

А. В. Пастор

## О СКЛЕИВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ РОДА $g$ ИЗ ДВУХ И ТРЕХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Склейка поверхности из многоугольников.** Рассмотрим  $k$  кругов  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , на граничных окружностях которых отмечены в сумме  $2n$  точек, так, что на каждой из окружностей отмечена хотя бы одна точка. Пусть на каждом из кругов  $D_i$  задана определенная ориентация (направление обхода против часовой стрелки), и одна из дуг, на которые отмеченные точки делят его окружность, помечена его номером  $i$ . Разобьем произвольным образом на пары все  $2n$  получившихся дуг и склеим соответствующие дуги, учитывая ориентацию (склеиваемые дуги должны быть противоположно направлены). В результате получится компактная, ориентированная, но, возможно, несвязная поверхность без края. Отмеченные на граничных окружностях точки и дуги этих окружностей изображают на полученной поверхности некоторый граф.

Далее, мы для удобства будем называть круги  $D_1, D_2, \dots, D_k$  *многоугольниками*, отмеченные на кругах точки – *вершинами*, а дуги, на которые отмеченные точки разбивают окружность – *ребрами* многоугольника. Соответственно,  $m$ -угольником мы будем называть круг, на граничной окружности, которого отмечено ровно  $m$  точек. Тем самым мы допускаем существование многоугольников с одной и двумя вершинами. Для каждого из ребер многоугольника одну из его вершин назовем *начальной*, а другую *конечной*, в соответствии с порядком их следования при обходе против часовой стрелки.

Введем следующие обозначения.

Пусть  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ ,  $m_1 + \dots + m_k = 2n$  и  $D_1, \dots, D_k$  – многоугольники, содержащие  $m_1, \dots, m_k$  ребер соответственно. Обозначим через

---

*Ключевые слова:* карта, ориентируемая поверхность, склейка.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-3229.2012.1, гранта РФФИ No. 11-01-00760-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 г.

$\varepsilon_g(m_1, \dots, m_k; k)$  количество способов склеить из этих многоугольников связную ориентированную поверхность рода  $g$  (т.е. количество способов разбить все  $2n$  ребер на пары так, чтобы в результате склейки получилась связная поверхность рода  $g$ ). Также положим

$$\varepsilon_g(n, k) = \sum_{m_1 + \dots + m_k = 2n} \varepsilon_g(m_1, \dots, m_k; k).$$

То есть  $\varepsilon_g(n, k)$  – количество способов склеить связную ориентированную поверхность рода  $g$  из  $k$  многоугольников, в сумме имеющих  $2n$  ребер.

При  $n = 0$  положим  $\varepsilon_0(0, 1) = 1$  и  $\varepsilon_g(0, k) = 0$ , если  $g + k > 1$ .

Следуя обозначениям, введенным в работах [3] и [4], положим

$$\mathbf{C}_g^{[k]}(z) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_g(n, k) z^n.$$

При  $k = 1$  мы будем писать  $\varepsilon_g(n)$  и  $\mathbf{C}_g(z)$  вместо  $\varepsilon_g(n, 1)$  и  $\mathbf{C}_g^{[1]}(z)$  соответственно.

Склейки поверхности рода  $g$  из одного многоугольника впервые рассмотрели J. Nagel и D. Zagier в работе [9]. В этой работе количества таких склеек, были использованы для вычисления эйлеровой характеристики пространств модулей. В работе [9] была доказана следующая рекуррентная формула для чисел  $\varepsilon_g(n)$

$$\varepsilon_g(n) = \frac{2n-1}{n+1} (2\varepsilon_g(n-1) + (n-1)(2n-3)\varepsilon_{g-1}(n-2)). \quad (1)$$

В настоящее время известно порядка десяти различных доказательств формулы (1). В частности, в работе [6] приведено доказательство этой формулы посредством прямой биекции.

Явные формулы для чисел  $\varepsilon_g(n)$  при малых значениях  $g$  содержатся в работах [8] и [1].

Производящие функции  $\mathbf{C}_g(z)$  и  $\mathbf{C}_g^{[2]}(z)$  были рассмотрены в работах [3] и [4]. В работе [3] было доказано, что при всех  $g > 0$  выполняется соотношение

$$\mathbf{C}_g(z) = \frac{P_g(z)}{(1-4z)^{3g-\frac{1}{2}}}, \quad (2)$$

где  $P_g(z)$  – многочлен с целыми коэффициентами степени не более, чем  $3g-1$ , кратный  $z^{2g}$ , причем  $P_g(1/4) \neq 0$ .

При  $g = 0$  общеизвестно, что  $\varepsilon_0(n)$  –  $n$ -е число Каталана, поэтому

$$C_0(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}. \quad (3)$$

В работе [4] была получена аналогичная формула для производящей функции  $C_g^{[2]}(z)$ , а именно, доказано, что для любого  $g \geq 0$

$$C_g^{[2]}(z) = \frac{P_g^{[2]}(z)}{(1 - 4z)^{3g+2}}, \quad (4)$$

где  $P_g^{[2]}(z)$  – многочлен с целыми коэффициентами степени не более, чем  $3g + 1$ , кратный  $z^{2g+1}$ , причем  $P_g^{[2]}(1/4) > 0$ . Также была предложена формула выражающая многочлен  $P_g^{[2]}(z)$  через многочлены вида  $P_h(z)$ . В качестве следствия, в работе [4] были получены явные формулы для чисел  $\varepsilon_0(n, 2)$ ,  $\varepsilon_1(n, 2)$  и  $\varepsilon_2(n, 2)$ .

Другое доказательство явных формул для  $\varepsilon_0(n, 2)$  и  $\varepsilon_1(n, 2)$  было предложено в работе [10]. Также в работе [10] была получена явная формула для числа  $\varepsilon_0(n, 3)$ .

В ряде работ рассматривались аналогичные, но зависящие от большего числа параметров величины. Например, в работе [7] были рассмотрены числа  $a_{p,q,k}^{(s)}$ , которые можно интерпретировать как количество способов склеить  $p$ -угольник и  $q$ -угольник так, чтобы склеивались ровно  $s$  пар ребер, принадлежащих разным многоугольникам, и в результате склейки образовалась поверхность, на которой изображен граф на  $k$  вершинах. В работе [7] была получена формула для производящей функции  $A_{p,q}^{(s)}(x) = \sum_{k \geq 1} a_{p,q,k}^{(s)} x^k$ , однако полученная формула весьма громоздка и никаких (ни явных, ни рекуррентных) формул для самих чисел  $a_{p,q,k}^{(s)}$  из нее не выведено.

В работе [2] были рассмотрены числа  $N_{g,k}^l(\mathbf{b}, \boldsymbol{\ell}, \mathbf{n})$ , где  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)$ ,  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots)$  и  $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots)$  – последовательности целых неотрицательных чисел, удовлетворяющие ряду условий. Число  $N_{g,k}^l(\mathbf{b}, \boldsymbol{\ell}, \mathbf{n})$  можно интерпретировать как количество способов склеить из нескольких многоугольников связную ориентированную поверхность рода  $g$  с краем, где  $k$  – количество пар склеиваемых ребер и  $l$  – количество не склеенных ни с кем ребер. Кроме того, для всех  $i$  должны выполняться следующие условия: количество  $i$ -угольников в склеиваемом наборе должно быть равно  $b_i$ ; количество компонент связности края, содержащих ровно  $i$  ребер, должно быть равно  $n_i$  (при этом количество

вершин, не лежащих на краю, должно быть равно  $n_0$ : они считаются компонентами с нулем ребер). Параметр  $\ell_i$  определяется сложнее: он должен быть равен суммарному количеству компонент связности края и не лежащих на краю вершин, для которых равна  $i$  следующая величина. Для не лежащей на краю вершины это сумма ее степени и количества отмеченных вершин многоугольников, при склеивании которых была образована данная вершина (в каждом многоугольнике отмечена ровно одна вершина); для компоненты связности границы это будет та же величина, вычисленная для вершины, получающейся стягиванием данной компоненты в точку (ребра, лежащие на границе, при стягивании удаляются). В работе [2] был получен ряд соотношений на эти числа.

В настоящей работе мы дадим элементарное доказательство формулы (4), получим аналогичную формулу для  $C_g^{[3]}(z)$ , и в качестве следствия получим явную формулу для  $\varepsilon_1(n, 3)$ .

**1.2. Эквивалентные переформулировки.** Задача о перечислении склеек поверхности рода  $g$  из  $k$  многоугольников имеет ряд эквивалентных переформулировок. Ниже мы рассмотрим те из них, которые нам понадобятся в данной работе. О других эквивалентных переформулировках, таких как, например, перечисление хордовых диаграмм на нескольких интервалах, можно прочитать в работах [3, 4, 2].

### 1.2.1. Перечисление помеченных карт.

**Определение 1.** *Под картой мы будем понимать упорядоченную пару  $(X, G)$ , состоящую из конечного неориентированного графа  $G$  (возможно, содержащего кратные ребра и петли), вложенного в компактную ориентированную поверхность  $X$  без края таким образом, что связные компоненты множества  $X \setminus G$ , называемые гранями карты, гомеоморфны дискам.*

*Две карты  $(X, G)$  и  $(X', G')$  называются изоморфными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $f : X \rightarrow X'$ , такой, что  $f(G) = G'$ .*

*Родом карты  $(X, G)$  называется род поверхности  $X$ .*

Все необходимые сведения о картах (в частности, об их связи с перестановками) можно найти, например, в обзоре [5]. Ниже мы напомним понятия, необходимые для целей данной статьи.

Легко видеть, что описанная выше процедура склейки поверхности из  $k$  многоугольников дает карту с  $n$  ребрами и  $k$  гранями. Грани полученной карты соответствуют склеиваемым многоугольникам, поэтому занумеруем их числами от 1 до  $k$  так же, как и соответствующие многоугольники. Каждое ребро карты соответствует двум сторонам многоугольников. Поставим в соответствие каждому ребру карты пару противоположно направленных дуг (ориентированных ребер). Будем говорить, что дуга  $e$  принадлежит грани  $F$ , если она лежит на границе  $F$  и ориентирована в направлении обхода границы против часовой стрелки. Тогда, ориентируя ребра многоугольников против часовой стрелки, мы получим естественную биекцию между множеством всех дуг карты и множеством ребер многоугольников. Дуги карты, соответствующие помеченным ребрам многоугольников, пометим теми же числами.

Итак, мы получили карту с  $n$  ребрами и  $k$  гранями, грани которой занумерованы числами от 1 до  $k$ , и для любой грани одна из принадлежащих ей дуг помечена ее номером. Такие карты мы будем называть *помеченными*. Помеченные карты  $(X, G)$  и  $(X', G')$  мы будем считать *изоморфными*, если существует изоморфизм карт  $f : (X, G) \rightarrow (X', G')$ , сохраняющий номера граней и пометки на дугах. Можно заметить, что описанная выше процедура склейки однозначно с точностью до изоморфизма задает карту, а также что любая карта может быть единственным с точностью до изоморфизма способом склеена из некоторого набора многоугольников.

Таким образом, число  $\varepsilon_g(n, k)$  можно интерпретировать как количество помеченных карт с  $n$  ребрами и  $k$  гранями на связной поверхности рода  $g$ . При этом, числу  $\varepsilon_0(0, 1)$  будет соответствовать сфера с отмеченной на ней единственной вершиной.

Здесь и далее под количеством помеченных карт определенного вида мы подразумеваем количество с точностью до изоморфизма, то есть количество классов изоморфных помеченных карт. Аналогично, говоря о всевозможных помеченных картах данного вида мы будем подразумевать классы изоморфных помеченных карт.

**Замечание 1.** Заметим, что согласно формуле Эйлера, число вершин карты равно  $n - k + 2 - 2g$ . Поскольку оно должно быть положительным, при  $n < k + 2g - 1$  имеем  $\varepsilon_g(n, k) = 0$ .

**1.2.2. Карты и перестановки.** Рассмотрим карту  $(X, G)$ , где граф  $G$  не содержит изолированных вершин. Поставим в соответствие каждому ребру графа  $G$  пару противоположно направленных дуг и обозначим множество всех полученных дуг через  $A$ . Для каждой вершины графа  $G$  рассмотрим все исходящие из нее дуги и упорядочим их циклически в порядке обхода по часовой стрелке. Тем самым мы зададим перестановку  $\sigma$  на множестве  $A$ :  $\sigma(e)$  – дуга, выходящая из той же вершины, что и  $e$ , и следующая за  $e$  при циклическом упорядочении всех дуг, выходящих из данной вершины. Определим также перестановки  $\iota, \tau \in S(A)$  следующим образом:  $\iota(e)$  – дуга, *противоположная* дуге  $e$ , то есть соответствующая тому же ребру графа  $G$ , но направленная в противоположную сторону, и  $\tau = \sigma\iota$ . Поскольку  $\iota^2 = 1$ , имеем также  $\sigma = \tau\iota$ .

**Замечание 2.** Пусть  $\sigma, \iota, \tau$  – определенные выше перестановки на множестве  $A$  дуг карты  $(X, G)$ ,  $F$  – грань карты  $(X, G)$  и дуга  $e \in A$  принадлежит грани  $F$ . Тогда дуга  $\tau(e)$  принадлежит той же грани  $F$  и является следующей за  $e$  при обходе границы  $F$  против часовой стрелки (см. рисунок 1). Поэтому дугу  $\tau(e)$  мы будем называть *последующей* за дугой  $e$ , а дугу  $\tau^{-1}(e)$  – *предшествующей*. Отметим также, что циклы перестановки  $\sigma$  соответствуют вершинам, циклы  $\iota$  – ребрам и циклы  $\tau$  – граням карты  $(X, G)$ .

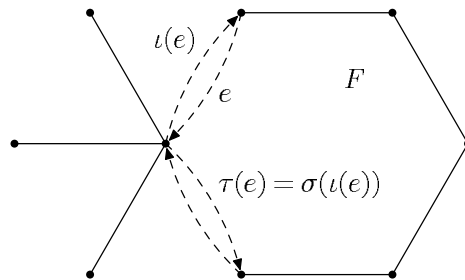


Рис. 1. Расположение дуг  $e$  и  $\tau(e)$ . Ребра обозначены сплошными, а дуги – пунктирными линиями.

**Замечание 3.** Широко известно (см., например, [5]), что для любой упорядоченной тройки  $(A, \sigma, \iota)$ , где  $A$  – множество с четным числом

элементов,  $\sigma, \iota$  – перестановки на этом множестве, и все циклы перестановки  $\iota$  имеют длину 2, существует единственная с точностью до изоморфизма карта без изолированных вершин, для которой  $A$  будет множеством дуг, а  $\sigma$  и  $\iota$  – определенными выше перестановками.

Отметим далее, что поскольку  $\sigma = \tau\iota$ , тройка  $(A, \iota, \tau)$  также задает единственную с точностью до изоморфизма карту без изолированных вершин (циклы перестановки  $\iota$  будут соответствовать ребрам, а циклы  $\tau$  – граням этой карты).

Теперь мы можем дать следующую эквивалентную переформулировку задачи о перечислении помеченных карт. Занумеруем все дуги помеченной карты числами от 1 до  $2n$  в следующем естественном порядке: сначала последовательно нумеруем дуги первой грани, начиная с помеченной числом 1, в порядке обхода против часовой стрелки, далее аналогичным образом нумеруем дуги второй грани, и т. д. Тогда определенные выше перестановки  $\iota$  и  $\tau$  будут действовать на множестве  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ . Перестановка  $\iota$  состоит из  $n$  циклов длины 2, а  $\tau$  – из  $k$  циклов, элементы каждого из которых – последовательные натуральные числа. Как было отмечено в замечании 3, такая пара перестановок однозначно с точностью до изоморфизма задает карту, дуги которой занумерованы числами от 1 до  $2n$  в указанном выше порядке. Таким образом, задача о перечислении помеченных карт эквивалентна задаче о перечислении пар перестановок описанного выше вида.

Поскольку циклы перестановки  $\sigma = \tau\iota$  соответствуют вершинам карты, их количество равно  $n - k + 2 - 2g$ . Таким образом, число  $\varepsilon_g(n, k)$  равно количеству пар перестановок  $(\iota, \tau) \in S_{2n} \times S_{2n}$ , таких, что перестановка  $\iota$  состоит из  $n$  циклов длины 2, порождаемая ими группа  $\langle \iota, \tau \rangle$  транзитивна и их произведение  $\tau\iota$  разлагается в произведение  $n - k + 2 - 2g$  независимых циклов.

## §2. ОПЕРАЦИЯ УДАЛЕНИЯ РЕБРА

Основным инструментом в данной работе будет введенная в [10] операция удаления ребра. Напомним определение и основные свойства этой операции.

Пусть  $M = (X, G)$  – связная помеченная карта рода  $g$  с  $v$  вершинами,  $n+1$  ребром и  $k$  гранями, где  $n > 0$ . Обозначим через  $A$  множество дуг этой карты; через  $e_i$  – дугу, помеченную числом  $i$ ; через  $f_i$  – дугу, противоположную  $e_i$ , и через  $\tilde{e}_i$  соответствующее им ребро графа  $G$ .

На множестве  $A$  будут действовать определенные выше перестановки  $\sigma$ ,  $\iota$  и  $\tau$ .

Удалим из графа  $G$  ребро  $\tilde{e}_1$ . Если в получившемся графе есть изолированная вершина, удалим также и ее. Обозначим полученный граф через  $G'$ , а множество его дуг – через  $A'$  (т.е.  $A' = A \setminus \{e_1, f_1\}$ ). Зададим на этом множестве перестановки  $\iota' = \iota|_{A'}$  и  $\sigma'(x) = \sigma^{s(x)}(x)$ , где  $s(x) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid \sigma^l(x) \in A'\}$ . То есть перестановка  $\iota'$  действует на элементы множества  $A'$  так же, как и перестановка  $\iota$ , а перестановка  $\sigma'$  отличается от  $\sigma$  тем, что “пропускает” удаленные дуги  $e_1$  и  $f_1$ . Отметим, что число пропущенных дуг  $s(x) - 1$  может быть равно 0, 1 или 2 (см. рисунок 2).

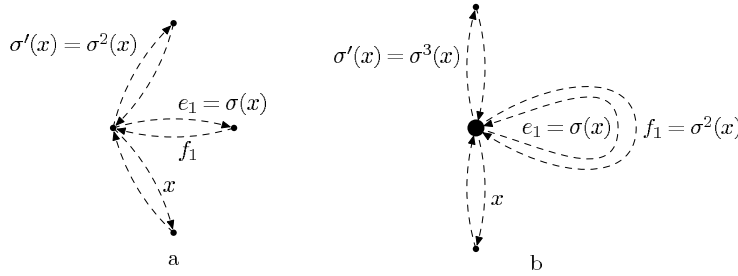


Рис. 2. Случай  $s(x) = 2$  изображен на рисунке 2а, а случай  $s(x) = 3$  – на рисунке 2б.

Как было отмечено в замечании 3, упорядоченная тройка  $(A', \sigma', \iota')$  однозначно с точностью до изоморфизма задает карту  $\mathcal{M}'$ , не содержащую изолированных вершин, для которой  $A'$  будет множеством дуг, циклы перестановки  $\iota'$  задают пары дуг, соответствующие ее ребрам, а циклы перестановки  $\sigma'$  соответствуют ее вершинам. Поскольку циклы перестановки  $\iota'$ , соответствуют также и ребрам графа  $G'$ , а циклы  $\sigma'$  – его вершинам, мы получаем, что карта  $\mathcal{M}'$  имеет вид  $(X', G')$ , где  $X'$  – некоторая поверхность. Отметим, что в отличие от исходной карты, поверхность  $X'$  может быть несвязна.

Рассмотрим теперь перестановку  $\tau' = \sigma'\iota'$  на множестве  $A'$ . Как было отмечено в замечании 2, ее циклы соответствуют граням карты  $\mathcal{M}' = (X', G')$ .



**Лемма 1.** Пусть  $x \in A'$ . Тогда

$$\tau'(x) = \begin{cases} \tau(x), & \tau(x) \in A' \\ \tau(f_1), & ((\tau(x) = e_1 \ \& \ \tau(f_1) \neq f_1) \vee (\tau(x) = f_1 \ \& \ \tau(e_1) = e_1)) \\ \tau(e_1), & ((\tau(x) = e_1 \ \& \ \tau(f_1) = f_1) \vee (\tau(x) = f_1 \ \& \ \tau(e_1) \neq e_1)). \end{cases}$$

**Доказательство.** Случай  $\tau(x) \in A'$  очевиден. Рассмотрим случай  $\tau(x) = e_1$  (случай  $\tau(x) = f_1$  рассматривается аналогично). Пусть  $y = \iota(x)$ . Тогда  $e_1 = \sigma(y)$ . Предположим сначала, что  $\tau(f_1) \neq f_1$ . В этом случае  $\sigma^2(y) = \sigma(e_1) = \sigma(\iota(f_1)) = \tau(f_1) \in A'$  (см. рисунок 3а), откуда

$$\tau'(x) = \sigma'(\iota'(x)) = \sigma'(y) = \sigma^2(y) = \tau(f_1).$$

Пусть теперь  $\tau(f_1) = f_1$ . Тогда  $\sigma^2(y) = \tau(f_1) = f_1 \notin A'$  (см. рис. 3б), откуда

$$\tau'(x) = \sigma'(y) = \sigma^3(y) = \sigma(f_1) = \sigma(\iota(e_1)) = \tau(e_1). \quad \square$$

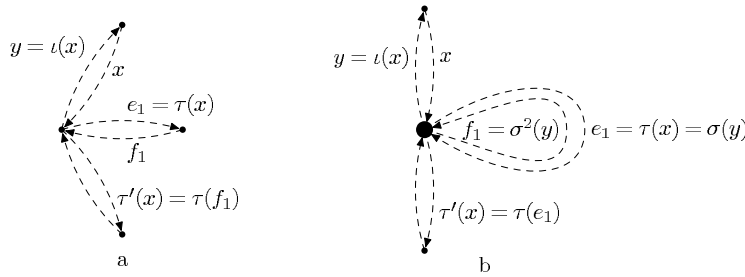


Рис. 3. Случай  $\tau(f_1) \neq f_1$  изображен на рисунке 3а, а случай  $\tau(f_1) = f_1$  — на рисунке 3б.

**Замечание 4.** Равенство  $\tau(a) = a$  означает, что дуга  $a$  принадлежит грани, ограниченной единственным ребром, а соответствующее дуге  $a$  ребро  $\tilde{a}$  является петлей. Отметим, что оба равенства  $\tau(e_1) = e_1$  и  $\tau(f_1) = f_1$  одновременно выполняться не могут, поскольку карта  $(X, G)$  связна и  $n > 0$ .

Рассмотрим теперь циклы перестановки  $\tau'$ . Очевидно, что циклы  $\tau$ , не содержащие элементов  $e_1$  и  $f_1$ , являются также и циклами  $\tau'$ . Рассмотрим циклы  $\tau$ , содержащие  $e_1$  и  $f_1$ . Для них возможны следующие два случая:

- (1)  $e_1$  и  $f_1$  принадлежат разным циклам  $(e_1, a_1, \dots, a_p)$  и  $(f_1, b_1, \dots, b_q)$ ;
- (2)  $e_1$  и  $f_1$  принадлежат одному циклу  $(e_1, a_1, \dots, a_p, f_1, b_1, \dots, b_q)$ .

Фактически первый случай означает, что дуги  $e_1$  и  $f_1$  принадлежат разным граням карты  $(X, G)$ , а второй случай – что одной. В обоих случаях одно из чисел  $p$  или  $q$  может быть равно нулю: в первом случае это означает, что одна из дуг  $e_1$  и  $f_1$  является единственной дугой своей грани, а во втором – что эти дуги являются последовательными. Заметим также, что в первом случае граф  $G'$  обязательно будет связным. Рассмотрим эти случаи более подробно. В каждом из случаев мы вычислим количество граней и род карты  $(X', G')$ , а также расставим пометки так, чтобы получить помеченную карту или упорядоченную пару помеченных карт.

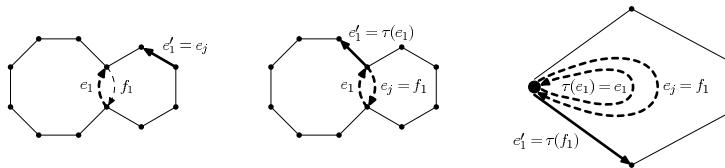


Рис. 4. Операция удаления ребра, случай 1. В каждом из подслучаев дуга, которая будет помечена числом 1, обозначена  $e'_1$ .

1.  $e_1$  и  $f_1$  принадлежат разным циклам  $(e_1, a_1, \dots, a_p)$  и  $(f_1, b_1, \dots, b_q)$ . Из леммы 1 следует, что в перестановке  $\tau'$  элементы этих двух циклов будут объединены в один цикл  $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ . Фактически это означает, что в данном случае при удалении из карты  $(X, G)$  ребра  $\tilde{e}_1$  две грани, граничившие по этому ребру, склеиваются в одну большую грань. Итого, мы получаем карту с  $v$  вершинами,  $n$  ребрами и  $k - 1$  гранью. По формуле Эйлера, ее род равен  $g$ . Чтобы получить помеченную карту, присвоим грани, образовавшейся при удалении  $\tilde{e}_1$ , номер 1; остальные грани перенумеруем числами от 2 до  $k - 1$  в порядке возрастания исходных номеров и исправим соответствующим образом пометки на дугах. Осталось пометить числом 1 одну из дуг карты  $(X', G')$ . Пусть дуга  $f_1$  принадлежала грани номер  $j$  исходной карты. Если  $e_j \neq f_1$ , то пометим числом 1 дугу  $e_j$ ; если  $e_j = f_1$  и  $\tau(e_1) \neq e_1$ ,

то пометим числом 1 дугу  $\tau(e_1)$ ; если же  $e_j = f_1$  и  $\tau(e_1) = e_1$ , то пометим числом 1 дугу  $\tau(f_1)$  (см. рисунок 4). В итоге мы получим связную помеченную карту рода  $g$  с  $n$  ребрами и  $k - 1$  гранью.

**2.**  $e_1$  и  $f_1$  принадлежат циклу  $(e_1, a_1, \dots, a_p, f_1, b_1, \dots, b_q)$ . В этом случае из леммы 1 следует, что в перестановке  $\tau'$  будут циклы  $(a_1, \dots, a_p)$  и  $(b_1, \dots, b_q)$  (один из этих циклов может отсутствовать в случае, если  $pq = 0$ ). То есть карта  $(X', G')$  содержит  $k$  граней, если  $pq = 0$  и  $k + 1$  грань, если  $pq > 0$ . Далее этот случай распадается на следующие три подслучая:

- 2.1.  $pq = 0$  (то есть дуги  $e_1$  и  $f_1$  являются последовательными);
- 2.2.  $pq > 0$  и граф  $G'$  связан;
- 2.3.  $pq > 0$  и граф  $G'$  несвязен.

Рассмотрим эти случаи более подробно.

**2.1.**  $pq = 0$ . В этом случае дуги  $e_1$  и  $f_1$  являются последовательными, то есть выполняется одно из равенств:  $e_1 = \tau(f_1)$  или  $f_1 = \tau(e_1)$ . Тогда один из концов ребра  $\tilde{e}_1$  имеет степень 1. При удалении ребра  $\tilde{e}_1$  этот конец становится изолированной вершиной и также удаляется. Следовательно,  $(X', G')$  – связная карта с  $v - 1$  вершиной,  $n$  ребрами и  $k$  гранями. По формуле Эйлера, она имеет род  $g$ . Сохраним нумерацию граней и пометки на всех дугах, кроме удаленной дуги  $e_1$ . Числом 1 пометим ту из дуг  $\tau(e_1)$  и  $\tau(f_1)$ , которая принадлежит  $A'$  (см. рисунок 5). В итоге мы получим связную помеченную карту рода  $g$  с  $v - 1$  вершиной,  $n$  ребрами и  $k$  гранями.

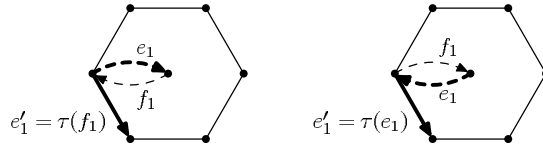


Рис. 5. Операция удаления ребра, случай **2.1**. Случаи различного расположения дуг  $e_1$  и  $f_1$ .

**2.2.**  $pq > 0$  и граф  $G'$  связан. В этом случае карта  $(X', G')$  связна и содержит  $v$  вершин,  $n$  ребер и  $k + 1$  грань. По формуле Эйлера, она имеет род  $g - 1$ . Занумеруем числом 1 грань, соответствующую циклу  $(a_1, \dots, a_p)$  перестановки  $\tau'$  и числом  $k + 1$  грань, соответствующую циклу  $(b_1, \dots, b_q)$ . Отметим в этих гранях дуги  $a_1$  и  $b_1$  соответственно

(см. рисунок 6а). Все остальные пометки оставим без изменения. В итоге получится связная помеченная карта рода  $g - 1$  с  $n$  ребрами и  $k + 1$  гранью.

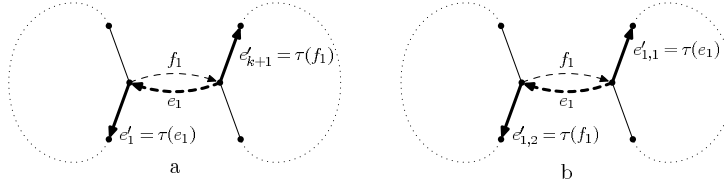


Рис. 6. Операция удаления ребра, случаи **2.2** и **2.3**.  
 В случае **2.2** (рис. 6а) дуги, которые будут помечены числами 1 и  $k+1$ , обозначены  $e'_1$  и  $e'_{k+1}$  соответственно. В случае **2.3** (рис. 6б) дуги, которые будут помечены числом 1 в картах  $(X'_1, G'_1)$  и  $(X'_2, G'_2)$ , обозначены  $e'_{1,1}$  и  $e'_{1,2}$  соответственно.

**2.3.**  $pq > 0$  и граф  $G'$  несвязен. В этом случае карта  $(X', G')$  будет состоять из двух компонент связности. Очевидно, что концы ребра  $\tilde{e}_1$  лежат в разных компонентах связности. Следовательно, в разных компонентах связности лежат также и дуги  $a_1 = \tau(e_1)$  и  $b_1 = \tau(f_1)$ . Обозначим через  $(X'_1, G'_1)$  компоненту, содержащую первую из этих двух дуг и через  $(X'_2, G'_2)$  – вторую. Пометим числом 1 дуги  $a_1$  и  $b_1$  и занумеруем числом 1 содержащие их грани каждой из компонент (см. рисунок 6б). Остальные грани, принадлежащие каждой из компонент, и соответствующие им помеченные дуги перенумеруем в порядке возрастания исходных номеров. В итоге мы получим упорядоченную пару связных помеченных карт, в сумме содержащих  $v$  вершин,  $n$  ребер и  $k + 1$  грань, причем каждая из карт содержит хотя бы одно ребро. Пусть первая из них имеет род  $g_1$ , а вторая – род  $g_2$ . Из формулы Эйлера следует, что  $g_1 + g_2 = g$ .

В работе [10] мы для каждого из случаев вычислили, сколькими способами будет получена каждая из карт указанного вида, если мы применим операцию удаления ребра ко всем связным помеченным картам рода  $g$ , содержащим  $n+1$  ребер и  $k$  граней. Объединим эти результаты в следующую лемму.

**Лемма 2** (см. [10, леммы 1–4]). *Применим операцию удаления ребра ко всем связным помеченным картам рода  $g$  с  $n+1$  ребром и  $k$  гранями. Тогда*

1) *любая связная помеченная карта рода  $g$  с  $n$  ребрами и  $k-1$  гранью, грань номер 1 которой содержит  $m$  дуг, будет получена  $\frac{(m+1)(m+2)(k-1)}{2}$  способами;*

2) *любая связная помеченная карта рода  $g$  с  $n$  ребрами и  $k$  гранями будет получена двумя способами;*

3) *любая связная помеченная карта рода  $g-1$  с  $n$  ребрами и  $k+1$  гранью будет получена одним способом;*

4) *любая упорядоченная пара помеченных карт с ненулевым числом ребер, в сумме содержащих  $n$  ребер и  $k+1$  грань, и имеющих суммарный род  $g$ , будет получена  $C_{k-1}^{k_1-1} = C_{k-1}^{k_2-1}$  способами, где  $k_1$  – количество граней в первой, а  $k_2$  – во второй карте пары.*

**Замечание 5.** Случаи **2.1** и **2.3** очень похожи: фактически, вместо связной помеченной карты рода  $g$  с  $n$  ребрами и  $k$  гранями мы можем рассматривать упорядоченную пару из такой карты и карты, содержащей одну вершину, ноль ребер и одну грань – то есть сферу с отмеченной на ней одной точкой. Такая пара карт возникнет, если мы не будем удалять образующуюся при удалении ребра  $\check{e}_1$  изолированную вершину, а поставим ей в соответствие указанную выше тривиальную карту. При этом будем считать тривиальную карту первой в упорядоченной паре, если дуга  $e_1$  входит в ее единственную вершину, и второй, если  $e_1$  из этой вершины выходит. В таком случае, каждая из указанных упорядоченных пар будет получена ровно одним способом, что соответствует формуле из пункта 4 леммы 2. Таким образом мы можем избавиться от случая **2.1** и убрать условие о том, что каждая карта пары содержит хотя бы одно ребро, в случае **2.3**.

**Теорема 1.** *Для любых целых чисел  $n > 0$ ,  $k > 0$  и  $g \geq 0$  выполняется следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(n+1, k) &= \sum_{m_1+\dots+m_{k-1}=2n} \frac{(m_1+1)(m_1+2)(k-1)}{2} \varepsilon_g(m_1, \dots, m_{k-1}; k-1) \\ &+ \sum_{\ell=1}^k \sum_{h=0}^g \sum_{i=0}^n C_{k-1}^{\ell-1} \varepsilon_h(i, \ell) \varepsilon_{g-h}(n-i, k-\ell+1) + \varepsilon_{g-1}(n, k+1). \end{aligned} \quad (5)$$

*В случае, если  $k-1 = 0$  или  $g-1 = -1$ , соответствующие слагаемые считаются равными нулю.*

**Доказательство.** Применим операцию удаления ребра ко всем связным помеченным картам рода  $g$  с  $n + 1$  ребром и  $k$  гранями. В тех случаях, когда получается связная помеченная карта рода  $g$  с  $n$  ребрами и  $k$  гранями, заменим ее на упорядоченную пару связных помеченных карт так, как это сказано в замечании 5. Подсчитав при помощи леммы 2 и замечания 5 количество способов, которым в результате примененных операций будет получен каждый из объектов (карта или упорядоченная пара карт) и сложив все полученные числа, мы получим требуемое равенство.  $\square$

**Следствие 1.** При всех  $n > 0$  выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_g(n, 2) = \varepsilon_{g+1}(n + 1) - \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) \varepsilon_{g+1-h}(n - i); \quad (6)$$

$$\varepsilon_g(n, 3) = \varepsilon_{g+1}(n + 1, 2) - 2 \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) \varepsilon_{g+1-h}(n - i, 2) - (n + 1)(2n + 1) \varepsilon_{g+1}(n). \quad (7)$$

**Доказательство.** Формулы (6) и (7) непосредственно следуют из теоремы 1 при подстановке в формулу (5)  $g + 1$  вместо  $g$ , а также  $k = 1$  и  $k = 2$  соответственно.  $\square$

### §3. СКЛЕЙКИ ИЗ ДВУХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом разделе мы при помощи операции удаления ребра дадим элементарное доказательство формулы (4).

**Теорема 2** (см. [4, теорема 4.2]). При всех  $g \geq 0$

$$C_g^{[2]}(z) = \frac{P_g^{[2]}(z)}{(1 - 4z)^{3g+2}},$$

где  $P_g^{[2]}(z)$  – многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий соотношению

$$P_g^{[2]}(z) = z^{-1} P_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}(z). \quad (8)$$

**Доказательство.** Воспользовавшись формулами (2), (3), (6) и учитывая тот факт, что  $\varepsilon_{g+1}(0) = 0$  по замечанию 1, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_g^{[2]}(z) &= \sum_{n \geq 0} \varepsilon_g(n, 2) z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left( \varepsilon_{g+1}(n+1) z^n - \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) z^i \cdot \varepsilon_{g+1-h}(n-i) z^{n-i} \right) \\
&= z^{-1} \mathbf{C}_{g+1}(z) - \sum_{h=0}^{g+1} \mathbf{C}_h(z) \mathbf{C}_{g+1-h}(z) \\
&= z^{-1} \mathbf{C}_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g \mathbf{C}_h(z) \mathbf{C}_{g+1-h}(z) - 2 \mathbf{C}_0(z) \mathbf{C}_{g+1}(z) \\
&= \frac{P_{g+1}(z)}{z(1-4z)^{3g+\frac{5}{2}}} - \sum_{h=1}^g \frac{P_h(z) P_{g+1-h}(z)}{(1-4z)^{3g+2}} - 2 \frac{(1-\sqrt{1-4z}) P_{g+1}(z)}{2z(1-4z)^{3g+\frac{5}{2}}} \\
&= \left( z^{-1} P_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}(z) \right) \frac{1}{(1-4z)^{3g+2}}.
\end{aligned}$$

В работе [3] было доказано, что при всех  $h \geq 1$  многочлен  $P_h(z)$  имеет целые коэффициенты и делится на  $z^{2h}$ . Из этого очевидно следует, что  $P_g^{[2]}(z) = z^{-1} P_{g+1}(z) - \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}(z)$  — также многочлен с целыми коэффициентами.  $\square$

**Замечание 6.** Многочлены  $P_g(z)$  при  $g = 1, \dots, 5$  были вычислены в работе [3]. Приведем эти значения.

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= z^2, \\
P_2(z) &= 21z^4 (z+1) \\
P_3(z) &= 11z^6 (158z^2 + 558z + 135), \\
P_4(z) &= 143z^8 (2339z^3 + 18378z^2 + 13689z + 1575), \\
P_5(z) &= 88179z^{10} (1354z^4 + 18908z^3 + 28764z^2 + 9660z + 675).
\end{aligned}$$

Многочлены  $P_g^{[2]}(z)$  при  $g = 0, 1, \dots, 5$  были вычислены в работе [4]. Приведем также и их.

$$\begin{aligned} P_0^{[2]}(z) &= z, \\ P_1^{[2]}(z) &= z^3(20z + 21), \\ P_2^{[2]}(z) &= z^5(1696z^2 + 6096z + 1485), \\ P_3^{[2]}(z) &= z^7(330560z^3 + 2614896z^2 + 1954116z + 225225), \\ P_4^{[2]}(z) &= z^9(118652416z^4 + 1661701632z^3 \\ &\quad + 2532145536z^2 + 851296320z + 59520825), \\ P_5^{[2]}(z) &= z^{11}(68602726400z^5 + 1495077259776z^4 + 3850801696512z^3 \\ &\quad + 2561320295136z^2 + 505213089300z + 24325703325). \end{aligned}$$

#### §4. СКЛЕЙКИ ИЗ ТРЕХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом разделе мы докажем аналогичную формуле (4) формулу для производящей функции  $\mathbf{C}_g^{[3]}(z)$ .

**Теорема 3.** *При всех  $g \geq 0$*

$$\mathbf{C}_g^{[3]}(z) = \frac{P_g^{[3]}(z)}{(1-4z)^{3g+4,5}}, \quad (9)$$

где  $P_g^{[3]}(z)$  – многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий соотношению

$$\begin{aligned} P_g^{[3]}(z) &= z^{-1}P_{g+1}^{[2]}(z) - 2 \sum_{h=1}^g P_h(z)P_{g+1-h}^{[2]}(z) - 2z^2(1-4z)^2P_{g+1}''(z) \\ &\quad - ((48g+20)z+5)z(1-4z)P_{g+1}'(z) \\ &\quad - (48(2g+1)(3g+2)z^2 + (60g+44)z+1)P_{g+1}(z). \quad (10) \end{aligned}$$

При этом многочлен  $P_g^{[3]}(z)$  имеет степень не более  $3g+3$  и делится на  $z^{2g+2}$ .



**Доказательство.** По формуле (7) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_g^{[3]}(z) &= \sum_{n \geq 0} \varepsilon_g(n, 3) z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \varepsilon_{g+1}(n+1, 2) z^{n-2} - 2 \sum_{n \geq 0} \sum_{h=0}^{g+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_h(i) z^i \cdot \varepsilon_{g+1-h}(n-i, 2) z^{n-i} \\
&\quad - \sum_{n \geq 0} (n+1)(2n+1) \varepsilon_{g+1}(n) z^n. \tag{11}
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$F_g(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1)(2n+1) \varepsilon_g(n) z^n.$$

Подставив его в формулу (11) и учитывая, что  $P_0^{[2]}(z) = z$ , а также воспользовавшись формулами (2), (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_g^{[3]}(z) &= z^{-1} \mathbf{C}_{g+1}^{[2]}(z) - 2 \sum_{h=1}^{g+1} \mathbf{C}_h(z) \mathbf{C}_{g+1-h}^{[2]}(z) - 2 \mathbf{C}_0(z) \mathbf{C}_{g+1}^{[2]}(z) - F_{g+1}(z) \\
&= \left( z^{-1} P_{g+1}^{[2]}(z) - 2 \sum_{h=1}^g P_h(z) P_{g+1-h}^{[2]}(z) - 2z P_{g+1}(z) \right) \frac{1}{(1-4z)^{3g+4,5}} \\
&\quad - F_{g+1}(z). \tag{12}
\end{aligned}$$

Осталось вычислить  $F_{g+1}(z)$ . Применяя формулу (2) получим

$$\begin{aligned}
F_{g+1}(z) &= \sum_{n \geq 0} (n+1)(2n+1) \varepsilon_{g+1}(n) z^n \\
&= 2 \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) \varepsilon_{g+1}(n) z^n - 3 \sum_{n \geq 0} (n+1) \varepsilon_{g+1}(n) z^n \\
&= 2 (z^2 \mathbf{C}_{g+1}(z))'' - 3 (z \mathbf{C}_{g+1}(z))' \\
&= \mathbf{C}_{g+1}(z) + 5z \mathbf{C}'_{g+1}(z) + 2z^2 \mathbf{C}''_{g+1}(z) \\
&= \frac{2z^2 P''_{g+1}(z)}{(1-4z)^{3g+2,5}} + \frac{((48g+20)z+5)z P'_{g+1}(z)}{(1-4z)^{3g+3,5}} \\
&\quad + \frac{(48(2g+1)(3g+2)z^2 + (60g+42)z+1)P_{g+1}(z)}{(1-4z)^{3g+4,5}}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Подставив формулу (13) в формулу (12) получим требуемое равенство.

Осталось доказать, что вычисляемое по формуле (10) выражение  $P_g^{[3]}(z)$  является многочленом с целыми коэффициентами, причем  $\deg(P_g^{[3]}) \leq 3g + 3$  и  $z^{2g+2} \mid P_g^{[3]}(z)$ . Для этого воспользуемся доказанными в работах [3] и [4] свойствами многочленов  $P_h(z)$  и  $P_h^{[2]}(z)$ : это многочлены с целыми коэффициентами, причем  $\deg(P_h) \leq 3h - 1$ ,  $z^{2h} \mid P_h(z)$ ,  $\deg(P_h^{[2]}) \leq 3h + 1$  и  $z^{2h+1} \mid P_h^{[2]}(z)$ . Из этого следует, что все слагаемые в формуле (10) – многочлены с целыми коэффициентами степени не более  $3g + 4$ , кратные  $z^{2g+2}$ . Таким образом,  $P_g^{[3]}(z) \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $\deg(P_g^{[3]}) \leq 3g + 4$  и  $z^{2g+2} \mid P_g^{[3]}(z)$ . Пусть  $a_{3g+2}$  – коэффициент многочлена  $P_{g+1}(z)$  при  $z^{3g+2}$ . Из формулы (10) легко видеть, что коэффициент  $P_g^{[3]}(z)$  при  $z^{3g+4}$  равен

$$(-32(3g+2)(3g+1) + 4(48g+20)(3g+2) - 48(2g+1)(3g+2))a_{3g+2} = 0,$$

откуда  $\deg(P_g^{[3]}) \leq 3g + 3$ .  $\square$

**Следствие 2.** При  $g = 0, 1, \dots, 4$  многочлены  $P_g^{[3]}(z)$  имеют следующий вид:

$$P_0^{[3]}(z) = 2z^2(4z + 3),$$

$$P_1^{[3]}(z) = 12z^4(68z^2 + 207z + 45),$$

$$P_2^{[3]}(z) = 6z^6(27592z^3 + 197646z^2 + 137934z + 15015),$$

$$P_3^{[3]}(z) = 8z^8(7468348z^4 + 98362965z^3 + 143262162z^2 + 46335375z + 3132675),$$

$$P_4^{[3]}(z) = 90z^{10}(383244280z^5 + 8028110250z^4 + 20036503284z^3 + 12962876908z^2 + 2494416504z + 117515475).$$

**Доказательство.** Утверждение непосредственно следует из формулы 10 при подстановке в нее формул для  $P_i(z)$  и  $P_i^{[2]}(z)$ , перечисленных в замечании 6.  $\square$

**Следствие 3** (см. [10, теорема 6]). Числа  $\varepsilon_0(n, 3)$  при  $n \geq 0$  удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varepsilon_0(n, 3) = \frac{(8n+5)(n-1)n(n+1)}{210} C_{2n+1}^n = \frac{8n+5}{35} C_{2n+1}^n C_{n+1}^3.$$

**Доказательство.** Подставляя в формулу (9) выражение для  $P_0^{[3]}(z)$ , полученное в следствии 2, имеем

$$C_0^{[3]}(z) = \frac{8z^3 + 6z^2}{(1-4z)^{4,5}}. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (1-4z)^{-4,5} &= \sum_{n \geq 0} \binom{-4,5}{n} (-4z)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{4^n \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n+7}{2}}{n!} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{2^n (2n+7)!!}{7!! n!} z^n. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим коэффициент этого ряда при  $z^n$  через  $c_n$  (будем считать, что  $c_n = 0$  при  $n < 0$ ). Тогда при помощи формул (14) и (15) получаем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(n, 3) &= 8c_{n-3} + 6c_{n-2} \\ &= 8 \cdot \frac{2^{n-3} (2n+1)!! (n-2)(n-1)n}{105n!} + 6 \cdot \frac{2^{n-2} (2n+3)!! (n-1)n}{105n!} \\ &= \frac{2^{n-1} (2n+1)!! (n-1)n(8n+5)}{105n!} \\ &= \frac{(8n+5)(n-1)n(n+1)}{210} C_{2n+1}^n. \end{aligned} \quad \square$$

**Следствие 4.** Числа  $\varepsilon_1(n, 3)$  при  $n \geq 0$  удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varepsilon_1(n, 3) = \frac{808n^2 + 99n - 454}{3003} C_{2n+1}^n C_{n+1}^5.$$

**Доказательство.** Подставляя в формулу (9) выражение для  $P_1^{[3]}(z)$ , полученное в следствии 2, имеем

$$C_0^{[3]}(z) = \frac{816z^6 + 2484z^5 + 540z^4}{(1-4z)^{7,5}}.$$

Аналогично доказательству следствия 3 получим, что

$$(1-4z)^{-7,5} = \sum_{n \geq 0} s_n z^n,$$

где  $s_n = \frac{2^n (2n+13)!!}{13!! n!}$  и  $s_n = 0$  при  $n < 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(n, 3) &= 816s_{n-6} + 2484s_{n-5} + 540s_{n-4} \\
&= 816 \cdot \frac{2^{n-6}(2n+1)!!(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{13!!n!} \\
&\quad + 2484 \cdot \frac{2^{n-5}(2n+3)!!(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{13!!n!} \\
&\quad + 540 \cdot \frac{2^{n-4}(2n+5)!!(n-3)(n-2)(n-1)n}{13!!n!} \\
&= \frac{3 \cdot 2^{n-3}(2n+1)!!(n-3)(n-2)(n-1)n(808n^2 + 99n - 454)}{13!!n!} \\
&= \frac{808n^2 + 99n - 454}{3003} C_{2n+1}^n C_{n+1}^5.
\end{aligned}$$

□

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Адрианов, *Аналог формулы Харера–Цагира для одноклеточных двукрашенные карт*. — Функци. анализ и его прилож. **31** (1997), вып. 3, 1–9.
2. N. V. Alexeev, J. E. Andersen, R. C. Penner, P. Zograf, *Enumeration of chord diagrams on many intervals and their non-orientable analogs*. (2013), arXiv:1307.0967.
3. J. E. Andersen, R. C. Penner, C. M. Reidys, M. S. Waterman, *Enumeration of linear chord diagrams*. (2010), arXiv:1010.5614.
4. J. E. Andersen, R. C. Penner, C. M. Reidys, R. R. Wang, *Linear chord diagrams on two intervals*. (2010), arXiv:1010.5857.
5. R. Cori, A. Machì, *Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey*. I, II, III. — Exposition. Math. **10** (1992), no. 5, 403–427, 429–447, 449–467.
6. I. P. Goulden, A. Nica, *A direct bijection for the Harer–Zagier formula*. — J. Combin. Theory Ser. A. **111** (2005), no. 2, 224–238.
7. I. P. Goulden, W. Slofstra, *Annular embeddings of permutations for arbitrary genus*. — J. Combin. Theory Ser. A. **117** (2010), 272–288.
8. В. А. Гурвич, Г. Б. Шабат, *Решение уравнения Харера–Цагира*. — Успехи мат. наук **48** (1993), вып. 1, 159–160.
9. J. Harer, D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*. — Inv. Math. **85** (1986), no. 3, 457–485.
10. А. В. Пастор, О. П. Родионова, *Некоторые формулы для числа склеек*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 117–156.

Pastor A. V. On a gluing of surfaces of genus  $g$  from 2 and 3 polygons.

In this paper, the number of ways to glue together several polygons into a surface of genus  $g$  has been investigated. We've given an elementary

proof on the formula for the generating function  $C_g^{[2]}(z)$  of the number of gluings surface of genus  $g$  from two polygons (see also R. C. Penner et al. *Linear chord diagrams on two intervals*. (2010), [arXiv:1010.5857](https://arxiv.org/abs/1010.5857)). Moreover, we've proven a similar formula for gluings surface of genus  $g$  from three polygons. As a corollary, we've proven a direct formula for the number of gluings torus from three polygons.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург;  
Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет  
Политехническая ул. 29,  
195251 С.-Петербург, Россия  
*E-mail*: [pastor@pdmi.ras.ru](mailto:pastor@pdmi.ras.ru)

Поступило 31 октября 2013 г.