2) - 48(2g+1)(3g+2))a_{3g+2} = 0,$$

откуда $\deg(P_g^{[3]}) \leq 3g + 3$. \square

Следствие 2. При $g = 0, 1, \dots, 4$ многочлены $P_g^{[3]}(z)$ имеют следующий вид:

$$P_0^{[3]}(z) = 2z^2(4z + 3),$$

$$P_1^{[3]}(z) = 12z^4(68z^2 + 207z + 45),$$

$$P_2^{[3]}(z) = 6z^6(27592z^3 + 197646z^2 + 137934z + 15015),$$

$$P_3^{[3]}(z) = 8z^8(7468348z^4 + 98362965z^3 + 143262162z^2 + 46335375z + 3132675),$$

$$P_4^{[3]}(z) = 90z^{10}(383244280z^5 + 8028110250z^4 + 20036503284z^3 + 12962876908z^2 + 2494416504z + 117515475).$$

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из формулы 10 при подстановке в нее формул для $P_i(z)$ и $P_i^{[2]}(z)$, перечисленных в замечании 6. \square

Следствие 3 (см. [10, теорема 6]). Числа $\varepsilon_0(n, 3)$ при $n \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varepsilon_0(n, 3) = \frac{(8n+5)(n-1)n(n+1)}{210} C_{2n+1}^n = \frac{8n+5}{35} C_{2n+1}^n C_{n+1}^3.$$

Доказательство. Подставляя в формулу (9) выражение для $P_0^{[3]}(z)$, полученное в следствии 2, имеем

$$C_0^{[3]}(z) = \frac{8z^3 + 6z^2}{(1-4z)^{4,5}}. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (1-4z)^{-4,5} &= \sum_{n \geq 0} \binom{-4,5}{n} (-4z)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{4^n \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n+7}{2}}{n!} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{2^n (2n+7)!!}{7!! n!} z^n. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим коэффициент этого ряда при z^n через c_n (будем считать, что $c_n = 0$ при $n < 0$). Тогда при помощи формул (14) и (15) получаем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(n, 3) &= 8c_{n-3} + 6c_{n-2} \\ &= 8 \cdot \frac{2^{n-3} (2n+1)!! (n-2)(n-1)n}{105n!} + 6 \cdot \frac{2^{n-2} (2n+3)!! (n-1)n}{105n!} \\ &= \frac{2^{n-1} (2n+1)!! (n-1)n(8n+5)}{105n!} \\ &= \frac{(8n+5)(n-1)n(n+1)}{210} C_{2n+1}^n. \end{aligned} \quad \square$$

Следствие 4. Числа $\varepsilon_1(n, 3)$ при $n \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varepsilon_1(n, 3) = \frac{808n^2 + 99n - 454}{3003} C_{2n+1}^n C_{n+1}^5.$$

Доказательство. Подставляя в формулу (9) выражение для $P_1^{[3]}(z)$, полученное в следствии 2, имеем

$$C_0^{[3]}(z) = \frac{816z^6 + 2484z^5 + 540z^4}{(1-4z)^{7,5}}.$$

Аналогично доказательству следствия 3 получим, что

$$(1-4z)^{-7,5} = \sum_{n \geq 0} s_n z^n,$$

где $s_n = \frac{2^n (2n+13)!!}{13!! n!}$ и $s_n = 0$ при $n < 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(n, 3) &= 816s_{n-6} + 2484s_{n-5} + 540s_{n-4} \\
&= 816 \cdot \frac{2^{n-6}(2n+1)!!(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{13!!n!} \\
&\quad + 2484 \cdot \frac{2^{n-5}(2n+3)!!(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{13!!n!} \\
&\quad + 540 \cdot \frac{2^{n-4}(2n+5)!!(n-3)(n-2)(n-1)n}{13!!n!} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{n-3}(2n+1)!!(n-3)(n-2)(n-1)n(808n^2 + 99n - 454)}{13!!n!} \\
&= \frac{808n^2 + 99n - 454}{3003} C_{2n+1}^n C_{n+1}^5.
\end{aligned}$$

□

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Адрианов, *Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенные карт*. — Функци. анализ и его прилож. **31** (1997), вып. 3, 1–9.
2. N. V. Alexeev, J. E. Andersen, R. C. Penner, P. Zograf, *Enumeration of chord diagrams on many intervals and their non-orientable analogs*. (2013), [arXiv:1307.0967](https://arxiv.org/abs/1307.0967).
3. J. E. Andersen, R. C. Penner, C. M. Reidys, M. S. Waterman, *Enumeration of linear chord diagrams*. (2010), [arXiv:1010.5614](https://arxiv.org/abs/1010.5614).
4. J. E. Andersen, R. C. Penner, C. M. Reidys, R. R. Wang, *Linear chord diagrams on two intervals*. (2010), [arXiv:1010.5857](https://arxiv.org/abs/1010.5857).
5. R. Cori, A. Machì, *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey*. I, II, III. — Exposition. Math. **10** (1992), no. 5, 403–427, 429–447, 449–467.
6. I. P. Goulden, A. Nica, *A direct bijection for the Harer-Zagier formula*. — J. Combin. Theory Ser. A. **111** (2005), no. 2, 224–238.
7. I. P. Goulden, W. Slofstra, *Annular embeddings of permutations for arbitrary genus*. — J. Combin. Theory Ser. A. **117** (2010), 272–288.
8. В. А. Гурвич, Г. Б. Шабат, *Решение уравнения Харера-Цагира*. — Успехи мат. наук **48** (1993), вып. 1, 159–160.
9. J. Harer, D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*. — Inv. Math. **85** (1986), no. 3, 457–485.
10. А. В. Пастор, О. П. Родионова, *Некоторые формулы для числа склеек*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 117–156.

Pastor A. V. On a gluing of surfaces of genus g from 2 and 3 polygons.

In this paper, the number of ways to glue together several polygons into a surface of genus g has been investigated. We've given an elementary

proof on the formula for the generating function $C_g^{[2]}(z)$ of the number of gluings surface of genus g from two polygons (see also R. C. Penner et al. *Linear chord diagrams on two intervals*. (2010), [arXiv:1010.5857](https://arxiv.org/abs/1010.5857)). Moreover, we've proven a similar formula for gluings surface of genus g from three polygons. As a corollary, we've proven a direct formula for the number of gluings torus from three polygons.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет
Политехническая ул. 29,
195251 С.-Петербург, Россия
E-mail: pastor@pdmi.ras.ru

Поступило 31 октября 2013 г.