Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 417, 2013 г.

А. Л. Глазман

ОБОБЩЕННЫЕ РОМАШКИ В k-СВЯЗНОМ ГРАФЕ. ЧАСТЬ 2.

Введение

Структура разбиения связного графа его точками сочленения (то есть, вершинами, удаление которых делает граф несвязным) широко известна [1]. Для описания этой структуры удобно использовать так называемое дерево блоков и точек сочленения, вершинами которого являются точки сочленения и блоки – части, на которые они разбивают граф. В 1966 году W. T. Tutte [2] описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе и показал, что она имеет много общего со структурой точек сочленения. В частности, была предложена конструкция дерева блоков для двусвязного графа.

Попытки построения аналогичных конструкций для графов большей связности делались в работах [5–7]. Однако при этом возникают серьезные трудности, связанные с тем, что k-вершинные разделяющие множества k-связного графа могут быть зависимы, то есть при удалении одного из них вершины другого оказываются в разных компонентах связности. Это приводит к тому, что получающиеся конструкции дерева блоков для k-связного графа оказываются неоднозначными — они существенно зависят от того, в каком порядке при их построении выбираются разделяющие множества. Кроме того, подобные конструкции учитывают не все k-вершинные разделяющие множества графа: разбивая граф при помощи одного из этих множеств мы автоматически теряем информацию обо всех зависимых с ним разделяющих множествах. В работах [6, 7] эти трудности были частично преодолены для графов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Однако в общем случае вопрос об описании структуры разбиения k-связного графа всеми его k-вершинными разделяющими множествами при $k \geqslant 3$ оставался открытым.

Ключевые слова: k-связный граф, четырехсвязный граф, разделяющее множество.

В работе [4] был разработан новый метод изучения структуры взаимного расположения k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа – теорема о разбиении. С ее помощью был получен ряд результатов для случая произвольного k. В качестве иллюстрации работы этого метода в конце работы [4] приведено достаточно наглядное и простое описание структуры двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. Это описание в целом аналогично конструкции Татта [2], но хорошо иллюстрирует эффективность нового метода.

В 2008 году Д. В. Карпов и А. В. Пастор [3] описали структуру трехсвязного графа. В их работе трехвершинные множества разбиваются на вполне определенные группы, которые называются комплексами. Благодаря этому новому определению удается построить гипердерево, вершинами которого являются комплексы. То есть и в случае трехсвязного графа получается некий аналог дерева блоков и точек сочленения. Соответственно, окончательной целью исследования структуры четырехсвязных графов и взаимного расположения четырехвершинных разрезов является построение аналогичного гипердерева.

Это продолжение работы [8]. Для полноты мы приводим здесь все необходимые определения и формулировки нужных нам утверждений, доказанных в той работе.

Введем основные понятия, которые будем использовать в течение всей работы. Всюду в настоящей работе под графом будет пониматься конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать через $\mathrm{V}(G)$ и $\mathrm{E}(G)$ соответственно. Степень вершины V в графе G мы будем обозначать через $d_G(v)$.

Мы будем называть две вершины графа связанными, если существует путь между ними. Под компонентой связности графа в работе подразумевается подграф, индуцированный на максимальном по включению множестве его попарно связанных вершин.

Граф G называется *k-связным*, если он содержит как минимум $k+1$ вершину и сохраняет связность при удалении любых $k-1$ вершин. В частности, при $k=2$ такой граф называется двусвязным, при $k=3$ – трехсвязным, а при $k=4$ – четырехсвязным.

Для любого множества $M \subset \mathrm{V}(G) \cup \mathrm{E}(G)$ мы будем обозначать через $G-M$ граф, полученный из G в результате удаления вершин и ребер множества M и всех ребер, инцидентных вершинам множества M.

Множество $S \subset \mathrm{V}(G)$ называется *разделяющим*, если граф $G - S$ несвязен. Семейство всех разделяющих множеств графа G мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(G)$, а семейство всех его k-вершинных разделяющих множеств (мы будем называть такие множества *k-разделяющими*) будем обозначать через $\mathfrak{R}_k(G)$.

Мы будем использовать терминологию из работы [4].

Определение 1. 1) *Пусть $R, X \subset \mathrm{V}(G)$. Будем говорить, что множество R разделяет множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

2) *Пусть $U, W \subset \mathrm{V}(G)$. Будем говорить, что множество R отделяет множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R отделяет вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R отделяет вершину u от вершины w.

Определение 2. 1) *Будем называть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ независимыми, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае, назовем эти множества зависимыми.*

2) *Каждому набору $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ поставим в соответствие граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$, *вершины которого – множества набора $\mathfrak{S}$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие множества зависимы.*

Таким образом, набор $\mathfrak{S}$ разбивается на *компоненты зависимости* – поднаборы, соответствующие компонентам связности графа $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

Нетрудно доказать, что если T не разделяет S, то S не разделяет T, то есть, эти множества независимы (см. [5,6]).

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.*

1) *Часть разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ (или часть $\mathfrak{S}$-разбиения) – это подграф графа G, индуцированный на максимальном по включению множестве $A \subset \mathrm{V}(G)$ таком, что никакое множество $S \in \mathfrak{S}$ не разделяет A. Будем обозначать через* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *множество всех таких частей. Если набор $\mathfrak{S}$ состоит из одного множества S, то будем обозначать множество всех частей $\{S\}$-разбиения через* $\mathrm{Part}(S)$.

2) *Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, будем называть внутренними, а множество всех*

таких вершин – внутренностью части A, которую будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$. *Вершины части A, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть граничными, а множество всех этих вершин — границей части A и обозначать через* $\mathrm{Bound}(A)$.

3) *Назовем часть A пустой, если* $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$ *и непустой в противном случае. Назовем часть A малой, если $|V(A)| < k$ и нормальной, если $|V(A)| \geqslant k$.*

Нетрудно понять, что две различные части $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ либо не имеют общих вершин, либо $V(A_1) \cap V(A_2)$ содержится в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$. В [4, теорема 2] доказано, что граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины вне A и отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $\mathrm{V}(G) \setminus \mathrm{V}(A)$.

Важным частным случаем разбиения k-связного графа набором k-разделяющих множеств является разбиение этого графа одним k-разделяющим множеством S. Понятно, что для любой части $F \in \mathrm{Part}(S)$ ее внутренность $\mathrm{Int}(F)$ есть множество вершин одной из компонент связности графа $G-S$. Поскольку никакое подмножество множества S не является разделяющим множеством графа G, каждая вершина множества S должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(F)$, то есть подграф F связен.

Отметим, что каждая вершина x графа G смежна хотя бы с одной другой вершиной y. Тогда никакое множество не может разделить x и y, следовательно, для произвольного набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ любая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержит хотя бы две вершины.

§1. Ромашки

Одним из важнейших объектов в исследовании структуры k-связных графов является ромашка. Напомним общее определение для произвольного k.

Пусть $m \geqslant 4$, и множества $P, Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathrm{V}(G)$ удовлетворяют следующим условиям для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$0 \leqslant |P| < k, \qquad Q_i \cap P = \varnothing, \qquad |Q_i| = \frac{k - |P|}{2}.$$

Рассмотрим набор $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$. Множества $Q_1, \ldots, Q_m$ считаем *циклически упорядоченными*, то есть их циклическая перестановка не меняет F. Введем обозначение $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$.

Определение 4. *Назовем* Q_i *и* Q_j близкими*, если включение* $Q_k \subset Q_{i,j}$ *выполняется либо для всех* k *от* i *до* j*, либо для всех* k *от* j *до* i*.*

Замечание 1. Индексы у нас являются вычетами по модулю m, и удобно представлять их себе как числа от 1 до m, расставленные по кругу – по часовой стрелке для определенности. Для $i \neq j$ под индексами от i до j стоит понимать индексы, лежащие той из дуг между i и j, на которой находится индекс $i+1$.

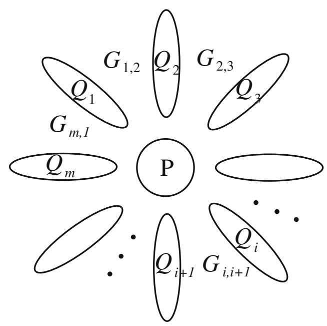


Рис. 1. Ромашка.

Определение 5. 1) *Пусть существует такой набор* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$*, состоящий из множеств вида* $Q_{i,j}$*, где* i *и* j *– не соседние, что разбиение* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *состоит из* m *частей* $G_{1,2}$*,* $G_{2,3}$*,…,* $G_{m,1}$*, причем* $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$*. Кроме того, пусть из того, что* Q_i *и* Q_j *пересекаются, следует, что они близки. Тогда назовем набор* F *ромашкой.*

2) *Множество* P *назовем центром, а множества* $Q_1, \dots, Q_m$ *— лепестками этой ромашки.* Разбиением графа G ромашкой F *назовем* $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, \dots, G_{m,1}\}$*, а подграфы* $G_{i,i+1}$ *будем называть* частями *этого разбиения. Если никакие два лепестка ромашки* F *не пересекаются, то назовем эту ромашку правильной. Будем говорить, что набор* $\mathfrak{S}$ *порождает ромашку* F*.*

Определение 6. 1) *Пусть* $S \in \mathfrak{R}_k(G)$*, причем* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$*. Рассмотрим произвольное* j *от 2 до* m *и некоторое дизъюнктное разбиение* $I = \{I_1, \dots, I_j\}$ *множества натуральных чисел от 1 до* m *на* j *подмножеств. Рассмотрим такие индуцированные подграфы*

$B_1, \ldots, B_j$ *графа* G, *что* $\mathrm{V}(B_t) = \cup_{i \in I_t} \mathrm{V}(A_i)$. *Будем говорить, что* S *делит граф* G *на* обобщенные части $B_1, \ldots, B_j$, *согласованные с разбиением* I. *Обозначать набор обобщенных частей, согласованных с* I, *будем так* – $\mathrm{Part}_I(S)$.

2) *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ – *это набор разделяющих множеств* $S_1, ..., S_t$, *которые делят граф на* $m_1, \ldots, m_t$ *частей соответственно. Рассмотрим набор* $\mathfrak{I} = \{I^1, \ldots, I^t\}$ *такой, что для всех* j *от 1 до* t *множество* I^j *является разбиением чисел от 1 до* m_j *на несколько (более одной) групп. Обобщенной частью разбиения графа набором разделяющих множеств* $\mathfrak{S}$, *согласованной с набором разбиений* $\mathfrak{I}$, *назовем максимальный по включению индуцированный подграф, целиком лежащий в одной из обобщенных частей разбиения графа каждым из множеств набора. Множество всех обобщенных частей разбиения графа набором* $\mathfrak{S}$, *согласованных с набором разбиений* $\mathfrak{I}$, *будем обозначать через* $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{S})$ *и называть* обобщенным разбиением *графа набором* $\mathfrak{S}$, *согласованным с* $\mathfrak{I}$.

3) *Внутренность и граница обобщенной части определяется так же, как внутренность и граница обычной.*

Замечание 2. Заметим, что все утверждения из [4] верны и для обобщенных частей, и глобальная причина этого такова – в их доказательстве не использовалась связность подграфов, индуцированных на внутренности частей, а до тех пор, пока мы ей не пользуемся, понятия обобщенной части и обычной части неразличимы.

Определение 7. 1) *Пусть существует такие набор* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, *состоящий из множеств вида* $Q_{i,j}$, *где* i *и* j – *не соседние, и набор разбиений* $\mathfrak{I}$, *что обобщенное разбиение* $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{S})$ *состоит из* m *частей* $G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}$, *причем* $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. *Кроме того, пусть из того, что* Q_i *и* Q_j *пересекаются, следует, что они близки. Тогда назовем набор* F *обобщенной ромашкой.*

2) Центр *и* лепестки *обобщенной ромашки определим так же, как соответствующие понятия для обычной ромашки.* Разбиением графа G обобщенной ромашкой F *назовем* $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(F) = \{G_{1,2}, \ldots, G_{m,1}\}$, *а подграфы* $G_{i,i+1}$ *будем называть* частями *этого разбиения.*

Замечание 3. Обычная ромашка, очевидно, является частным случаем обобщенной.

В дальнейшем считаем, что в графе больше, чем $2k - |P|$ вершин.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки, лепестки располагаем в циклическом порядке, а их индексы будем рассматривать как вычеты по модулю количества лепестков. Введем обозначение $G_{i,j} = G(\cup_{x=i}^{j-1}\mathrm{V}(G_{x,x+1}))$.

Удобно рассматривать ромашку, расположив лепестки $Q_1, \dots, Q_m$ по окружности в соответствии с их циклическим порядком, а в центр поместив P (см. рис. 1). Между лепестками Q_i и Q_{i+1} поместим часть $G_{i,i+1}$. В данном случае фраза "между лепестками" имеет вполне конкретный смысл – естественно, часть $G_{i,i+1}$ располагаем с той стороны, где нет других лепестков. В дальнейшем для того, чтобы понять, что означает словосочетание *между лепестками* Q_i *и* Q_j предлагается воспользоваться только что нарисованной картиной – берем или все, что лежит на одной дуге окружности или все, что на другой.

Определение 8. Внутренними множествами *обобщенной ромашки назовем множества* $Q_{i,j}$ *для всех пар неблизких лепестков. Обозначим через* $\mathfrak{R}(F)$ *набор, состоящий из внутренних множеств ромашки* F. Границей *ромашки назовем множества* $Q_{i,i+1}$ *для всех* i.

Лемма 1. [8, лемма 2] *Для обобщенной ромашки* $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ *справедливы следующие утверждения.*

1) *Лепестки с разными номерами не совпадают.*

2) *Если лепестки* Q_i *и* Q_j *пересекаются, то либо* $\mathrm{V}(G_{i,j})$, *либо* $\mathrm{V}(G_{j,i})$ *совпадает с* $Q_{i,j}$.

3) *Если множество* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$, *то оно разбивает граф ровно на две обобщенные части, причем это* $G_{i,j}$ *и* $G_{j,i}$.

4) *Если множество* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$ *и лепесток* $Q_k \subset Q_{i,j}$, *то* $k = i$ *или* $k = j$.

5) *Всякое множество из набора* $\mathfrak{S}$ *представляется в виде* $Q_{i,j}$ *единственным образом.*

6) *Если множество* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$, *то* Q_i *и* Q_j *не являются близкими.*

7) *Для каждого лепестка* Q_i *найдется такое* j, *что* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$.

8) *Если* $v \in Q_i \cap Q_j$ *и* $\mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$, *то все лепестки с номерами от* i *до* j *содержат* v.

9) *Если* Q_i *и* Q_j *– это два различных лепестка, причем* $j \neq i-1$, *то* $Q_k \cap \mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_k \cap (Q_i \cup Q_j)$ *для произвольного* k *от* $j+1$ *до* $i-1$.

Определение 9. *Пусть* $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ *– обобщенная ромашка,* $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, \dots, G_{m,1}\}$. *Для неравных* i *и* j *введем понятия* границы *и* внутренности $G_{i,j}$. Границей $G_{i,j}$ *называем* $\mathrm{Bound}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$, *а* внутренностью – $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = \mathrm{V}(G_{i,j} - Q_{i,j})$. *Соответственно, называем часть* $G_{i,j}$ пустой*, если у нее пустая внутренность.*

Лемма 2. [8, лемма 5] *Пусть набор разделяющих множеств* $\mathfrak{S}$ *порождает обобщенную ромашку* F. *Известно, что вершина* u *содержится в каждом из множеств набора* $\mathfrak{S}$. *Тогда* u *лежит в центре ромашки* F.

Лемма 3. [8, лемма 6] *Пусть два несоседних лепестка* Q_i *и* Q_j *обобщенной ромашки* F *пересекаются, причем именно часть* $G_{i,j}$ *является пустой. Тогда имеет место следующее включение множеств:*

$$Q_i \cap Q_{i+1} \supset Q_i \cap Q_{i+2} \supset \cdots \supset Q_i \cap Q_j.$$

Лемма 4. [8, лемма 7] *Для любого* i *найдется лепесток* Q_j, *не пересекающийся ни с* Q_i, *ни с* Q_{i+1}.

Следствие 1. [8, следствие 5] *Пусть* F *и* F' *– это две обобщенные ромашки с одинаковыми по величине центрами, а разделяющее множество* S *является внутренним для обеих этих ромашек, причем в первом случае разбиение на обобщенные части согласовано с разбиением* I, *а во втором – с* I'. *Тогда* $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(S) = \mathrm{Part}_{\mathfrak{I}'}(S)$.

Лемма 5. [8, лемма 9] *Пусть* F *– обобщенная ромашка, а* Q_i *и* Q_j *– это два ее различных лепестка. Рассмотрим множество* $T \subset Q_{i,j}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $G_{i,j}$ *непуста, а* $T \neq Q_{i,j}$, *то граф* $G_{i,j} - T$ *связен.*

2) *Если* $T = P \cup Q_i \cup (Q_j \setminus \{u\})$, *где* $u \in Q_j$, *то граф* $G_{i,j} - T$ *является либо пустым, либо связным.*

Определение 10. Множеством вершин ромашки *назовем множество* $V(F)$, *состоящее из всех вершин графа, лежащих в центре или хотя бы в одном ее лепестке. Будем говорить, что ромашка* F *содержит ромашку* F', *если у них общий центр и* $V(F') \subset V(F)$. *Назовем ромашку* F *максимальной, если все ромашки, в которых она содержится, имеют то же множество вершин, и лепестков в них не больше, чем в* F.

Определение 11. *Для произвольных двух множеств вершин* A *и* B *графа* G *через* $\mathrm{E}(A, B)$ *будем обозначать множество ребер этого графа, соединяющих вершины из* A *с вершинами из* B.

Определение 12. *Пусть* $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ *– обобщенная ромашка. Рассмотрим два ее произвольных лепестка* Q_i *и* Q_j, *где* $i \neq j$.

Ребро части $G_{i,j}$ *назовем* внешним, *если ни для какого* x *от* i *до* $j-1$ *оно не является ребром части* $G_{x,x+1}$. *Множество внешних ребер части* $G_{i,j}$ *обозначим через* $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(i,j)$.

Замечание 4. 1) Довольно часто верхний индекс будем опускать, если понятно, о какой ромашке речь. У двух обобщенных ромашек может быть общая часть, и ребро, внешнее для нее в одной из ромашек, может не быть таковым в другой.

2) Несложно убедиться в том, что $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(i,j) \subset \mathrm{E}(Q_i,Q_j)$. Это следует из того, что ни одна из вершин не лежит одновременно в $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ и в $\mathrm{Int}(G_{j,i})$.

3) Ясно, что $\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i+1,i) = \mathrm{E}(Q_i,Q_{i+1})$.

Лемма 6. *Пусть* $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ *– это обобщенная ромашка,* Q_i *и* Q_j *– это два ее различных лепестка, причем* $i \neq j-1$. *Рассмотрим произвольное* k *от* $i+1$ *до* $j-1$.

1) *Предположим, что* $Q_i \not\subset Q_{j,k}$ *и* $Q_j \not\subset Q_{i,k}$. *Тогда множество* $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$ *отделяет* $\mathrm{V}(G_{i,k})$ *от* $\mathrm{V}(G_{k,j})$ *в подграфе* $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j) - P$.

2) *Предположим, что часть* $G_{j,i}$ *не является малой. Тогда множество* Q_k *отделяет* $\mathrm{V}(G_{i,k})$ *от* $\mathrm{V}(G_{k,j})$ *в подграфе* $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j) - P$.

Замечание 5. Эта лемма, так же как и все последующие леммы в разделе, посвященном ромашкам в k-связном графе для произвольного k, направлена на доказательство того, что, в некотором смысле, при изучении месторасположения лепестков ромашки F подграф $G_{i,j}$ можно считать отрезком, в отличие от графа G, который, как уже говорилось, удобнее отождествлять с окружностью. При этом нельзя забывать про одну тонкость – для того, чтобы эта логика работала, надо удалить из части $G_{i,j}$ все внешние ребра.

На самом деле, в данной работе структура ромашки изучается как раз посредством перехода к подграфам вида $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$, потому что строго доказывать утверждения про лепесток, разделяющий такой подграф (“отрезок”) гораздо проще, чем про пару лепестков, разделяющих весь граф (“окружность”).

Данная лемма показывает, что каждый лепесток с номером от i до j действительно разделяет наш “отрезок” от Q_i до Q_j (подграф $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$), причем его “концы” (лепестки Q_i и Q_j) лежат в разных частях.

Доказательство. 1) Предположим, что утверждение леммы не выполнено и лепестки Q_i и Q_j не пересекаются. Тогда либо найдется

вершина v, лежащая в обеих этих частях, но не лежащая ни в центре, ни в лепестке Q_k, либо найдутся такие две смежные вершины u и v, не лежащие ни в центре, ни в лепестке Q_k, что $u \in \mathrm{V}(G_{i,k})$, а $v \in \mathrm{V}(G_{k,j})$, причем $uv \notin \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$.
Случай 1. *Существует вершина v, лежащая в $\mathrm{V}(G_{i,k})$ и в $\mathrm{V}(G_{k,j})$, но не лежащая ни в центре, ни в лепестке Q_k.* Из определения ромашки следует, что эта вершина v обязана быть вершиной нашей ромашки и найдутся такие лепестки Q_x и Q_y, содержащие ее, что x от i до k, а y от k до j. Тогда одна из частей $G_{x,y}$ и $G_{y,x}$ является пустой. Значит, по лемме 3 либо Q_k содержит вершину v, либо оба лепестка Q_i и Q_j содержат ее. Так как последнее невозможно, получаем, что $v \in Q_k$. Противоречие.
Случай 2. *Существуют такие две смежные вершины u и v, не лежащие ни в центре, ни в лепестке Q_k, что $u \in \mathrm{V}(G_{i,k})$, а $v \in \mathrm{V}(G_{k,j})$, причем $uv \notin \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$.* Рассмотрим часть разбиения графа G ромашкой F, содержащую u и v (такая, очевидно, есть). Пусть это $G_{\ell,\ell+1}$. Заметим, что ℓ от i до $j-1$, так как $uv \notin \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Ясно, что ℓ либо от i до $k-1$, либо от k до $j-1$. Не умаляя общности, будем считать, что ℓ от i до $k-1$. Тогда v является одновременно вершиной $G_{i,k}$ и $G_{k,j}$. Значит, по первому случаю, вершина v должна лежать либо в Q_k, либо в центре ромашки F. Противоречие.

Таким образом, осталось доказать утверждение для пересекающихся лепестков Q_i и Q_{i+1}. Рассуждаем так же, как и раньше, разбираем те же два случая. В первом случае получаем, что все общие вершины $\mathrm{V}(G_{i,k})$ и $\mathrm{V}(G_{k,j})$ на этот раз лежат в $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$, а во втором случае вообще ничего не меняется. Остается заметить, что от $\mathrm{V}(G_{i,k})$ и $\mathrm{V}(G_{k,j})$ что-то останется после удаления $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$, потому что от первого из этих множеств останется как минимум одна вершина лепестка Q_i, а от второго – как минимум одна вершина лепестка Q_j, иначе $Q_i \subset Q_{j,k}$ или $Q_j \subset Q_{i,k}$.

2) Заметим, что если $Q_i \cap Q_j \neq \varnothing$, то часть $G_{i,j}$ пуста, и по лемме 3 выполнено включение $Q_k \supset Q_i \cap Q_j$. Если же $Q_i \cap Q_j = \varnothing$, то это включение выполнено тривиальным образом. Тогда $Q_k \not\supset Q_i \setminus Q_j$ и $Q_k \not\supset Q_j \setminus Q_i$, так как иначе $Q_k = Q_i$ или $Q_k = Q_j$. Значит, по первой части нашей леммы множество $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i,k})$ от $\mathrm{V}(G_{k,j})$ в подграфе $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j) - P$. Но мы знаем, что $Q_k \supset Q_i \cap Q_j$. Поэтому $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j) = Q_k$, и требуемое утверждение доказано. $\square$

Лемма 7. *Пусть F – обобщенная ромашка, а Q_i и Q_j – это два ее различных лепестка. Рассмотрим множество S, которое не содержит ни одной вершины из части $G_{i,j}$ кроме, возможно, некоторых вершин лепестка Q_j. Тогда множество S не отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$.*

Замечание 6. Продолжая философские пояснения, начатые в замечании 5, можно переформулировать эту лемму следующим образом – “концы отрезка” нельзя разделить, удалив лишь некоторый кусок одного из этих “концов”.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $S \subset Q_j$, так как вершины множества S, не лежащие в части $G_{i,j}$, нам не мешают. Заметим, что если $S = Q_j$, то утверждение очевидно. Поэтому далее будем считать, что это не так. Ясно, что можно ограничиться случаем $S = Q_j \setminus \{v\}$, гд v – произвольная вершина лепестка Q_j.

Случай 1. *Часть $G_{j,i}$ не является малой.* Будем доказывать требуемое утверждение по индукции по количеству лепестков в части $G_{i,j}$ в предположении того, что часть $G_{j,i}$ не является малой. В качестве **базы** рассмотрим случай $j = i + 1$. По замечанию 4

$$\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i+1,i) = E(Q_i, Q_{i+1}),$$

а $\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,i+1) = \varnothing$, поэтому надо доказать, что множество S не отделяет Q_i от Q_{i+1} в $G_{i,i+1} - P$. Если $v \in Q_i$, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что $v \notin Q_i$. Заметим, что по лемме 2 обязательно найдется множество из набора, порождающего ромашку, не содержащее вершину v. Пусть это множество $Q_{x,y}$. Очевидно, оба множества Q_x и Q_y не могут содержать $Q_i \setminus Q_{i+1}$, так как они не могут пересекаться. Не умаляя общности, считаем, что $Q_x \not\supset Q_i \setminus Q_{i+1}$. Тогда $Q_i \not\subset Q_{x,i+1}$. Кроме того, $Q_{i+1} \not\subset Q_{x,i}$, так как в множестве $Q_{x,i}$ точно нет вершины v. Значит, можно применить лемму 6 к лепесткам Q_{i+1}, Q_i и Q_x. Получаем, что $Q_x \cup (Q_i \cap Q_{i+1})$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i+1,x})$ от $\mathrm{V}(G_{x,i})$ в $G_{i+1,i} - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1}) - P$. Теперь удалим из графа G множество $T = Q_{x,i+1} \setminus \{v\}$. Ясно, что оно содержит в себе множество $P \cup Q_x \cup (Q_i \cap Q_{i+1})$, но не содержит целиком ни Q_i, ни Q_{i+1}, поэтому отделяет $\mathrm{V}(G_{i+1,x})$ от $\mathrm{V}(G_{x,i})$ в $G_{i+1,i} - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1})$. В частности, T отделяет v от Q_i в этом подграфе. Однако, множество T не может быть разделяющим в G, так как в нем $k-1$ вершина. Значит, от Q_i до v есть путь в $G_{i,i+1} - (Q_{i+1} \setminus \{v\})$. А это как раз то, что мы хотели доказать.

Теперь докажем **переход**. Рассмотрим произвольные i и j. Знаем, что множество $S \subset Q_j$. Поэтому $S \cap \mathrm{V}(G_{i,j-1}) \subset Q_j \cap \mathrm{V}(G_{i,j-1}))$. Кроме того, есть включение $Q_j \subset \mathrm{V}(G_{j-1,i})$, причем, так как часть $G_{j,i}$ не является малой, по лемме 3 знаем, что $Q_i \cap Q_j \subset Q_{j-1}$. Значит, получается, что $Q_j \cap \mathrm{V}(G_{i,j-1})) \subset Q_{j-1}$. Тогда все общие вершины S и $\mathrm{V}(G_{i,j-1})$ содержатся в лепестке Q_{j-1}. Применим доказанное утверждение для Q_{j-1} и Q_j и получим, что найдется вершина v', связанная с v в $G_{j-1,j} - P - S$. Обозначим путь, соединяющий вершины v и v' в этом подграфе, через P_1. Рассмотрим $S' = S \cup (Q_{j-1} \setminus \{v'\})$. Ясно, что все вершины множества S', содержащиеся в части $G_{i,j-1}$, содержатся в лепестке Q_{j-1}. Применим индукционное предположение для множества S' и лепестков Q_i и Q_{j-1} и получим, что S' не отделяет Q_i от Q_{j-1} в $G_{i,j-1} - P - \mathrm{E_{out}}(i, j-1)$, то есть найдется вершина $u \in Q_i$, связанная с v' в $G_{i,j-1} - P - S' - \mathrm{E_{out}}(i, j-1)$. Так как $S \subset S'$, вершины u и v' связаны и в $G_{i,j-1} - P - S - \mathrm{E_{out}}(i, j-1)$. Обозначим путь, соединяющий их в этом подграфе, через P_2. Заметим, что ни один из путей P_1 и P_2 не может проходить по ребрам из множества $\mathrm{E_{out}}(i, j)$, потому что эти ребра либо вообще не лежат ни в $G_{i,j-1}$, ни в $G_{j-1,j}$, либо лежат в $G_{i,j-1}$ и тогда, очевидным образом, являются ребрами из $\mathrm{E_{out}}(i, j-1)$. Тогда вершины u и v связаны в $G_{i,j} - P - S - \mathrm{E_{out}}(i, j)$, то есть множество S не отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E_{out}}(i, j)$.

Случай 2. *Часть $G_{j,i}$ является малой.* Заметим, что в этом случае $G = G_{i,j}$, и нужное утверждение очевидно следует из k-связности графа G. □

Лемма 8. *Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ – обобщенная ромашка. Рассмотрим произвольное множество $Q \subset \mathrm{V}(G_{i,i+1}) \setminus P$, содержащее столько же вершин, сколько содержат лепестки ромашки F. Тогда если множество Q отделяет Q_i от Q_{i+1} в $G_{i,i+1} - P$, то $F' = (P; Q_1, \dots, Q_i, Q, Q_{i+1}, \dots, Q_m)$ – обобщенная ромашка. Причем если $\mathfrak{S}$ порождает F, то найдется такое j, что $\mathfrak{S} \cup \{Q_j \cup Q \cup P\}$ порождает F'.*

Доказательство. По лемме 4 найдется лепесток Q_j, не пересекающийся ни с Q_i, ни с Q_{i+1}. Ясно, что $Q_i \not\subset Q_{i+1,j}$ и $Q_{i+1} \not\subset Q_{i,j}$. Тогда по лемме 6 множество $Q_j \cup (Q_i \cap Q_{i+1})$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i+1,j})$ от $\mathrm{V}(G_{j,i})$ в графе $G_{i+1,i} - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1}) - P$ (помним, что по замечанию 4 $\mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1}) =$

$\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i+1,i))$. Очевидно, что Q содержит $Q_i \cap Q_{i+1}$, а также как минимум один конец каждого из ребер между этими лепестками. При этом множество $S = Q \cup Q_j \cup P$ не содержит целиком ни один из лепестков Q_i и Q_{i+1}. Значит, множество S отделяет $\mathrm{V}(G_{i+1,j})$ от $\mathrm{V}(G_{j,i})$ в графе $G_{i+1,i} - P$. Но с другой стороны по условию мы знаем, что Q отделяет Q_i от Q_{i+1} в $G_{i,i+1}$. Тогда и множество S отделяет Q_i от Q_{i+1} в $G_{i,i+1}$. Представим разбиение графа $G_{i,i+1}$ множеством Q как разбиение на две обобщенные части, одна из которых содержит Q_i, а другая – Q_{i+1}. Первую назовем частью G_i, а вторую – частью G_{i+1}. Поэтому S является разделяющим множеством в графе G, причем все части из $\mathrm{Part}(S)$ можно разбить на две обобщенные, одна из которых – это $G(\mathrm{V}(G_{i+1,j}) \cup \mathrm{V}(G_{i+1}))$, а другая – $G(\mathrm{V}(G_{j,i}) \cup \mathrm{V}(G_i))$.

Набор $\mathfrak{S}$ разбивает граф на m частей – $G_{1,2},\ldots,G_{m,1}$. Ясно, что если мы добавим к этому набору множество S, то просто часть $G_{i,i+1}$ распадется на части G_i и G_{i+1}, а остальные части останутся прежними, причем с теми же границами. Заметим, что граница G_i состоит из вершин лепестков Q_i и Q, а также из центра P нашей ромашки, так как лепесток Q_j не пересекается с $\mathrm{V}(G_{i,i+1})$. Аналогично, граница части G_{i+1} состоит из лепестков Q_{i+1} и Q, а также из центра P. Таким образом, главное свойство ромашки выполнено. Осталось доказать, что любые два пересекающихся лепестка близки. Удобнее рассмотреть два случая.

Случай 1. *Пересекаются два лепестка Q_x и Q_y ромашки F.* Так как в ромашке F нужное условие было выполнено, одна из частей $G_{x,y}$ и $G_{y,x}$ является малой. Пусть это $G_{x,y}$. Если i не от x до $y-1$, то новый лепесток Q ничему не мешает. Предположим, что i все же от x до $y-1$. Тогда часть $G_{i,i+1}$ целиком лежит в пустой части $G_{x,y}$, а следовательно, и сама является пустой. Значит, наш новый лепесток Q обязан лежать в $Q_{i,i+1} \subset Q_{x,y}$.

Случай 2. *Лепесток Q пересекается с некоторым лепестком Q_x ромашки F.* Если $x \in \{i, i+1\}$, то все очевидно. Пусть $x \notin \{i, i+1\}$. Ясно, что лепесток Q_x обязан пересекаться или с Q_i, или с Q_{i+1}, так как он не может содержать вершин из $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Заметим, что по лемме 4 найдется лепесток, не пересекающийся ни с Q_i, ни с Q_{i+1}. Он, очевидно, лежит в одной из частей $G_{x,i}$ и $G_{i+1,x}$, и часть с этим лепестком не пуста. Тогда, если Q_x пересекается с обоими лепестками Q_i и Q_{i+1}, то либо часть $G_{x,i+1}$, либо часть $G_{i,x}$ является малой, и все очевидно.

Поэтому считаем, что Q_x пересекается только с одним из лепестков Q_i и Q_{i+1}. Не умаляя общности, это Q_i. Тогда именно часть $G_{x,i}$ является малой. Значит, если мы докажем, что Q_i содержится в $Q_x \cup Q$, то мы докажем требуемое. Пусть это не так. Ясно, что пересечение лепестков Q_i и Q_{i+1} содержится в Q, так как Q их отделяет друг от друга в $G_{i,i+1}$. Тогда если $Q_i \subset Q_{x,i+1}$, то $Q_i \subset Q_x \cup Q$, а мы предположили, что это не так. Поэтому $Q_i \not\subset Q_{x,i+1}$. Кроме того, $Q_{i+1} \not\subset Q_{x,i}$, так как $Q_x \cap Q_{i+1} = \varnothing$. Значит, можно применить лемму 6 и получить, что множество $Q_x \cup (Q_i \cap Q_{i+1})$ разделяет Q_i и Q_{i+1} в $G_{i+1,i} - P - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1})$. Мы знаем, что Q содержит $Q_i \cap Q_{i+1}$, но множество $Q_x \cup Q$ не содержит ни Q_i, ни Q_{i+1}. Поэтому множество $Q_x \cup Q$ тоже разделяет Q_i и Q_{i+1} в $G_{i+1,i} - P - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1})$. Но при этом Q разделяет лепестки Q_i и Q_{i+1} в части $G_{i,i+1} - P$. Значит, множество $Q_x \cup Q$ разделяет лепестки Q_i и Q_{i+1} в графе $G - P$. Тогда множество $Q_x \cup Q \cup P$ является разделяющим. Но так как лепестки Q и Q_x пересекаются, в нем содержится менее k вершин. Противоречие. $\square$

Лемма 9. *Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ – это обобщенная ромашка, порожденная набором $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, а Q_i и Q_j – это два ее различных лепестка. Множество Q содержит столько же вершин, сколько и лепестки F, и лежит в $\mathrm{V}(G_{x,x+1})$, где x – от i до $j-1$, но не совпадает ни с Q_x, ни с Q_{x+1}. Тогда если Q в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ разделяет Q_i и Q_j, то $F' = (P; Q_1, \ldots, Q_x, Q, Q_{x+1}, \ldots, Q_m)$ – обобщенная ромашка.*

Замечание 7. В терминологии, введенной в замечании 5, эта лемма утверждает, что если некое множество, разделяющее концы отрезка, лежит между двумя уже лежащими в ромашке лепестками, то его можно добавить в ромашку в качестве лепестка.

Доказательство. Заметим, что

$$Q \cap \mathrm{V}(G_{i,x}) = Q \cap Q_x, \quad \text{а} \quad Q \cap \mathrm{V}(G_{x+1,j}) = Q \cap Q_{x+1}.$$

Поэтому по лемме 7 множество Q не отделяет Q_i от Q_x в $G_{i,x} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,x)$, а Q_{x+1} от Q_j – в $G_{x+1,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(x+1,j)$. Тогда Q не отделяет Q_i от Q_x и Q_{x+1} от Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$, так как ребра из $\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ либо не лежат ни в $G_{i,x}$, ни в $G_{x+1,j}$, либо лежат в какой-то из них и тогда являются внешними ребрами этой части. Значит, так как множество Q не совпадает ни с Q_x, ни с Q_{x+1}, но отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$, оно обязано отделять Q_x от Q_{x+1}

в $G_{x,x+1}-P-\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Теперь заметим, что ни одного внешнего ребра из $\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ в части $G_{x,x+1}$ по определению быть не может. Поэтому Q отделяет Q_x от Q_{x+1} в $G_{x,x+1}-P$. А из этого по лемме 8 следует, что $F'=(P;Q_1,\dots,Q_x,Q,Q_{x+1},\dots,Q_m)$ – обобщенная ромашка. $\square$

Лемма 10. [3, лемма 1] *Пусть множества $S,T\in\mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Пусть* $\mathrm{Part}(S)=\{F_1,F_2,\dots,F_n\}$, *а* $\mathrm{Part}(T)=\{H_1,H_2,\dots,H_m\}$. *Для всех $i\in\{1,\dots,n\}$ и $j\in\{1,\dots,m\}$ введем обозначения*

$$P=S\cap T, S_j=S\cap\mathrm{Int}(H_j), T_i=T\cap\mathrm{Int}(F_i), G_{i,j}=F_i\cap H_j.$$

Тогда

$$\mathrm{Part}(\{S,T\})=\{G_{i,j}\}_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}},\quad \mathrm{Bound}(G_{i,j})=P\cup T_i\cup S_j,$$

причем $T_i\neq\varnothing$ для всех $i\in\{1,\dots,n\}$ и $S_j\neq\varnothing$ для всех $j\in\{1,\dots,m\}$.

Лемма 11. *Пусть $F=(P;Q_1,\dots,Q_m)$ – это обобщенная ромашка, а Q_i и Q_j – это два ее различных лепестка. Рассмотрим подграф H, который получается из $G_{i,j}-P$ удалением всех внешних ребер этой части и добавлением всех ребер, соединяющих две вершины из лепестка Q_i или две вершины из лепестка Q_j. Обозначим через ℓ количество вершин в лепестке ромашки F. Тогда для графа H справедливы следующие утверждения.*

1) *Любое разделяющие множество графа H, содержащее менее 2ℓ вершин, делит его ровно на две части, причем в одной из них лежит лепесток Q_i, а в другой – лепесток Q_j.*

2) *Граф H является ℓ-связным.*

3) *Если S и T – это два зависимых ℓ-вершинных разделяющих множества графа H, то пара частей, на которые множество S делит граф H, получается из пары частей, на которые его делит T, заменой S на T. То есть, если* $\mathrm{Part}(S)=\{A_1,A_2\}$, *а* $\mathrm{Part}(T)=\{B_1,B_2\}$, *где* $Q_i\subset\mathrm{V}(A_1),\mathrm{V}(B_1)$, *причем* $S'=S\cap\mathrm{V}(B_1)$, $S''=S\cap\mathrm{V}(B_2)$, $T'=T\cap\mathrm{V}(A_1)$, $T''=T\cap\mathrm{V}(A_2)$, *то выполнены следующие равенства множеств (см. рис. 2):*

$$\mathrm{V}(A_1)=(\mathrm{V}(B_1)\setminus T'')\cup S'',\qquad \mathrm{V}(A_2)=(\mathrm{V}(B_2)\setminus T')\cup S',$$
$$\mathrm{V}(B_1)=(\mathrm{V}(A_1)\setminus S'')\cup T'',\qquad \mathrm{V}(B_2)=(\mathrm{V}(A_2)\setminus S')\cup T'.$$

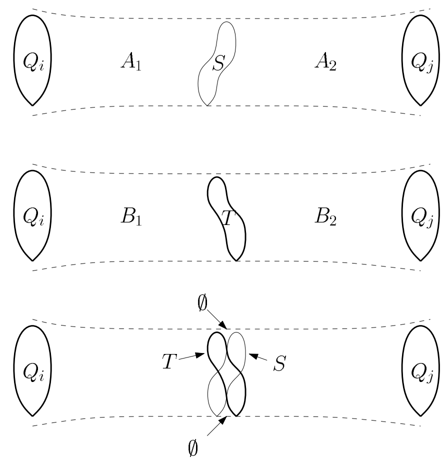


Рис. 2. На всех трех рисунках изображен граф H. На верхнем рисунке его разделяет множество S, на среднем — множество T, а на нижнем изображено утверждение леммы 11 — множества S и T прилегают вплотную друг к другу.

Доказательство. 1) Рассмотрим произвольное разделяющее множество S графа H, содержащее менее 2ℓ вершин. Заметим, что разделить ни один из лепестков Q_i и Q_j невозможно, потому что подграфы графа H, индуцированные на них – это полные графы. Значит, если условие этого пункта леммы не выполнено, в $\mathrm{Part}_H(S)$ должна найтись часть, во внутренности которой нет вершин лепестков Q_i и Q_j. Но тогда множество $S \cup P$ является разделяющим в G, что невозможно, поскольку $|S \cup P| < k$, а граф G является k-связным. Таким образом, множество S разбивает H ровно на 2 части, в одной из которых лежит Q_i, а в другой Q_j.

2) Пусть в некотором разделяющем множестве S графа H менее ℓ вершин. Из пункта 1 следует, что S делит H на две части, в одной из которых лежит Q_i, а в другой – Q_j. Обозначим первую через A, а вторую – через B. Заметим, что $\mathrm{Int}(A) \setminus Q_{i,j} = \varnothing$, так как иначе множество $S \cup P \cup Q_i$ является разделяющим, а в нем менее k вершин. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Int}(B) \setminus Q_{i,j} = \varnothing$. Таким образом, доказано, что $V(G_{i,j}) = Q_i \cup Q_j \cup S$. В частности, из этого следует,

что часть $G_{j,i}$ не может быть пустой, так как иначе в графе G будет слишком мало вершин.

Теперь рассмотрим произвольное x от j до i. Заметим, что если во множестве $S \cup Q_x$ не содержится целиком ни один из лепестков Q_i и Q_j, то оно является разделяющим в графе $G - P$, так как S и Q_x отделяют Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ и в $G_{j,i} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(j,i)$ соответственно. Но в таком случае множество $S \cup Q_x \cup P$ является разделяющим в графе G, а в этом множестве менее k вершин. Противоречие. Значит, для любого x от j до i множество $S \cup Q_x$ содержит либо Q_i, либо Q_j.

Докажем, что если $Q_i \subset S \cup Q_x$ и $x \neq i, j$, то мала именно часть $G_{x,i}$. Иначе мала часть $G_{i,x}$ и по лемме 3 есть включение $Q_i \cap Q_x \subset Q_i \cap Q_j$, а последнее лежит в S по очевидным соображениям. Из $Q_i \subset S \cup Q_j$ и $Q_i \cup Q_x \subset S$ следует $Q_i \subset S$, что невозможно. Аналогично, если $Q_j \subset S \cup Q_x$, то мала часть $G_{j,x}$. Возьмем $T_1 = Q_i \setminus S$, а $T_2 = Q_j \setminus S$. Выше мы доказали, что для всякого x от j до i множество $S \cup Q_x$ содержит один из лепестков Q_i и Q_j. То есть для всякого x от j до i лепесток Q_x содержит одно из множеств T_1 и T_2.

Рассмотрим произвольное y от i до j. Заметим, что так как $S \supset \mathrm{Int}(G_{i,j})$, а $Q_y \supset Q_i \cap Q_j$ и при этом $|S| < |Q_y|$, верно одно из неравенств $|S \cap Q_i| < |Q_y \cap Q_i|$ и $|S \cap Q_j| < |Q_y \cap Q_j|$. Пусть для некоторого y выполнено первое неравенство. Тогда лепестки Q_i и Q_y, очевидно, пересекаются, причем мала именно часть $G_{i,y}$, так как выше доказано, что часть $G_{y,i}$ малой не является. Теперь обозначим через T_3 пересечение Q_i и всех лепестков с номерами от i до j, для которых выполнено первое неравенство. По лемме 3 получаем, что $|S \cap Q_i| < |T_3|$ и для всякого y от i до j из неравенства $|S \cap Q_i| < |Q_y \cap Q_i|$ следует, что $T_3 \subset Q_y$. Аналогично, найдется множество $T_4 \subset Q_j$ такое, что $|S \cap Q_j| < |T_4|$ и для всякого y от i до j из неравенства $|S \cap Q_j| < |Q_y \cap Q_j|$ следует, что $T_4 \subset Q_y$.

Итак, нашлись такие множества T_1, T_2, T_3 и T_4, что каждый лепесток ромашки F содержит как минимум одно из них. При этом

$$T_1, T_3 \subset Q_i, Q_i \subset T_1 \cup S \quad \text{и} \quad |S \cap Q_i| < |T_3|.$$

Значит, множества T_1 и T_3 пересекаются. Аналогично, пересекаются и множества T_2 и T_4. Пусть в пересечении множеств T_1 и T_3 есть вершина u, а в пересечении T_2 и T_4 – вершина v. Тогда каждый лепесток ромашки F содержит как минимум одну из вершин u и v. Но всякое разделяющее множество из набора, порождающего ромашку F состоит из двух непересекающихся лепестков и центра ромашки. Значит, во всех разделяющих множествах из порождающего набора есть обе вершины u и v, что противоречит лемме 2.

Таким образом, наше предположение о существовании в графе H разделяющего множества, состоящего менее, чем из ℓ вершин, было неверным, и граф H является ℓ-связным.

3) Заметим, что граф H по предыдущему пункту ℓ-связен, поэтому по лемме 10 знаем:

$$\begin{aligned}\mathrm{Part}(\{S,T\}) = \{&H(\mathrm{V}(A_1)\cap \mathrm{V}(B_1)), H(\mathrm{V}(A_2)\cap \mathrm{V}(B_2)),\\ &H(\mathrm{V}(A_1)\cap \mathrm{V}(B_2)), H(\mathrm{V}(A_2)\cap \mathrm{V}(B_1))\}.\end{aligned}$$

Обозначим эти части через C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно. По условию Q_i содержится в части C_1. Значит, по первому пункту текущей леммы Q_j содержится в части C_2. Докажем, что части C_3 и C_4 пусты. Предположим, что это не так и часть C_3 непуста. Тогда $\mathrm{Bound}(C_3)$ отделяет в графе H внутренность части C_3 от $H \setminus \mathrm{V}(C_3)$. Но во множестве $\mathrm{Bound}(C_3)$ менее 2ℓ вершин, поэтому по пункту 1 текущей леммы это множество делит H на 2 части, в одной из которых целиком содержится лепесток Q_i, а в другой – лепесток Q_j. При этом во внутренности части C_3 нет ни одной вершины из $Q_{i,j}$, так как лепесток Q_i лежит в C_1, а Q_j – в C_2. Противоречие. Значит, обе части C_3 и C_4 пусты. Несложно убедиться в том, что из этого следуют указанные равенства множеств. □

Следствие 2. *Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ – это обобщенная ромашка, а Q_i и Q_j — это два ее различных лепестка. Рассмотрим такие множества $S, T \subset \mathrm{V}(G_{i,j} - P)$, что $|S| = |T| = \ell$, где ℓ — число вершин в лепестке ромашки F. Известно, что S и T разделяют Q_i и Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(Q_i, Q_j)$. Разобьем все части из $\mathrm{Part}(S)$ на две обобщенные части — A_1 и A_2. Аналогично поступим с $\mathrm{Part}(T)$ — получим B_1 и B_2. При этом $\mathrm{V}(A_1), \mathrm{V}(B_1) \supset Q_i$ и $\mathrm{V}(A_2), \mathrm{V}(B_2) \supset Q_j$. Оказалось, что в смысле этих обобщенных частей множества S и T зависимы. Тогда пара $(\mathrm{V}(A_1),\mathrm{V}(A_2))$ отличается от пары $(\mathrm{V}(B_1),\mathrm{V}(B_2))$*

заменой S на T, то есть выполнены следующие равенства множеств:

$$\mathrm{V}(A_1) = (\mathrm{V}(B_1) \setminus T) \cup S, \qquad \mathrm{V}(A_2) = (\mathrm{V}(B_2) \setminus T) \cup S,$$
$$\mathrm{V}(B_1) = (\mathrm{V}(A_1) \setminus S) \cup T, \qquad \mathrm{V}(B_2) = (\mathrm{V}(A_2) \setminus S) \cup T.$$

Доказательство. Это прямое следствие третьего пункта предыдущей леммы, надо просто рассмотреть описанный в ней граф H и заметить, что S и T являются в нем зависимыми ℓ-вершинными разделяющими множествами, причем вершинно части разбиения совпадают с A_1 и A_2 для S и с B_1 и B_2 для T. □

Лемма 12. *Пусть Q_i и Q_j – это два таких лепестка максимальной обобщенной ромашки F, что часть $G_{j,i}$ не является малой. Известно, что некоторая вершина $u \in Q_i$ в подграфе*

$$G_{i,j} - P - (Q_i \setminus \{u\}) - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$$

смежна только с некоторой вершиной v. Тогда $v \in \mathrm{V}(F)$.

Доказательство. Если $v \in Q_j$, то утверждение очевидно. Далее считаем, что $v \notin Q_j$. Тогда часть $G_{i,j}$ не может быть малой. Кроме того, часть $G_{j,i}$ не является малой по условию. Значит, лепестки Q_i и Q_j не пересекаются и, в частности $u \notin Q_j$. Рассмотрим $Q = Q_i \cup \{v\} \setminus \{u\}$. Ясно, что Q отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Поэтому, если найдется такое x, что $Q \subset \mathrm{V}(G_{x,x+1})$, то по лемме 9 можно добавить Q в ромашку F, что противоречит максимальности F. Значит, такого x не найдется. В частности $Q \not\subset \mathrm{V}(G_{i,i+1})$, и $Q_{i+1} \neq Q_j$. Но $Q \setminus \{v\}$, очевидно, лежит в $\mathrm{V}(G_{i,i+1})$. Поэтому $v \notin \mathrm{V}(G_{i,i+1})$. Заметим, что Q_{i+1} по лемме 6 отделяет $\mathrm{V}(G_{i,i+1})$ от $\mathrm{V}(G_{i+1,j})$ в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j) - P$. Причем $u \in \mathrm{V}(G_{i,i+1})$, а $v \in \mathrm{V}(G_{i+1,j} - Q_{i+1,j})$, и эти две вершины смежны. Значит, обязательно $u \in Q_{i+1}$.

Теперь заметим, что вершина u в подграфе

$$G_{i+1,j} - P - (Q_{i+1} \setminus \{u\}) - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i+1,j)$$

смежна только с v, поскольку u не является концом ни одного из ребер множества $\mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j) \setminus \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i+1,j)$. Кроме того, очевидно, что часть $G_{j,i+1}$ не является малой. Значит, мы можем произвести ту же самую операцию еще раз и перейти к $G_{i+2,j}$. И так далее. Так как лепестков конечное число, рано или поздно придем к противоречию. □

Следствие 3. *Пусть Q_i и Q_j – это два таких лепестка максимальной обобщенной ромашки F, что часть $G_{j,i}$ не является малой. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если вершины $u \in Q_i$ и $v \in \mathrm{V}(G_{i,j} - Q_i - P)$ таковы, что v – это единственная вершина из $\mathrm{V}(G_{i,j} - Q_i - P)$, смежная с u, то $v \in \mathrm{V}(F)$.*

2) *Если вершины $u \in Q_i$ и $v \in \mathrm{Int}(G_{i,j})$ таковы, что v – это единственная вершина из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$, смежная с u, причем в части $G_{i,j}$ содержится лепесток, не пересекающийся с $Q_{i,j}$, то $v \in \mathrm{V}(F)$.*

Доказательство. 1) Заметим, что если $uv \notin \mathrm{E_{out}}(i,j)$, то можно применить лемму 12, а если $uv \in \mathrm{E_{out}}(i,j)$, то $v \in Q_j$ и утверждение доказано.

2) Рассмотрим лепесток Q_x в части $G_{i,j}$, не пересекающийся с $Q_{i,j}$. По лемме 6 этот лепесток разделяет Q_i и Q_j в $G_{i,j} - \mathrm{E_{out}}(i,j)$. Так как он не пересекается ни с Q_i, ни с Q_j, в графе $G_{i,j} - \mathrm{E_{out}}(i,j)$ между этими двумя лепестками нет ребер. То есть v – это единственная вершина из $\mathrm{V}(G_{i,j} - Q_i - P)$, смежная с u. Значит, по пункту 1 вершина v является вершиной ромашки F. □

Лемма 13. *Пусть Q_i и Q_j – это два различных лепестка обобщенной ромашки F, таких что часть $G_{j,i}$ не является малой. Нашлось такое x от i до j, что часть $G_{i,x}$ пуста. Тогда в подграфе*

$$G_{i,j} - Q_x - P - \mathrm{E_{out}}(i,j)$$

нет ребер, имеющих ровно один конец в множестве $Q_i \setminus Q_x$.

Доказательство. Если $i = j - 1$, то $x = j = i + 1$ и утверждение очевидно. Пусть $i \neq j - 1$. Заметим, что Q_x по лемме 6 отделяет $\mathrm{V}(G_{i,x})$ от $\mathrm{V}(G_{x,j})$ в $G_{i,j} - \mathrm{E_{out}}(i,j) - P$. Так как часть $G_{i,x}$ пуста, в данном случае это означает, что Q_x отделяет Q_i от $\mathrm{V}(G_{i,j} - Q_i)$ в $G_{i,j} - \mathrm{E_{out}}(i,j) - P$. Значит, вершины из $Q_i \setminus Q_x$ не могут быть смежны с вершинами из $\mathrm{V}(G_{i,j} - Q_i - Q_x)$ в подграфе $G_{i,j} - \mathrm{E_{out}}(i,j) - P$. Отсюда вытекает требуемое. □

§2. Ромашки в четырехсвязном графе

Теперь вернемся к случаю четырехсвязного графа, то есть $k = 4$. Заметим, что центр ромашки в этом случае состоит либо из двух вершин, либо из нуля вершин.

Определение 13. *Ромашки с центром, состоящим из двух вершин, мы будем называть* 2-ромашками*, а ромашки с пустым центром –* 0-ромашками*.*

2.1. 2-Ромашки. Ромашки с центром, состоящим из двух вершин, очень похожи на ромашки в трехсвязном графе (см. [3]). Причина кроется в том, что при удалении одной из вершин центра 2-ромашки граф становится трехсвязным, а наша ромашка становится ромашкой в нем.

Исследование обобщенных 2-ромашек было проведено в [8], ниже формулировка главных результатов.

Замечание 8. [8, замечание 6] Каждая 2-ромашка содержится в единственной максимальной.

Теорема 1. [8, теорема 3] *Любое 4-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин максимальной 2-ромашки, содержит ее центр, то есть является либо ее внутренним множеством, либо границей.*

2.2. 0-Ромашки. Теперь займемся анализом ромашек с пустым центром. К сожалению, максимальная 0-ромашка, содержащая данную, может быть не единственной. Наша цель – описать эту неединственность и выяснить, какие разделяющие множества могут быть зависимы с множествами из $\mathfrak{R}(F)$ для 0-ромашки F. Для начала поймем, что означают общие утверждения про ромашки в k-связном графе в нашем конкретном случае 0-ромашек.

Лемма 14. [8, лемма 14] *Для 0-ромашки $F = (Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пересекаться могут только соседние лепестки. В частности, никакая вершина графа G не лежит сразу в трех лепестках ромашки F. Причем, если лепестки Q_i и Q_{i+1} пересекаются, то две их необщие вершины смежны.*

2) *Два лепестка являются близкими тогда и только тогда, когда они являются соседними или между ними (с какой-то из сторон) лежит ровно один лепесток, который при этом содержится в их объединении.*

3) *Если $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$, то $Q_{i,j}$ является внутренним множеством ромашки F, причем $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.*

4) *Если множество* $Q_{i,i+2}$ *является разделяющим, то либо* $G_{i,i+2} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, *либо обе части* $G_{i,i+1}$ *и* $G_{i+1,i+2}$ *пусты, и внутренность* $G_{i,i+2}$ *состоит из двух несмежных вершин, образующих лепесток* Q_{i+1}.

5) *Если множество* $Q_{i,i+2}$ *является разделяющим, то либо* $G_{i+2,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, *либо в* F *всего четыре лепестка, обе части* $G_{i+2,i+3}$ *и* $G_{i+3,i}$ *пусты, и внутренность* $G_{i+2,i}$ *состоит из двух несмежных вершин, образующих лепесток* Q_{i+3}.

Определение 14. *Назовем лепесток* 0*-ромашки* переключателем, *если он состоит из двух несмежных вершин и лежит в объединении двух соседних с ним лепестков. Если лепесток* Q_i 0*-ромашки* $F = (Q_1, \ldots, Q_m)$ *является переключателем, то* переключением Q_i *назовем замену* Q_i *на* $Q'_i = (Q_{i-1} \cup Q_{i+1}) \setminus Q_i$.

Определение 15. *Две* 0*-ромашки будем называть похожими, если одна из них получается из другой после нескольких переключений* (*см. рис.* 3). *Внутренние множества ромашки, похожей на ромашку* F, *будем называть квазивнутренними множествами* F.

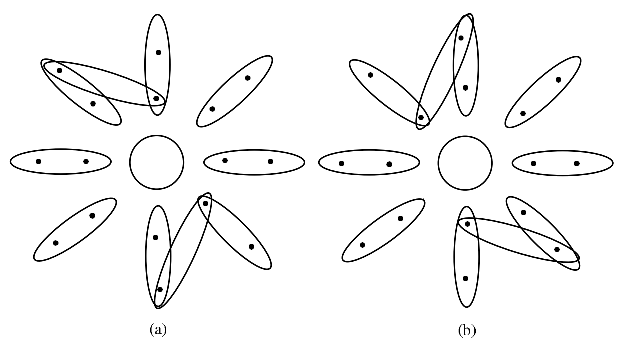


Рис. 3. Похожие ромашки

Следующая теорема является аналогом теоремы 1, доказанной для 2-ромашек.

Теорема 2 ([8, теорема 4]). *Любое* 4*-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин максимальной обобщенной* 0*-ромашки, является либо ее внутренним множеством, либо квазивнутренним, либо ее границей.*

Теперь перейдем к описанию взаимного расположения двух максимальных обобщенных 0-ромашек. В итоговой теореме появятся некоторые исключения – ромашки специального вида, в каждом из исключений не более семи лепестков. Начнем исследование свойств этих исключений.

Лемма 15. *Пусть все лепестки обобщенной* 0*-ромашки* F *пересекаются с* $Q_{i,j}$*, где* Q_i *и* Q_j *– это два ее неблизких лепестка. Тогда лепестков в ромашке* F *ровно* 6*,* $j = i+3$*,* $i = j+3$*, лепестки* Q_{i-1} *и* Q_{i+1} *пересекаются с* Q_i*, а* Q_{j-1} *и* Q_{j+1} *– с* Q_j*. При этом части* $G_{i-1,i}$*,* $G_{i,i+1}$*,* $G_{j-1,j}$*,* $G_{j,j+1}$ *являются малыми, и каждая вершина из* $Q_{i,j}$ *лежит ровно в двух лепестках.*

Доказательство. По лемме 14 пересекаться в 0-ромашке могут только соседние лепестки. Заметим, что тогда в каждой из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ лежит не более, чем по два лепестка Предположим, что в части $G_{i,j}$ лежит ровно один лепесток (хотя бы один быть должен, иначе Q_i и Q_j будут соседними). Тогда это лепесток Q_{i+1}, и $j = i+2$. Не умаляя общности, считаем, что он пересекается с Q_i. Теперь рассмотрим лепесток, не близкий к Q_{i+1} – по лемме 1 такой есть. Ясно, что по лемме 14 он не может пересекаться с Q_i. Значит, он пересекается с Q_{i+2}. Тогда это Q_{i+3}. Пусть общая вершин Q_{i+2} и Q_{i+3} – это вершина x. Рассмотрим разделяющее множество, не содержащее x. Оно должно состоять из двух неблизких лепестков, ни один из которых не совпадает ни с Q_{i+2}, ни с Q_{i+3}. Но кроме них в F есть только лепестки Q_i, Q_{i+1} и, возможно, лепесток Q_{i-1}, который в таком случае должен пересекаться с Q_i. В любом случае выбрать пару неблизких из них не получится. Противоречие.

Значит, в части $G_{i,j}$ лежит ровно два лепестка кроме Q_i и Q_j. Аналогично, то же самое верно для части $G_{j,i}$. Тогда $j = i+3$, лепестки Q_{i-1} и Q_{i+1} пересекаются с Q_i, а Q_{j-1} и Q_{j+1} – с Q_j. Значит, части $G_{i-1,i}$, $G_{i,i+1}$, $G_{j-1,j}$, $G_{j,j+1}$ по лемме 1 являются малыми (см. рис. 5а). Кроме того по лемме 14 ни одна вершина ромашки не может лежать в более чем двух лепестках. Значит, каждая вершина из $Q_{i,j}$ лежит ровно в двух. □

Определение 16. *Назовем обобщенную* 0*-ромашку* F малой*, если у нее есть внутреннее множество, пересекающееся со всеми лепестками* F *(см. рис.* 5*).*

Интуитивно кажется, что между несоседними или по крайней мере между неблизкими лепестками не может быть ребер. На самом деле ни то, ни другое не верно, и следующие две леммы описывают возможные случаи наличия одного или нескольких ребер между несоседними (близкими или неблизкими) лепестками.

Замечание 9. Из леммы 14 следует, что два не соседних, но близких лепестка 0-ромашки имеют номера i и $i+2$ для некоторого i.

Лемма 16. *Пусть F – обобщенная 0-ромашка, а Q_i и Q_{i+2} – это два ее близких лепестка. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Между этими лепестками проведено не более трех ребер.*

2) *Между этими лепестками проведено не менее двух ребер, причем среди них можно выбрать два ребра, не имеющие общих концов.*

3) *Между этими лепестками проведено ровно два ребра тогда и только тогда, когда лепесток Q_{i+1} является переключателем.*

Доказательство. 1) Пусть проведены все четыре ребра. Рассмотрим вершины x и y лепестков Q_i и Q_{i+2}, не содержащиеся в Q_{i+1}. Они смежны, поэтому должна найтись часть разбиения графа ромашкой F, в которой лежат обе вершины x и y. Но такой, очевидно, нет.

2) Ясно, что $Q_i \cap Q_{i+2} = \varnothing$, а часть $G_{i,i+2}$ является пустой, причем в ней ровно четыре вершины. По лемме 7 лепестки Q_i и Q_{i+2} нельзя отделить друг от друга в $G_{i,i+2}$, выкинув лишь одну из их вершин. Значит, из каждой из вершин лепестка Q_i ведет ребро в Q_{i+2}. При этом либо из какой-то из них ведет по ребру в каждую из вершин лепестка Q_{i+2}, либо из каждой вершины лепестка Q_i ведет по одному ребру в вершины лепестка Q_{i+2}, но обязательно в разные вершины. Очевидно, что в обоих случаях утверждение леммы выполнено.

3) Если между этими вершинами проведено ровно два ребра, то они по предыдущему пункту не имеют общих концов. Пусть это ребра xy и uv. Предположим, что лепесток Q_{i+1} содержит оба конца одного из этих ребер – например, вершины u и v. Но тогда не найдется части, содержащей обе вершины x и y, а они смежны, и такого не может быть. Тогда лепесток Q_{i+1} состоит из двух несмежных вершин и является по определению переключателем. □

Лемма 17. *Пусть F – обобщенная 0-ромашка, а Q_i и Q_j – это два ее неблизких лепестка. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если между этими лепестками есть ребро* uv, *то в одной из частей* $G_{i,j}$ *и* $G_{j,i}$ *кроме лепестков* Q_i *и* Q_j *всего есть не более, чем два лепестка, причем каждый из них содержит одну из вершин* u *и* v.

2) *Если между этими лепестками проведено ровно* 2 *ребра, и они имеют общий конец* v, *то в одной из частей* $G_{i,j}$ *и* $G_{j,i}$ *кроме* Q_i *и* Q_j *лежит ровно один лепесток, и он содержит* v. *Причем в этом случае* $|\mathrm{Part}(Q_{i,j})| = 2$.

3) *Если среди ребер, проведенных между этими лепестками, есть два ребра* u_1v_1 *и* u_2v_2, *не имеющих общих концов, то ромашка является малой и других ребер между* Q_i *и* Q_j *нет, причем в каждой из частей* $G_{i,j}$ *и* $G_{j,i}$ *лежит по два лепестка. Кроме того, в одной из этих частей один из лепестков содержит* u_1, *а другой –* v_1, *а в другой части один из лепестков содержит* u_2, *а другой –* v_2.

4) *Между этими лепестками проведено не более, чем* 2 *ребра.*

Доказательство. 1) Каждое ребро обязано лежать как минимум в одной части разбиения графа, поэтому существует такое ℓ, что $u, v \in G_{\ell,\ell+1}$. Не умаляя общности, считаем, что ℓ от i до $j-1$, $u \in Q_i$, $v \in Q_j$. Так как вершина $u \in G_{\ell,\ell+1}$, один из лепестков Q_ℓ и $Q_{\ell+1}$ содержит u. Но по лемме 14 пересекаться могут лишь соседние лепестки. Значит, получаем, что либо $\ell = i$, либо $\ell = i+1$ и лепестки Q_i и Q_{i+1} пересекаются по вершине u. Аналогично доказываем, что либо $\ell + 1 = j$, либо $\ell + 1 = j - 1$ и лепестки Q_j и Q_{j-1} пересекаются по вершине v. Таким образом, выполнен один из следующих вариантов:

- $j = i + 2$ и лепесток Q_{i+1} пересекается с Q_i по вершине u;
- $j = i + 2$ и лепесток Q_{i+1} пересекается с Q_{i+2} по вершине v;
- $j = i + 3$ и лепесток Q_{i+1} пересекается с Q_i по вершине u, а лепесток Q_{i+2} – с Q_{i+3} по вершине v.

2) Не умаляя общности, считаем, что $v \in Q_i$. Пусть лепесток Q_j состоит из вершин u_1 и u_2. По предыдущему пункту в одной из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ находится не более, чем два лепестка, причем все они содержат v или u_1. Аналогично, одна из этих частей обладает теми же свойствами для вершин v и u_2.

Случай 1. *Для одной пары вершин это часть* $G_{i,j}$, *а для другой –* $G_{j,i}$. Тогда все лепестки ромашки F пересекаются с множеством $Q_{i,j}$, то есть она является малой. Значит, по лемме 15 в F ровно 6 лепестков. Но для этого в каждой из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ должно быть по два лепестка, причем все они содержат v, u_1 или u_2. Поэтому одна из этих вершин лежит сразу в трех лепестках, считая Q_i и Q_j. Это противоречит лемме 14.

Случай 2. *Для обеих пар вершин это одна и та же часть.* Не умаляя общности, считаем, что это часть $G_{i,j}$. Тогда каждый лепесток в $G_{i,j}$ содержит с одной стороны как минимум одну из вершин v и u_1, а с другой – одну из v и u_2. Значит, каждый лепесток содержит вершину v, и этот лепесток всего один по первому пункту леммы 14. То есть $j = i + 2$. Поэтому по четвертому пункту той же леммы $G_{i,i+2} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, по пятому – либо $G_{i+2,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, либо в ромашке F всего четыре лепестка. Но в F должно быть больше четырех лепестков, потому что два из них пересекаются – а именно, лепестки Q_i и Q_{i+1}. Таким образом, доказано, что $\mathrm{Part}(Q_{i,i+2}) = \{G_{i,i+2}, G_{i+2,i}\}$.

3) Пусть $Q_i = \{u_1, u_2\}$, а $Q_j = \{v_1, v_2\}$. По первому пункту в одной из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ находится не более, чем два лепестка, причем все они содержат u_1 или v_1. Аналогично, одна из этих частей обладает теми же свойствами для вершин u_2 и v_2.

Случай 1. *Для одной пары вершин это часть $G_{i,j}$, а для другой – $G_{j,i}$.* Тогда все лепестки ромашки F пересекаются с множеством $Q_{i,j}$, то есть она является малой. Значит, по лемме 15 в F ровно 6 лепестков. Для этого в каждой из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ должно быть по два лепестка, не считая Q_i и Q_j. Заметим, что если между лепестками Q_i и Q_j есть еще какие-то ребра кроме u_1v_1 и u_2v_2, то по предыдущему пункту в одной из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ должен быть всего один лепесток. Таким образом, других ребер между Q_i и Q_j быть не может.

Случай 2. *Для обеих пар вершин это одна и та же часть.* Тогда каждый лепесток в этой части содержит с одной стороны как минимум одну из вершин u_1 и v_1, а с другой — одну из u_2 и v_2. Но сразу с двумя лепестками Q_i и Q_j ни один лепесток пересекаться не может, так как эти два лепестка не являются близкими. Противоречие.

4) Если проведено хотя бы три ребра, то среди них найдутся два, не имеющие общих концов. Тогда по предыдущему пункту ромашка является малой, и кроме этих двух других ребер между Q_i и Q_j быть не может. Значит, между лепестками Q_i и Q_j проведено не более, чем 2 ребра. □

Следствие 4. *Пусть между двумя неблизкими лепестками Q_i и Q_j обобщенной 0-ромашки F есть ребро uv, и при этом граф $G_{i,j} - Q_{i,j}$*

несвязен. Тогда $j = i + 2$, $\mathrm{Int}(G_{i,i+2})$ состоит из двух вершин, образующих лепесток Q_{i+1}, а в $G_{i+2,i}$ кроме Q_i и Q_j лежит ровно два лепестка, один из которых, содержит u, а другой – v.

Доказательство. Заметим, что из леммы 14 мы знаем, что если граф $G_{i,j} - Q_{i,j}$ несвязен, где Q_i и Q_j – это неблизкие лепестки, то $j = i + 2$ и $\mathrm{Int}(G_{i,i+2})$ состоит из двух вершин, образующих лепесток Q_{i+1}. Таким образом первая часть утверждения доказана. С другой стороны по первому пункту леммы 17 в одной из частей $G_{i,i+2}$ и $G_{i+2,i}$ кроме лепестков Q_i и Q_{i+2} всего есть не более, чем два лепестка, причем каждый из них содержит одну из вершин u и v. Но из доказанного следует, что Q_{i+1} не пересекается с $Q_{i,i+2}$. Значит, указанное условие выполнено именно для части $G_{i+2,i}$. Осталось только доказать, что в этой части кроме Q_i и Q_{i+2} есть ровно два лепестка. Уже доказали, что больше двух быть не может. Предположим, что их меньше двух. Тогда либо в ромашке F три лепестка, что невозможно, либо в ней четыре лепестка, но два из них пересекаются, что тоже невозможно. Таким образом, в части $G_{i+2,i}$ кроме Q_i и Q_{i+2} есть ровно два лепестка. По лемме 14 они не могут оба содержать вершину u или оба – вершину v. Значит, один содержит вершину u, а другой – вершину v. $\square$

Лемма 18. *Пусть Q_i и Q_j – это два неблизких лепестка обобщенной 0-ромашки F. Множество Q, лежащее в $\mathrm{V}(G_{i,j})$, состоит из двух вершин и отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Нашлось такое ℓ от $i+1$ до $j-1$, что одна из вершин множества Q лежит в $\mathrm{V}(G_{i,\ell})$, а другая – в $\mathrm{V}(G_{\ell,j})$, причем $Q_\ell \cap Q = \varnothing$. Тогда лепесток Q_ℓ – это переключатель, и при переключении он переходит в Q (см. рис. 4).*

Доказательство. Построим новый граф H, который получается из $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ добавлением ребра между вершинами из лепестка Q_i и ребра между вершинами Q_j. По второму пункту леммы 11 граф H двусвязен. Ясно, что Q – это 2-разделяющее множество в H. По первому пункту леммы 11 множество Q делит H на две части, одна из которых содержит Q_i, а другая – Q_j. Обозначим эти части через A и B соответственно. Заметим, что по лемме 6 лепесток Q_ℓ отделяет $\mathrm{V}(G_{i,\ell})$ от $\mathrm{V}(G_{\ell,j})$ в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Поэтому Q_ℓ тоже является 2-разделяющим множеством в H. По лемме 6 лепесток Q_ℓ разделяет $\mathrm{V}(G_{i,\ell})$ и $\mathrm{V}(G_{\ell,j})$ в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Ясно, что тогда это верно и в графе H. По условию

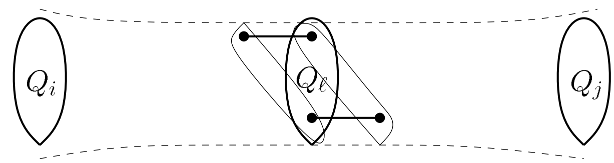


Рис. 4. Изображено утверждение леммы 18. Две вершины образуют множество, разделяющее Q_i и Q_j. При этом они лежат в разных частях относительно Q_ℓ. Тогда Q_ℓ является переключателем и при переключении переходит в множество, состоящее из этих двух вершин

.

одна из вершин множества Q лежит в $G_{i,\ell}$, а другая – в $G_{\ell,j}$. Тогда Q_ℓ разделяет множество Q в H, то есть разделяющие множества Q и Q_ℓ графа H зависимы. Значит, по третьему пункту леммы 11 можно так обозначить вершины, лежащие в Q_ℓ и Q, буквами u, v, и x, y, соответственно, что часть A отличается от $G_{i,\ell}$ заменой v на y, а часть B от части $G_{\ell,j}$ заменой u на x. Причем вершины x и y, очевидно, не смежны в $G_{i,j} - \mathrm{E}(Q_i, Q_j)$, и вершины u и v не смежны в том же графе. Докажем, что $Q_{\ell-1} = \{u, x\}$, а $Q_{\ell+1} = \{v, y\}$.

Ясно, что достаточно доказать первое, так как второе совершенно аналогично. Рассмотрим множество $Q' = \{u, x\}$. Если оно совпадает с Q_i, то все уже доказано, потому что пересекаться могут только соседние лепестки (то есть тогда $Q_i = Q_{\ell-1}$). Так что считаем, что $Q' \neq Q_i$. Значит, в части A есть вершины кроме x, y и u, так как $Q_i \not\subset \{x, y, u\}$. Заметим, что по лемме 10

$$\mathrm{Part}_H(Q, Q_\ell) = \{A - y, B - x, H(u, y), H(v, x)\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Bound}(A - y) = Q'.$$

В таком случае Q' является разделяющим множеством в H и отделяет Q_i от Q_j. Тогда Q' разделяет Q_i и Q_j и в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i, j)$. Кроме того $uy, vx \in \mathrm{E}(H)$, так как иначе при удалении u или x граф H распался бы на компоненты связности. Заметим, что $y \notin Q_i$, и $x \notin Q_j$, поэтому ребра uy и vx есть и в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i, j)$.

Если мы докажем, что Q' лежит в $\mathrm{V}(G_{\ell-1,\ell})$, то либо $Q' = Q_{\ell-1}$, либо по лемме 9 получим, что Q' можно добавить в лепестки ромашки, что противоречит ее максимальности. Таким образом, осталось понять, что $x \in \mathrm{V}(G_{\ell-1,\ell})$, так как вершина u там, очевидно, лежит.

Но мы доказали, что в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ есть ребро vx. Значит, должна найтись часть разбиения графа G ромашкой F, содержащая обе вершины v и x. При этом $v \in Q_\ell$, а x лежит в части $G_{i,\ell}$. Пусть вершина x не лежит в части $G_{\ell-1,\ell}$. Тогда она лежит в части $G_{\ell-2,\ell-1}$, причем $v \in Q_{\ell-1}$ (так как каждая вершина 0-ромашки лежит не более, чем в двух лепестках по лемме 14). В этом случае обозначим вторую вершину лепестка $Q_{\ell-1}$ через w. Заметим, что Q отделяет ее от Q_j в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$, а $Q_{\ell-1}$ либо совпадает с Q_i, либо отделяет u от Q_i в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$ по лемме 6. Но в таком случае в графе H вершина u может быть смежна лишь с x, y и w, причем она не лежит ни в Q_i ни в Q_j. Значит, степень u не больше трех и в исходном графе G, что невозможно. Противоречие.

Таким образом, доказали, что $Q_{\ell-1} = \{u, x\}$, а $Q_{\ell+1} = \{v, y\}$. При этом $Q_\ell = \{u, v\}$, и вершины u и v несмежны. Значит, по определению лепесток Q_ℓ является переключателем, и при переключении переходит в лепесток состоящий из вершин x и y, то есть как раз в лепесток Q.

□

Следствие 5. *Пусть Q_i и Q_j – это два неблизких лепестка обобщенной 0-ромашки F. Множество Q, лежащее в $\mathrm{V}(G_{i,j})$, состоит из двух вершин и отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Тогда либо Q является лепестком ромашки F, либо получается переключением некоторого ее лепестка, либо Q можно добавить в лепестки F, то есть найдется такое ℓ, что $F' = (Q_1, \dots, Q_\ell, Q, Q_{\ell+1}, \dots, Q_m)$ – обобщенная ромашка.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное ℓ от i до j. Предположим, что множество Q не лежит ни в части $G_{i,\ell}$, ни в части $G_{\ell,j}$. Тогда каждое из множеств $\mathrm{V}(G_{i,\ell} - Q_\ell)$ и $\mathrm{V}(G_{\ell,j} - Q_\ell)$ содержит по крайней мере по одной вершине множества Q. Но в Q всего 2 вершины, поэтому $Q \cap Q_\ell = \varnothing$. Значит, можно применить лемму 18 и получить требуемое утверждение.

Теперь предположим, что для любого ℓ от i до j множество Q лежит в одной из частей $G_{i,\ell}$ и $G_{\ell,j}$. При этом ясно, что для $\ell = i$ это часть $G_{\ell,j}$, а для $\ell = j$ это часть $G_{i,\ell}$. Рассмотрим такое s, что $Q \subset \mathrm{V}(G_{s,j})$ и $Q \subset \mathrm{V}(G_{i,s+1})$. Тогда $Q \subset \mathrm{V}(G_{s,s+1})$, потому что $\mathrm{V}(G_{s,s+1}) = \mathrm{V}(G_{s,i}) \cap \mathrm{V}(G_{i,s+1})$. Знаем, что Q состоит из двух вершин и отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Тогда либо Q совпадает с Q_s

или Q_{s+1}, либо по лемме 9 знаем, что $F' = (Q_1, \ldots, Q_s, Q, Q_{s+1}, \ldots, Q_m)$ – обобщенная ромашка. □

Следствие 6. *Пусть Q_i и Q_j – это два неблизких лепестка максимальной обобщенной 0-ромашки F. Множество Q, лежащее в $\mathrm{V}(G_{i,j})$, состоит из двух вершин и отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Тогда $Q \subset \mathrm{V}(F)$.*

Лемма 19. *Пусть Q_i и Q_j – это два различных лепестка обобщенной 0-ромашки F, таких что часть $G_{j,i}$ не является малой.*

1) *Оказалось, что какой-то лепесток Q отличный от Q_i в части $G_{i,j}$ пересекается с Q_i. Обозначим их необщие вершины через u и v соответственно. Тогда $Q = Q_{i+1}$, вершины u и v смежны, а вершина u не смежна с вершинами подграфа $G_{i,j} - Q_{i+1} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$.*

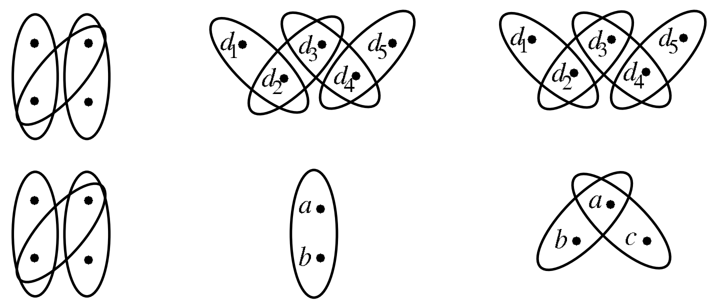
2) *Оказалось, что некоторый лепесток Q в части $G_{i,j}$, отличный от Q_i и Q_j, пересекается с $Q_{i,j}$. Тогда одна из вершин множества $Q_{i,j}$ смежна не более, чем с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$.*

Доказательство. 1) Заметим, что $Q = Q_{i+1}$ просто по первой части леммы 14, причем оттуда же вытекает, что u и v смежны. Теперь применим лемму 13 к лепесткам Q_i, Q_j и Q_{i+1} и получим требуемое.

2) Ясно, что Q пересекается с одним из лепестков Q_i и Q_j. Не умаляя общности, предположим, что он пересекается именно с Q_i. Обозначим единственную вершину множества $Q \setminus Q_i$ через u. Применим первую часть текущей леммы и получим, что u не смежна ни с кем в $G_{i,j} - Q_{i+1} - \mathrm{E}_{\mathrm{out}}(i,j)$. Тогда u не смежна ни с кем из $\mathrm{Int}(G_{i,j}) \setminus Q_{i+1}$. Заметим, что в множестве $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ есть максимум одна вершина, не содержащаяся в $\mathrm{Int}(G_{i,j}) \setminus Q_{i+1}$. Отсюда вытекает требуемое. □

В следующей теореме появляется несколько исключительных типов ромашек. Точное определение дано чуть ниже, и эти ромашки изображены на рисунке 5. Кроме того, в той же теореме имеется несколько исключительных графов. Они изображены на рисунке 6.

Определение 17. *Допустим, вершины обобщенной 0-ромашки можно таким образом обозначить через $a, b, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, что лепестками ромашки являются множества $\{a, b\}$, $\{d_1, d_2\}$, $\{d_2, d_3\}$, $\{d_3, d_4\}$, $\{d_4, d_5\}$. Будем говорить тогда, что это –* ромашка $W1$-типа *(см. рис.* 5b).



(a) (b) (c)

Рис. 5. Малая ромашка (a), ромашка $W1$-типа (b), ромашка $W2$-типа (c).

Если в множестве вершин ромашки есть еще одна вершина, назовем ее вершиной c, причем $\{a, c\}$ *является лепестком, то будем говорить, что это* – ромашка $W2$-типа (*см. рис.* 5c).

Теорема 3. *Пусть две максимальные обобщенные* 0*-ромашки* F *и* F' *имеют общее внутреннее разделяющее множество* T*. Известно, что некоторое внутреннее разделяющее множество ромашки* F *разделяет множество* $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$*. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

1° *Граф* G *изоморфен одному из трех исключений* (*см. рис.* 6).

2° *Множество* T *разбивается в обеих ромашках на лепестки одинаково, обе ромашки являются малыми, причем у них ровно два общих лепестка. Кроме того, индуцированный подграф графа* G *на двух общих лепестках ромашек* F *и* F' *– это цикл длины* 4.

3° *Множество* T *разбивается на лепестки по-разному, обе ромашки являются малыми, в каждой из них есть ровно по две вершины, не лежащие в другой.*

4° *Множество* T *разбивается на лепестки по-разному, обе ромашки –* $W1$*-типа, в каждой из них есть ровно по две вершины, не лежащие в другой.*

5° *Множество* T *разбивается на лепестки по-разному, обе ромашки –* $W2$*-типа, в каждой из них есть ровно по две вершины, не лежащие в другой.*

Замечание 10. 1) Несложно убедиться, что в условиях теоремы две ромашки F и F' не могут быть похожи, так как у похожих ромашек множество вершин одно и то же.

2) В доказательстве теоремы имеется довольно большое количество картинок. Все они подчиняются следующему правилу – сплошными линиями изображены лепестки, которые точно есть в соответствующей ромашке в разбираемом случае, а пунктирными – те, про которые к данному моменту еще неизвестно, какие из них есть, а каких нет.

Доказательство. ***Часть 1.*** *Множество T разбивается на лепестки в обеих ромашках одинаковым образом.*

Пусть $F = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$. Не умаляя общности, тогда $T = Q_1 \cup Q_i$, где i от 2 до $m-1$. Можно считать, что $Q_1 = Q'_1$ и $Q_i = Q'_j$. Заметим, что по следствию 1 обобщенные части, на которые множество T делит граф G как внутреннее разделяющее множество ромашки F, совпадают с обобщенными частями, на которое оно делит граф как внутреннее множество ромашки F'. То есть можно считать, что $G_{1,i} = G'_{1,j}$ и $G_{i,1} = G'_{j,1}$ (см. рис. 7).

Предположим, что $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i) = \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$. Рассмотрим произвольный лепесток Q ромашки F', лежащий в части $G_{1,i}$ и отличный от Q_1 и Q_i. По лемме 6 множество Q отделяет Q'_1 от Q'_j в $G'_{1,j} - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$. Но $Q'_1 = Q_1$, $Q'_j = Q_i$, $G'_{1,j} = G_{1,i}$ и по предположению $\mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j) = \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i)$. Значит, множество Q отделяет Q_1 от Q_i в $G_{1,i} - \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i)$.

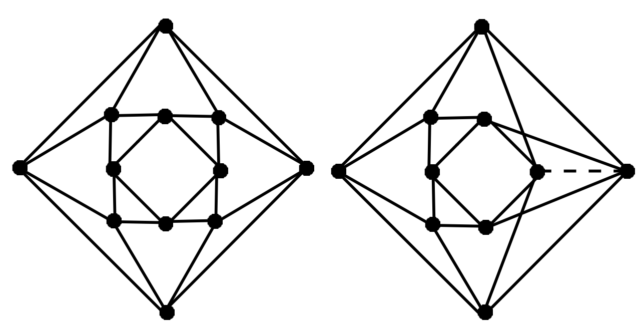


Рис. 6. Графы-исключения (пунктирное ребро может быть как проведено, так и не проведено).

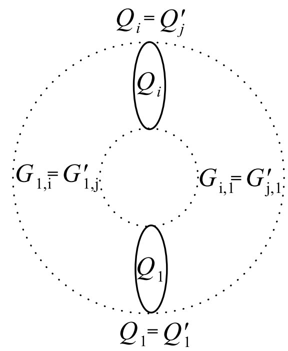


Рис. 7. Граф G, часть 1 теоремы 3.

Тогда по следствию 6 знаем, что $Q \subset \mathrm{V}(F)$. Аналогично, любой лепесток ромашки F в части $G_{1,i}$ содержится в множестве вершин ромашки F'. Таким образом, в части $G_{1,i}$ множества вершин ромашек F и F' совпадают. И при этом, ясно, что из $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i) = \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$ следует $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(i,1) = \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(j,1)$. А из этого совершенно аналогично выводится, что в части $G_{i,1}$ множества вершин наших ромашек тоже совпадают.

Вывод 1. Как только $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i) = \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$ или $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(i,1) = \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(j,1)$, так сразу $\mathrm{V}(F) = \mathrm{V}(F')$, что противоречит условию.

В частности, между лепестками Q_1 и Q_i должно быть проведено как минимум одно ребро, так как иначе все указанные множества внешних ребер пусты и, как следствие, равны. Теперь разберем несколько случаев в зависимости от количества ребер, проведенных между лепестками Q_i и Q_j.

Случай 1. *Между лепестками Q_1 и Q_i проведено два ребра, не имеющие общих концов.* Пусть ребра между лепестками Q_1 и Q_i – это uv и xy, где $Q_1 = \{u,x\}$, а $Q_i = \{v,y\}$ (см. рис. 8).

Тогда по пункту 3 леммы 17 обе ромашки F и F' – малые, причем в каждой из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ лежит по два лепестка каждой из ромашек. В частности, всего в каждой из ромашек 6 лепестков, и $i = j = 4$. При этом по тому же пункту в одной из частей $G_{1,4}$ и $G_{4,1}$ каждый лепесток F содержит одну из вершин u и v. Не умаляя общности, будем считать, что это часть $G_{1,4}$. Тогда, опять же по пункту 3 леммы 17 в

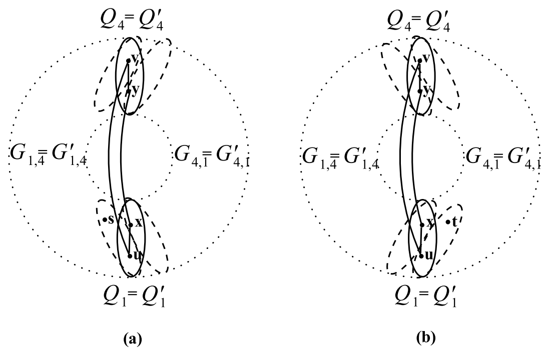


Рис. 8. Ромашки F (слева) и F' (справа), случай 1 части 1 теоремы 3.

части $G_{1,4}$ помимо Q_1 и Q_4 лежит ровно 2 лепестка, один из которых содержит u, а другой – v Ясно, что $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,4) = \{xy\}$. Часть с тем же свойством найдется и для ромашки F'. Рассмотрим два случая.

Случай 1.1. *Каждый лепесток ромашки F' в части $G_{1,4}$ содержит одну из вершин u и v.* В таком случае $\mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,4) = \{xy\} = \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,4)$, и по доказанному выше приходим к противоречию.

Случай 1.2. *Каждый лепесток ромашки F' в части $G_{4,1}$ содержит одну из вершин u и v.* Пусть вторые вершины лепестков ромашек F и F', содержащих u, – это s и t соответственно. По лемме 6 лепесток $\{u,s\}$ разделяет x и $G_{2,4}$ в $G_{1,4} - \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,4)$, а лепесток $\{u,t\}$ разделяет x и $G'_{4,6}$ в $G'_{4,1} - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(4,1)$. Тогда из $\mathrm{Int}(G_{1,4})$ вершина x смежна только с s, а из $\mathrm{Int}(G_{i,4})$ — только с t. При этом она не смежна с v (по пункту 4 леммы 17 между двумя неблизкими лепестками не может быть проведено более двух ребер). Значит, чтобы степень x была хотя бы 4, она обязана быть смежна с u. Аналогично, вершина y смежна с v и несмежна с u. Таким образом $G(Q_{1,4})$ – это цикл длины 4, то есть выполняется условие 2°.

Случай 2. *Между лепестками Q_1 и Q_i проведено два ребра, имеющие общий конец.*

Пусть оба эти ребра содержат u, где $u \in Q_1$. Тогда по лемме 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ лежит всего один лепесток ромашки F, и он содержит u. Не умаляя общности, это часть $G_{1,i}$. В таком случае $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i) = \varnothing$, так как иначе в части $G_{i,1}$ не более двух лепестков ромашки F, причем каждый из них пересекается с $Q_{1,i}$, что противоречит лемме 15 (см. рис. 9). Аналогичная часть найдется и для ромашки F'. Рассмотрим два случая.

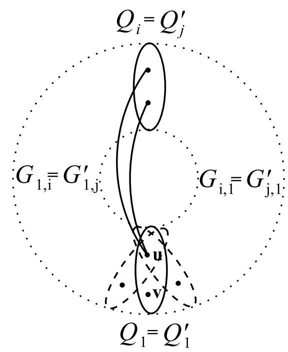


Рис. 9. Ромашка F', случай 2 части 1 теоремы 3.

Случай 2.1. *В части $G_{1,i} = G'_{1,j}$ лежит ровно один лепесток ромашки F', и он содержит u.* Тогда $\mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j) = \varnothing = \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i)$, и по указанным выше причинам приходим к противоречию.

Случай 2.2. *В части $G_{i,1} = G'_{j,1}$ лежит ровно один лепесток ромашки F', и он содержит u.* Пусть вторая вершина лепестка Q_1 – это v. Тогда так же, как в случае 1.2 доказываем, что вершина v смежна только с двумя вершинами не из $Q_{1,i}$ (а именно, со вторыми вершинами лепестков ромашек F и F', содержащих u). Но на этот раз v не смежна ни с одной вершиной лепестка Q_i. Значит, ее степень не более трех. Противоречие.

Случай 3. *Между лепестками Q_1 и Q_i проведено ровно одно ребро.*

Пусть это ребро uv, где $u \in Q_1$, а $v \in Q_i$. По первому пункту леммы 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки F содержат одну из вершин u и v. Не умаляя общности, считаем, что это часть $G_{1,i}$ (см. рис. 10). Тогда $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i) = \varnothing$. Часть с таким же свойством должна найтись и для ромашки F'. Рассмотрим два случая.

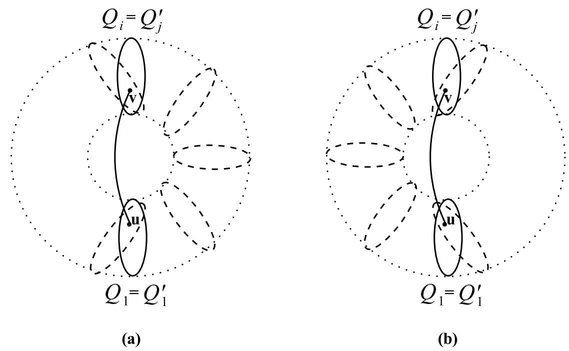


Рис. 10. Ромашки F (слева) и F' (справа), случай 3 части 1 теоремы 3.

Случай 3.1. *Каждый лепесток ромашки F' в части $G_{1,i} = G'_{1,j}$ содержит одну из вершин u и v.* В таком случае $\mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j) = \varnothing = \mathrm{E}^{F}_{\mathrm{out}}(1,i)$, и по указанным выше причинам приходим к противоречию.

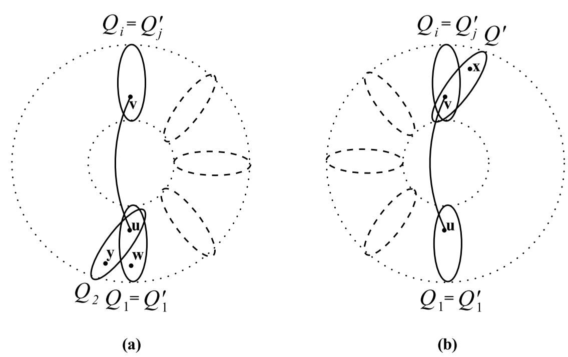


Рис. 11. Ромашки F (слева) и F' (справа), случай 3.2 части 1 теоремы 3.

Случай 3.2. *Каждый лепесток ромашки F' в части $G_{i,1} = G'_{j,1}$ содержит одну из вершин u и v.* Не умаляя общности, считаем, что в части $G_{1,i}$ есть лепесток ромашки F, содержащий вершину u. Ясно, что это лепесток Q_2. Пусть вторая вершина лепестка Q_1 – это w. Заметим, что в части $G_{i,1}$ не может быть лепестков ромашек F и F', содержащих вершину u, потому что иначе степень вершины w будет меньше четырех (см. случай 2.2). Но хоть какой-то лепесток ромашки F' там должен быть. Значит, там ровно один лепесток, и он содержит вершину v (см. рис. 10b). Пусть это лепесток Q'. Аналогично получаем, что в части $G_{1,i}$ ровно один лепесток ромашки F – лепесток Q_2 (см. рис. 11a).

Ясно, что множество Q' по лемме 6 разделяет Q_i и Q_j в $G_{i,1}$. Таким образом, по следствию 5 множество Q' либо является лепестком ромашки F, либо получается при переключении Q_{i+1}, либо Q' можно добавить в лепестки ромашки F. Последняя альтернатива невозможна в силу максимальности F. Аналогично доказываем соответствующее утверждение про лепесток Q_2. Пусть вторые вершины лепестков Q' и Q_2 – это x и y, соответственно. Тогда множества вершин ромашек F и F' пересекаются по шести вершинам – в обеих целиком содержатся лепестки Q_1 и Q_i, а также вершины x и y, причем все остальные лепестки F лежат в $G_{i,1}$, а все остальные лепестки F' – в $G_{1,i}$. Ясно, что ни одно из внутренних множеств ромашки F' не разделяет множество $V(F)\setminus V(F')$ (в обычном смысле, а не в обобщенном), а ни одно из внутренних множеств F не разделяет множество $V(F')\setminus V(F)$, что противоречит условию.

Часть 2. *Множество T разбивается на лепестки в обеих ромашках по-разному.*

Пусть $F=(Q_1,Q_2,\dots,Q_n)$, а $F'=(Q'_1,Q'_2,\dots,Q'_m)$. Не умаляя общности, можно считать, что $T=Q_1\cup Q_i=Q'_1\cup Q'_j$, причем $G_{1,i}=G'_{1,j}$ (последнее предположение возможно по следствию 1). Теперь разберем несколько случаев.

Случай 1. *Нашелся такой лепесток $Q_\ell\subset \mathrm{V}(G_{1,i})$, что части $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ непусты.*

Тогда по лемме 5 подграфы $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ связны, причем при удалении произвольной вершины из Q_ℓ они остаются связными. Рассмотрим лепесток Q' ромашки F', лежащий в $\mathrm{V}(G'_{1,j})=\mathrm{V}(G_{1,i})$, отличный от Q'_1 и Q'_j. Этот лепесток по лемме 6 должен отделять Q'_1 от Q'_j в $G'_{1,j}-\mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$.

Предположим, что у лепестка Q' нет вершины в $\mathrm{V}(G_{1,\ell}-Q_\ell)$. Тогда в $G'_{1,j}-\mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)-Q'$ вершины лепестка Q_1 связаны (через внутренность части $G_{1,\ell}$). Но одна из этих вершин принадлежит лепестку Q'_1, а другая – Q'_j. Противоречие. Аналогичное рассуждение можно провести и для части $G_{\ell,i}$.

Вывод 2. Лепестки Q' и Q_ℓ не пересекаются, причём одна из вершин Q' обязана лежать в $\mathrm{V}(G_{1,\ell} - Q_\ell)$, другая – в $\mathrm{V}(G_{\ell,i} - Q_\ell)$. Аналогично, для ромашки F'.

Итак, если лепесток одной из ромашек F и F' делит одну из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ на две непустые, то ни одна из его вершин не является вершиной другой ромашки.

Пусть $Q' = \{a, b\}$, где $a \in \mathrm{V}(G_{1,\ell})$, $b \in \mathrm{V}(G_{\ell,i} - Q_\ell)$. Рассмотрим вершину a. Возможны 3 случая:

(1) $a \in Q_1$;
(2) Для одной из вершин лепестка Q_1 вершина a является единственной смежной из $\mathrm{V}(G_{1,\ell} - Q_1)$;
(3) Из обеих вершин лепестка Q_1 ведут ребра в $\mathrm{V}(G_{1,\ell} - Q_1 - a)$, причем $a \notin Q_1$.

Заметим, что в первом случае, очевидно, вершина a содержится в $\mathrm{V}(F)$, а во втором случае это так по следствию 3. Кроме того во втором случае, очевидно, найдется вершина из $Q_{1,i}$, смежная лишь с одной вершиной в $G_{1,i} - Q_{1,i}$, а в первом случае это так, потому что лепесток Q' пересекается с Q'_1 или Q'_j и можно воспользоваться пунктом 2 леммы 19.

Вывод 3. В двух первых случаях $a \in \mathrm{V}(F)$, и найдется вершина из $Q_{1,i}$, смежная лишь с одной вершиной из $G_{1,i} - Q_{1,i}$.

Пусть выполнено второе или третье условие. Рассмотрим компоненты связности графа $G_{1,\ell} - a - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1, j)$. Напомним, что множество $\{a, b\}$ должно отделять Q'_1 от Q'_j в $G'_{1,j} - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1, j)$, и при этом b не лежит в части $G_{1,\ell}$. Тогда вершины лепестка Q_1 должны лежать в разных компонентах связности графа $G_{1,\ell} - a - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1, j)$. Предположим, что в одной из компонент связности этого графа есть вершины, не лежащие в $Q_{1,\ell}$. В этой компоненте лежит не более трех вершин из $Q_{1,\ell}$. Поэтому ровно три, так как при удалении их и вершины a граф G становится несвязным (ни одна из вершин внутренности части $G_{\ell,1}$ не может быть смежна ни с одной вершиной из $G_{1,\ell} - Q_{1,\ell}$). Пусть в ней нет вершины $x \in Q_1$. Тогда компонента связности, содержащая x, состоит всего из одной вершины.

Вывод 4. Если $a \notin Q_1$, подграф $G_{1,\ell} - a - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$ несвязен и в нем есть вершины не из $Q_{1,\ell}$, то $G_{1,\ell} - a - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$ имеет ровно две компоненты связности, причем одна из них – это некоторая вершина x из $Q_{1,\ell}$.

Значит, вершина x несмежна ни с одной из вершин множества $\mathrm{V}(G_{1,\ell} - a)$, что противоречит третьему условию. Таким образом, если выполнено третье условие, то все компоненты связности графа $G_{1,\ell} - a - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$ содержат только вершины из $Q_{1,\ell}$. То есть $\mathrm{Int}(G_{1,\ell}) = \{a\}$, и вершина a, очевидно, смежна со всеми четырьмя вершинами $Q_{1,\ell}$. Тогда вершины из $\mathrm{V}(G_{1,\ell} - Q_1 - a)$, к которым ведут ребра из вершин лепестка Q_1 – это вершины лепестка Q_ℓ, причем вершина лепестка Q_ℓ не может быть смежна с обеими вершинам лепестка Q_1, так как они находятся в разных компонентах связности графа $G_{1,\ell} - a$. Значит, в подграфе $G_{1,\ell} - a - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$ проведено ровно два ребра, причем они не имеют общих концов и соединяют вершины лепестка Q_1 с вершинами лепестка Q_ℓ.

Определение 18. *В этом случае назовем подграф $G_{1,\ell}$* бабочкой. *Заметим, что мы называем $G_{1,\ell}$ бабочкой вне зависимости от того, соединены ребром вершины лепестка Q_1 или нет (см. рис. 12).*

Вывод 5. Выполнен один из двух вариантов:

- вершина a лежит в множестве вершин ромашки F, причем какая-то из вершин множества $Q_{1,i}$ смежна лишь с одной вершиной из $G_{1,i} - Q_{1,i}$;
- $G_{1,\ell}$ – это *бабочка*.

Аналогично для вершины b.

Теперь докажем, что если $a \notin \mathrm{V}(F)$, то $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ – бабочки. По доказанному выше $G_{1,\ell}$ – бабочка. Заметим, что если вершины лепестка Q_ℓ – в одной компоненте связности графа $G_{\ell,i} - b - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$, то вершины лепестка Q_1 лежат в одной компоненте связности графа $G_{1,i} - a - b - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$, но одна из них лежит в Q'_1, а другая – в Q'_j, и лепесток $Q = \{a, b\}$ должен их разделять в $G_{1,i} - \mathrm{E}(Q'_1, Q'_j)$. Таким образом, в графе $G_{\ell,i} - b$ вершины лепестка Q_ℓ обязаны находиться в разных компонентах связности. При этом, каждая из вершин Q_ℓ смежна по крайней мере с одной вершиной из $G_{\ell,i} - b$, потому как в части $G_{1,\ell}$ у каждой из них степень 2. Значит, аналогично доказанному ранее, все компоненты связности графа $G_{\ell,i} - b$ состоят из вершин множества $Q_{\ell,i}$, то есть $\mathrm{Int}(G_{\ell,i}) = \{b\}$, и вершина b смежна со всеми четырьмя вершинами множества $Q_{\ell,i}$. Кроме того, так как все вершины графа G, очевидно, должны иметь степень не меньше четырех, каждая из вершин лепестка Q_ℓ должна быть смежна как минимум с одной вершиной лепестка Q_i. Если они смежны с одной и той же, то в графе $G_{1,i} - a - b$ вершины лепестка Q_ℓ и вместе с ними и вершины лепестка Q_1 лежат в одной компоненте связности, чего не может быть. Тогда вершины лепестка Q_ℓ не могут быть смежны с одной и той же вершиной лепестка Q_i, и подграф $G_{\ell,i}$ тоже является бабочкой.

Вывод 6. Если нашелся такой лепесток $Q_\ell \subset \mathrm{V}(G_{1,i})$, что части $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ непусты, то выполнен один из двух вариантов:

- все вершины лепестков ромашки F' с номерами от 1 до j содержатся в множестве вершин ромашки F, причем какая-то из вершин множества $Q_{1,i}$ смежна лишь с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$;
- оба подграфа $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ являются бабочками.

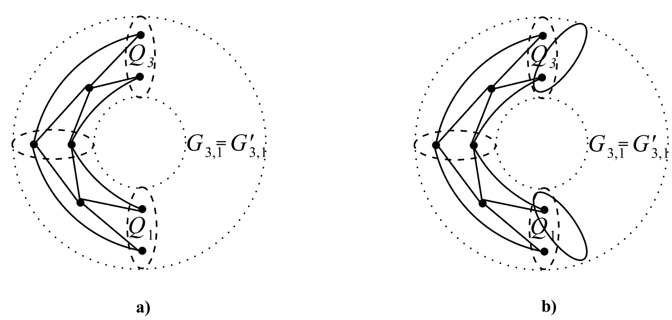


Рис. 12. Ромашка F, случай 1.1 части 2 теоремы 3.

Случай 1.1. *Оба подграфа* $G_{1,\ell}$ *и* $G_{\ell,i}$ *являются бабочками.* По определению бабочки $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,\ell) = \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(\ell,i) = \varnothing$ (см. рис. 12a). Тогда из леммы 6 вытекает, что $i = 3$. Аналогично, $j = 3$. Докажем, что ребер между лепестками Q_1 и Q_3 на самом деле быть не может. Ясно, что в таком случае и между лепестками Q'_1 и Q'_3 нет ребер.

Пусть $Q_1 = \{s,t\}$, а $Q_3 = \{u,v\}$, и вершины s и u смежны (см. рис. 12b). Тогда по лемме 17 либо все лепестки ромашки F, лежащие в $\mathrm{V}(G_{1,3})$, должны содержать одну из вершин s и u, либо все, лежащие в $\mathrm{V}(G_{3,1})$, должны содержать одну из вершин s и u. Часть $G_{1,3}$ таким свойством, очевидно, не обладает, поэтому все лепестки, лежащие в $\mathrm{V}(G_{3,1})$, должны содержать либо s, либо u. Ясно, что не более, чем один из них содержит вершину s и не более, чем один – вершину u. Поэтому обязаны найтись оба – иначе в F будет всего четыре лепестка, какие-то два из которых пересекаются. Значит, других ребер между Q_1 и Q_3 точно нет (по той же лемме 17). Заметим, что у вершин t и v в $G_{1,3} - Q_{1,3}$ по два соседа, а в $G_{3,1} - Q_{1,3}$ – по одному (вторые вершины лепестков F, содержащих s и u соответственно, см. лемму 19). Поэтому каждая из вершин t и v смежна по крайней мере с одной вершиной из $Q_{1,3}$. Но t не смежна с вершинами лепестка Q_3, а v – с вершинами лепестка Q_1. Значит, есть ребра st и uv. Но это два ребра без общих концов между лепестками Q'_1 и Q'_j. Значит, по лемме 17 ромашка F' является малой, и все ее лепестки пересекаются с $Q'_{1,3}$. В то же время $Q'_2 = \{a,b\}$ и $Q'_2 \cap Q'_{1,3} = \varnothing$. Противоречие.

Итак, вершины множества $Q_{1,3}$ попарно несмежны. Значит, у каждой из них в части $G_{1,3}$ ровно два соседа. Тогда каждая из них смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\mathrm{Int}(G_{3,1})$. Значит, по лемме 19 в части $G_{3,1}$ нет ни лепестков ромашки F, ни лепестков ромашки F', пересекающихся с $Q_{1,3}$. Теперь разберем два случая в зависимости от того, есть ли в части $G_{3,1}$ лепестки F и F', разделяющие эту часть на две непустые. Заметим, что случаи существования подобного лепестка у ромашки F и у F' совершенно аналогичны, поэтому достаточно рассмотреть один из них.

Случай 1.1.1. *Нашелся такой лепесток $Q_x \subset \mathrm{V}(G_{3,1})$ ромашки F, что части $G_{3,x}$ и $G_{x,1}$ непусты.* Тогда рассмотрим произвольный лепесток ромашки F', лежащий в части $G_{3,1}$. По доказанному ранее либо какая-то из вершин множества $Q_{1,3}$ имеет только одного соседа из множества $\mathrm{Int}(G_{3,1})$, либо оба подграфа $G_{3,x}$ и $G_{x,1}$ являются бабочками. Заметим, что первое невозможно, так как иначе у какой-то из вершин множества $Q_{1,3}$ в графе G будет степень меньше четырех. Значит, обе части $G_{3,x}$ и $G_{x,1}$ являются бабочками, и наш граф полностью определен (см. рис. 13) и является одним из трех исключений (см. рис. 6, слева). То есть выполнен первый вариант нашей теоремы.

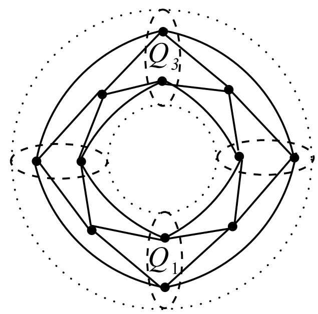


Рис. 13. Граф G, случай 1.1.1 части 2 теоремы 3.

Случай 1.1.2. *В части $G_{3,1}$ нет ни лепестков F, ни лепестков F', делящих эту часть на две непустые.* Рассмотрим произвольный лепесток Q_x ромашки F, где x от 3 до 1. Не умаляя общности, часть $Q_{3,x}$ пуста. Степень обеих вершин лепестка Q_3 (как и степень любой другой вершины графа G) должна быть не менее четырех, поэтому каждая из них соединена с обеими вершинами Q_x. В таком случае каждый лепесток Q' ромашки F', лежащий в части $G_{3,1}$ должен содержать либо одну из вершин лепестка Q_3, либо обе вершины лепестка Q_x (то есть совпадать с ним), так как иначе вершины лепестка Q_3 связаны в $G_{3,1} - Q' - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1, j)$, что невозможно по лемме 6 (одна из вершин лепестка Q_3 лежит в Q'_1, а другой – в Q'_3).

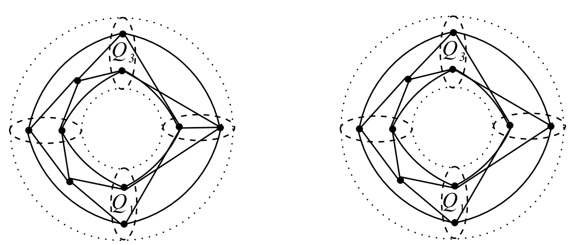


Рис. 14. Граф G, случай 1.1.2 части 2 теоремы 3. Ребро между вершинами правого лепестка может быть как проведено (рис. слева), так и не проведено (рис. справа).

Но если есть лепесток ромашки F', совпадающий с Q_x, то часть $G_{x,1}$ пуста, иначе по лемме 5 этот лепесток не разделяет Q_1 в $G_{3,1}$, то есть не отделяет Q'_1 от Q'_3, а должен. В таком случае совершенно аналогично тому, что было доказано про часть $G_{3,x}$, обе вершины лепестка Q_1 должны быть смежны с обеими вершинами лепестка Q_x, и граф почти полностью определен – неизвестно только, соединены ли ребром две вершины лепестка Q_x (см. рис. 14). Значит, граф является одним из трех исключений, то есть выполнен первый вариант текущей теоремы (см. рис. 6, справа).

Осталось рассмотреть случай, когда есть лепесток Q' ромашки F', содержащий одну из вершин лепестка Q_3. В этом случае лепесток Q' пересекается с одним из лепестков Q'_1 и Q'_3. По лемме 19 вторая вершина того лепестка, с которым он пересекается, будет смежна не более, чем с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G'_{3,1}) = \mathrm{Int}(G_{3,1})$. Лепесток Q_1 состоит как раз из вторых вершин лепестков Q'_1 и Q'_3. Тогда одна из вершин лепестка Q_1 будет смежна не более, чем с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{3,1})$. При этом она смежна лишь с двумя вершинами из части $G_{1,3}$. Противоречие.

Таким образом, случай 1.1 можно считать полностью разобранным. Было доказано, что если в какой-то из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ есть лепесток ромашки F, делящий эту часть на две непустые части, являющиеся бабочками, то весь граф G с точностью до изоморфизма совпадает с одним из трех графов-исключений, в каждом из которых не более 12 вершин.

Вывод 7. Если в какой-то из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ нашелся лепесток ромашки F, делящий ее на две непустые, то вершин множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ в этой части нет (см. вывод 6). Аналогично для F'.

Случай 1.2. *Все вершины из* $\mathrm{V}(F')$*, лежащие в части* $G_{1,i}$*, содержатся в* $\mathrm{V}(F)$.

Из доказанного выше (см. вывод 2) следует, что вершины лепестка Q_ℓ не лежат в $\mathrm{V}(F')$. Предположим, что нашелся лепесток ромашки F', делящий часть $G'_{1,j}$ (которая, напомним, совпадает с $G_{1,i}$) на две непустые. Тогда все вершины из $\mathrm{V}(F)$, лежащие в части $G_{1,i}$, содержатся в $\mathrm{V}(F')$ (см. вывод 7). Но $Q_\ell \not\subset \mathrm{V}(F')$. Противоречие.

Значит, для любого лепестка Q'_x ромашки F', где x от 1 до j, одна из частей $G'_{1,x}$ и $G'_{x,j}$ пуста. Ясно, что тогда все вершины непустого множества $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$ в части $G_{1,i}$ находятся во внутренности некоторой одной общей для всех них части разбиения графа G ромашкой F' (надо взять либо $G'_{1,2}$, если $G'_{2,j}$ пуста, либо $G'_{j-1,j}$, если $G'_{1,j-1}$ пуста, либо $G'_{x,x+1}$, где части $G'_{1,x}$ и $G'_{x+1,j}$ пусты). Значит, по первой части леммы 5 ни одно из внутренних множеств ромашки F' не разделяет множество $(\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')) \cap \mathrm{V}(G_{1,i})$, причем даже не в смысле обобщенных частей, а в смысле обычных.

Если в части $G_{i,1}$ нашелся лепесток ромашки F, делящий эту часть на две непустые, то все вершины ромашки F', лежащие в $G_{i,1}$, являются вершинами ромашки F (см. вывод 7). Это невозможно, так как мы знаем, что все вершины ромашки F', лежащие в $G_{1,i}$, являются вершинами ромашки F, поэтому если тоже самое выполнено и для части $G_{i,1}$, то $\mathrm{V}(F') \subset \mathrm{V}(F)$, причем $\mathrm{V}(F') \neq \mathrm{V}(F)$, что противоречит максимальности ромашки F'.

Пусть в части $G_{i,1}$ нашелся лепесток F', делящий эту часть на две непустые. Тогда вершины из $\mathrm{V}(F)$, лежащие в части $G_{i,1}$, содержатся в $\mathrm{V}(F')$ (см. вывод 7). Значит, аналонично доказанному выше, никакое внутреннее множество ромашки F не разделяет множество вершин $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$, лежащих в части $G_{i,1}$. Итак, в части $G_{1,i}$ нет вершин множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$, и ни одно внутреннее множество ромашки F' не разделяет $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$, а в части $G_{i,1}$ нет вершин множества $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$, и ни одно внутреннее множество ромашки F не разделяет $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Тогда это утверждение верно и глобально в графе G для обеих ромашек – ни одно внутреннее множество ромашки F' не разделяет $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$, и ни одно внутреннее множество ромашки F не разделяет $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Противоречие.

Вывод 8. Если в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ нашелся лепесток F, делящий эту часть на две непустые, то возможны следующие варинты:

- граф является одним из исключений (см. рис. 6);
- все вершины ромашки F', содержащиеся в этой части, являются вершинами ромашки F, и при этом ни одно внутреннее множество F' не разделяет множество вершин $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$, содержащихся в этой части.

Аналогично для F'. Поэтому в случае, когда в обеих частях $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ есть лепестки одной из ромашек F и F', делящие соответствующую часть на две непустые и не пересекающиеся с $Q_{1,i}$, получается, что граф G – одно из исключений.

Далее всюду будем считать, что граф G не изоморфен ни одному из трех исключений. На этом завершим исследование случая 1. Он, безусловно, не до конца разобран, однако мы получили несколько очень важных выводов, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Теперь посмотрим, каким же образом внутреннее множество ромашки F, например, может разделять $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Докажем, что ни одно внутреннее множество F не может разделять

$$(\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)) \cap \mathrm{V}(G_{1,i}).$$

Пусть такое множество нашлось. Ясно, что тогда множество $\mathrm{V}(F)$ не содержит всех вершин ромашки F', содержащихся в части $G_{1,i}$. Поэтому точно нет лепестков ромашки F, делящих часть $G_{1,i}$ на две непустые. Значит, множество вершин $(\mathrm{V}(F')\setminus\mathrm{V}(F))\cap\mathrm{V}(G_{1,i})$, целиком лежит во внутренности одной из частей разбиения графа G ромашкой F, и поэтому не разделяется ни одним внутренним множеством F. Аналогичное утверждение верно и для части $G_{i,1}$.

Вывод 9. Если некое внутреннее множество ромашки F разделяет множество $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$, то оно обязано разделять его на две части, одна из которых содержится в части $G_{1,i}$, а другая — в $G_{i,1}$. Тогда в обеих частях $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ должны найтись вершины ромашки F', не являющиеся вершинами ромашки F. Поэтому ни в одной из этих частей нет лепестков ромашки F, делящих эту часть на две непустые.

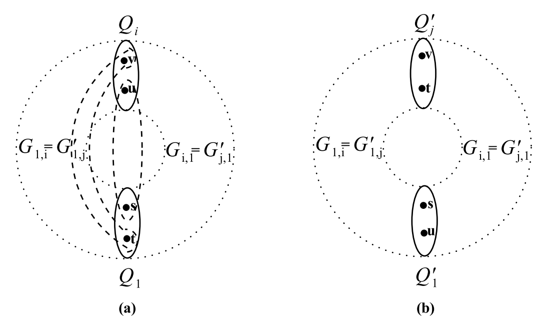


Рис. 15. Ромашки F и F', часть 2 теоремы 3. Разбиение на лепестки общего разделяющего множества.

Обозначим вершины множества $Q_{1,i}$ через s, t, u, v, где $Q_1 = \{s, t\}$, а $Q'_1 = \{s, u\}$. Ясно, что тогда $Q_i = \{u, v\}$, а $Q'_j = \{t, v\}$ (см. рис. 15).

Приведем здесь список случаев, их будет 7 штук, считая уже рассмотренный (но еще не до конца разобранный) случай 1:

(1) нашелся такой лепесток $Q_\ell \subset \mathrm{V}(G_{1,i})$, что части $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ непусты.
(2) между лепестками Q_1 и Q_i нет ребер;
(3) между лепестками Q_1 и Q_i проведено ровно одно ребро, причем либо оба его конца лежат в Q'_1, либо оба – в Q'_j;
(4) между лепестками Q_1 и Q_i проведено ровно одно ребро, причем один из его концов содержится в Q'_1, а другой – в Q'_j;
(5) между лепестками Q_1 и Q_i проведено два ребра, причем они имеют общий конец.
(6) проведены ребра su и tv;
(7) проведены ребра sv и tu.

Далее мы рассмотрим случаи $2-7$. Несложно убедиться в том, что эти случаи покрывают все возможные варианты. Случай 1 был рассмотрен для удобства – в дальнейшем мы будем активно ссылаться на выводы, полученные в ходе рассмотрения случая 1. Теперь введем несколько обозначений и перейдем к разбору указанных случаев.

Определение 19. *Рассмотрим вершины $a, b \in \mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$, где $a \in \mathrm{V}(G_{1,i})$, а $b \in \mathrm{V}(G_{i,1})$ (см. вывод 9). Пусть лепестки F', содержащие a и b – это Q'_x и Q'_y соответственно.*

Случай 2. *Между лепестками Q_1 и Q_i нет ребер.*

Предположим, что Q'_x пересекается с множеством $Q_{1,i}$. Не умаляя общности, будем считать, что он пересекается с лепестком Q'_1 и содержит вершину s. Тогда вершина u в части $G_{1,i}$ может быть смежна только с a и какими-то вершинами из множества $Q_{1,i}$. Но ребер между лепестками Q_1 и Q_i нет. Поэтому a – это единственная вершина из $\mathrm{V}(G_{1,i} - Q_i)$, смежная с $u \in Q_i$, и по следствию 3 получается, что $a \in \mathrm{V}(F)$. Противоречие.

Вывод 10. Лепесток Q'_x не пересекается с $Q_{1,i}$. Совершенно аналогично можно доказать, что Q'_y не пересекается с $Q_{1,i}$.

Значит, по лемме 17 между лепестками Q'_1 и Q'_j нет ребер. Таким образом, вершины s, t, u, v попарно не смежны. Заметим, что оба лепестка Q'_x и Q'_y одновременно не могут разбивать части $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ соответственно на две непустые, так как иначе $\mathrm{V}(F)$ содержалось бы строго внутри $\mathrm{V}(F')$, что невозможно (см. вывод 8). Теперь разберем несколько случаев в зависимости от наличия лепестков ромашки F, не пересекающихся с $Q_{1,i}$. В каждом из них мы, в частности, докажем, что ни один из лепестков Q'_x и Q'_y не может разбивать соответствующую часть на две непустые.

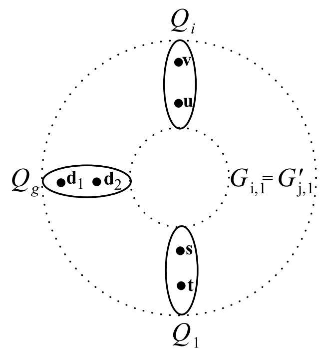


Рис. 16. Ромашка F, случай 2.1 части 2 теоремы 3.

Случай 2.1. *В какой-то из частей* $G_{1,i}$ *и* $G_{i,1}$ *есть лепестки* F, *не пересекающиеся с* $Q_{1,i}$. Не умаляя общности, считаем, что такие лепестки есть в части $G_{1,i}$. Рассмотрим один из них в этой части. Пусть это лепесток $Q_g = \{d_1, d_2\}$ (см. рис. 16).

Как уже было доказано (см. вывод 9), одна из частей $G_{1,g}$ и $G_{g,i}$ пуста. Не умаляя общности, будем считать, что пуста именно часть $G_{1,g}$.

Предположим, что Q'_x разбивает часть $G_{1,i}$ на две непустые. Заметим, что из доказанного выше (см. вывод 2) следует, что ни один из лепестков F, содержащихся в $G_{1,i}$, не может пересекаться с Q'_x. В частности, ни одна из вершин d_1 и d_2 не содержится в Q'_x. Ясно, что s и t могут быть смежны только с d_1 и d_2 в $G_{1,i}$, так как по лемме 6 лепесток $Q_g = \{d_1, d_2\}$ должен отделять s и t от $G_{1,i} - s - t$ в $G_{1,i}$. Тогда каждая из вершин s и t лепестка Q_1 смежна только с одной вершиной в $G_{1,i}$, так как лепесток Q'_x по лемме 6 обязан разделять s и t в части $G_{1,i}$. Теперь рассмотрим лепесток Q'_y. Так как Q'_x делит $G_{1,i}$ на две непустые части, одна из частей $G'_{j,y}$ и $G'_{y,1}$ пуста (см. вывод 8). Не умаляя общности, будем считать, что это часть $G'_{j,y}$. В таком случае, вершина $t \in Q'_j$ смежна не более, чем с двумя вершинами в $G_{i,1}$ (это вершины лепестка Q'_y). При этом в части $G_{1,i}$ она смежна лишь с одной вершиной. Таким образом, ее степень меньше четырех. Противоречие.

Вывод 11. Лепесток Q'_x не может разбивать часть $G_{1,i}$ на две непустые.

Не умаляя общности, будем считать, что часть $G'_{1,x}$ пуста. Напомним, что часть $G_{1,g}$ также пуста, а по лемме 7 ни одна из вершин множества $Q_{1,g}$ не отделяет Q_1 от Q_g в $G_{1,g}$. Поэтому среди ребер между лепестками Q_1 и Q_g найдутся два, не имеющие общих концов. Пусть это ребра sd_1 и td_2. Тогда вершина d_1 обязательно содержится в части $G'_{1,x}$. Но эта часть пуста. Значит, вершина d_1 содержится в лепестке Q'_x. Вспомним, что по определению лепесток Q'_x – это лепесток ромашки F', содержащий вершину a, не являющуюся вершиной ромашки F. Значит, $Q'_x = \{d_1, a\}$ (см. рис. 17).

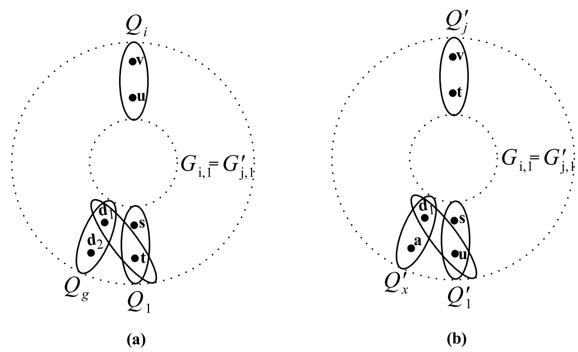


Рис. 17. Ромашки F и F', случай 2.1 части 2 теоремы 3.

Вывод 12. Вершина s смежна в части $G_{1,i}$ только с вершиной d_1, а каждая из вершин t и u – не более, чем с двумя. А именно, вершина t может быть смежна только с d_1 и d_2, а u – только с d_1 и a.

Теперь разберем два случая в зависимости от того, есть ли в части $G_{i,1}$ лепестки, не пересекающиеся с $Q_{1,i}$.

Случай 2.1.1. *В части* $G_{i,1}$ *есть лепестки* F, *не пересекающиеся с* $Q_{1,i}$. Пусть это лепесток $Q_h = \{d_3, d_4\}$ (см. рис. 18). Одна из частей $G_{i,h}$ и $G_{h,1}$ пуста (см. вывод 9). При этом вершина s в части $G_{1,i}$ имеет степень 1 (см. вывод 12). Значит, если пуста часть $G_{h,1}$ (напомним, $Q_h \cap Q_{1,i} = \varnothing$), то степень s в графе G меньше четырех, что невозможно. Тогда пуста именно часть $G_{i,h}$.

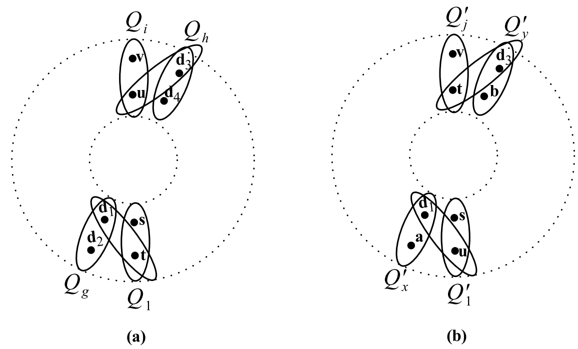


Рис. 18. Ромашки F и F', случай 2.1.1 части 2 теоремы 3.

Аналогично доказанному выше (см. вывод 11), лепесток Q'_y не может разбивать часть $G_{i,1}$ на две непустые, и одна из вершин s, t, u, v смежна там только с одной вершиной (см. вывод 12). Ясно, что это именно вершина v, так как у остальных степень в $G_{1,i}$ не больше двух. Тогда пуста именно часть $G'_{j,y}$.

Итак, части $G_{i,h}$ и $G'_{j,y}$ пусты. Аналогично доказанному выше получаем, что лепестки Q_h и Q'_y пересекаются. Пусть d_3 – это их общая вершина. По определению лепесток Q'_y – это лепесток ромашки F', содержащий вершину b, не являющуюся вершиной ромашки F. Значит, $Q'_y = \{d_3, b\}$. В таком случае v смежна в $G_{i,1}$ только с d_3, вершина t может быть смежна только с d_3 и b, а вершина u – только с d_3 и d_4. Значит, вершина t имеет степень 4 и обязательно смежна с вершинами d_1, d_2, d_3 и b. Аналогично, вершина u смежна с d_1, d_3, d_4 и a.

Заметим, что множество $\{t, d_1\}$ отделяет Q_1 от Q_g в $G_{1,g}$, и по следствию 5 множество $\{t, d_1\}$ либо является лепестком ромашки F, либо получается переключением некоторого ее лепестка, либо это множество можно добавить в ее лепестки. Последнее невозможно в силу максимальности ромашки F, второе – потому что вершины переключателя не могут быть смежны. Значит, множество $\{t, d_1\}$ является лепестком ромашки F. Аналогично доказывается, что $\{u, d_3\}$ является лепестком F, а множества $\{u, d_1\}$ и $\{t, d_3\}$ – лепестками ромашки F'.

Несложно убедиться в том, что других лепестков нет. Действительно, пусть нашелся еще какой-то лепесток ромашки F. Не умаляя общности, пусть он лежит в $G_{1,i}$. Одна из частей, на которые он делит $G_{1,i}$, должна быть пустой. Это именно часть, содержащая лепесток Q_i, так как иначе наш лепесток содержится в $Q_{1,g}$ и совпадает с $\{d_1, d_2\}$ или с $\{t, d_1\}$, а мы предположили обратное. Но тогда в части $G_{1,i}$ либо степень u не больше одного (если наш лепесток содержит v), либо степень v — не больше двух (если наш лепесток не содержит v). Первое приводит к тому, что степень u в G меньше четырех, второе – к тому, что степень v в G меньше четырех. И то, и другое невозможно, поэтому приходим к противоречию. Совершенно аналогично доказывается, что у F' нет других лепестков.

Таким образом, в этом случае внутреннее множество $\{t, d_1, u, d_3\}$ ромашки F разделяет $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$, но при этом обе наши ромашки являются малыми и имеют 6 общих вершин (см. рис. 18). То есть выполнен вариант 3° теоремы.

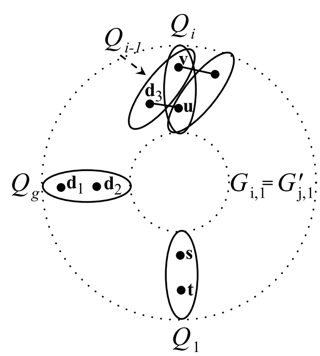


Рис. 19. Граф G, случай 2.1.2 части 2 теоремы 3.

Случай 2.1.2. *В части $G_{i,1}$ нет лепестков F, не пересекающихся с $Q_{1,i}$.* Рассмотрим часть $G_{i,1}$ (см. рис. 19). Ясно, что лепестков ромашки F, пересекающихся с Q_1 в ней нет, потому что обе вершины этого лепестка имеют степень не более двух в $G_{1,i}$. При этом лепестков F, не пересекающихся с $Q_{1,i}$ в ней по нашему предположению тоже нет. Значит, в части $G_{i,1}$ есть ровно один лепесток ромашки F, и он пересекается с лепестком Q_i. Будем считать, что он содержит вершину u. Тогда вершина v имеет степень 1 в части $G_{i,1}$. Заметим, что должен найтись еще какой-то лепесток ромашки F кроме тех, что содержат u и тех, что содержатся в $Q_{1,g}$, так как иначе все внутренние множества этой ромашки содержат u, что невозможно по лемме 2. Как мы доказали, в части $G_{i,1}$ таких лепестков нет. Значит, он лежит в части $G_{1,i}$. Одна из частей, на которые он ее делит, обязана быть пустой. Так как этот лепесток не содержится в $Q_{1,g}$, пуста именно та часть, которая содержит лепесток Q_i. Если в ней четыре вершины, то обе вершины лепестка Q_i имеют степень не более двух в $G_{1,i}$, но при этом v имеет степень 1 в части $G_{i,1}$, что приводит к противоречию. Значит, в этой части ровно три вершины, причем вершина v является общей вершиной лепестков Q_i и Q_{i-1}.

Пусть вторая вершина лепестка Q_{i-1} – это вершина d_3. Тогда $ud_3 \in \mathrm{E}(G)$. Лепесток Q'_x не пересекается с $Q_{1,i}$ (см. вывод 10). Рассмотрим части, на которые он делит часть $G_{1,i}$. Одна из них пуста (см. вывод 11). Заметим, что часть, содержащая v, не может быть пустой, так как иначе v в части $G_{1,i}$ может быть смежна только с вершинами лепестка Q'_x, а в части $G_{i,1}$ она, как мы знаем, имеет степень 1. Значит, пуста часть, содержащая лепесток Q'_1. Но вершины d_1 и d_3 обязательно в ней содержатся, так как они смежны с вершинами s и u соответственно. Поэтому лепесток Q'_x должен содержать и d_1, и d_3. Но тогда в этом лепестке нет вершины a, не являющейся вершиной ромашки F. Противоречие.

Случай 2.2. *Ни в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ нет лепестков F, не пересекающихся с $Q_{1,i}$.* Тогда ромашка F является малой. Заметим, что, как уже было доказано ранее, оба лепестка Q'_x и Q'_y не могут одновременно делить части $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ соответственно на две непустые (см. вывод 8). Не умаляя общности, предположим, что часть $G'_{1,x}$ является пустой. В таком случае обе вершины s и u имеют степень не более чем два в подграфе $G_{1,i}$ (см. вывод 10). Следовательно, в части $G_{i,1}$ нет лепестков ромашки F, содержащих t или v (иначе у вершин s и u будет маленькая степень в графе G). Но по лемме 15 в ромашке F такие лепестки есть. Значит, они лежат в части $G_{1,i}$. Пусть это лепестки $\{t, d_1\}$ и $\{v, d_2\}$. Тогда $sd_1, ud_2 \in \mathrm{E}(G)$. Значит, обе вершины d_1 и d_2 содержатся в части $G'_{1,x}$. Но эта часть пуста, поэтому лепесток Q'_x должен содержать обе эти вершины. Так как $d_1, d_2 \in \mathrm{V}(F)$, приходим к противоречию.

Вывод 13. Случай 2 полностью разобран. Доказано, что если между лепестками Q_1 и Q_i нет ребер, то ромашки F и F' являются малыми, причем имеют шесть общих вершин, что соответствует третьему варианту текущей теоремы.

Случай 3. *Между лепестками* Q_1 *и* Q_i *проведено ровно одно ребро, причем либо оба его конца лежат в* Q'_1, *либо оба — в* Q'_j.

Не умаляя общности, будем считать, что это ребро su. Далее удобно отдельно рассмотреть случаи, когда нет ни одного из ребер st и uv, когда есть ровно одно из них и когда есть оба.

Случай 3.1. $st, uv \notin \mathrm{E}(G)$. Заметим, что по лемме 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ каждый лепесток ромашки F содержит либо s, либо u. Пусть это часть $G_{i,1}$ (см. рис. 20). Ясно, что тогда во внутренности этой части не более двух вершин ромашки F, причем каждая из них является либо единственной вершиной из $\mathrm{V}(G_{i,1})$, смежной с t, либо – единственной вершиной из $\mathrm{V}(G_{i,1})$, смежной с v. Значит, по следствию 3 все вершины ромашки F, лежащие в части $G_{i,1}$, являются вершинами ромашки F'.

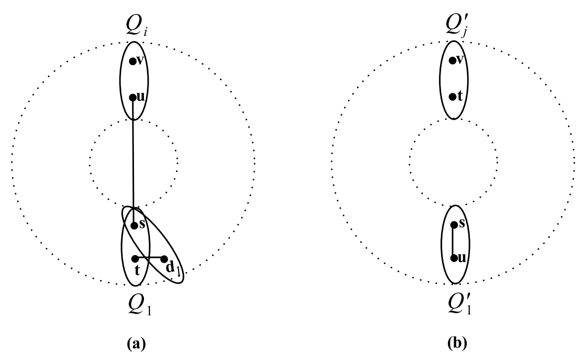


Рис. 20. Ромашки F и F', начало случая 3.1 части 2 теоремы 3.

Вывод 14. В части $G_{1,i}$ должна найтись вершина из $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$. Значит, в частности, в $G_{1,i}$ нет лепестков ромашки F', делящих эту часть на две непустые (см. вывод 8).

Докажем, что $v \notin Q'_x$. Пусть это не так, и $v \in Q'_x$. Тогда по лемме 19 вторая вершина лепестка Q'_x – это единственная вершина в $\mathrm{V}(G_{1,i})$, смежная с t. Значит, по следствию 3 она является вершиной ромашки F. Но по выбору лепестка Q'_x он не должен целиком содержаться в $\mathrm{V}(F)$. Таким образом, доказано, что $v \notin Q'_x$. Аналогично можно убедиться в том, что $t \notin Q'_x$.

Рассмотрим произвольный лепесток ромашки F в части $G_{i,1}$. Не умаляя общности, можно считать, что он состоит из вершин s и d_1. В таком случае степень t в части $G_{i,1}$ равна одному. Заметим, что тогда в части $G_{1,i}$ нет лепестка ромашки F, не пересекающегося с Q_1 и делящего эту часть на две, из которых пустой является именно часть, содержащая Q_1, так как иначе степень вершины t в графе G была бы меньше четырех. Если в части $G_{i,1}$ помимо $\{s, d_1\}$ есть еще один лепесток F, то он содержит u, и совершенно аналогично можно доказать, что тогда в $G_{1,i}$ нет лепестка F, не пересекающегося с Q_i и делящего эту часть на две, из которых пустой является именно часть, содержащая Q_i.

По лемме 2 обязательно найдется пара неблизких лепестков ромашки F, не содержащих s, и пара ее неблизких лепестков, не содержащих u.

Рассмотрим пару лепестков, не содержащих s. Докажем, что один из этих лепестков содержит t. Пусть это не так. Тогда ни один из них не пересекается с лепестком Q_1. А из этого по доказанному выше следует, что ни один из этих лепестков F не делит часть $G_{1,i}$ на две, из которых пустой является именно часть, содержащая Q_1. Но какой-то из них обязан иметь номер от 2 до $i-1$. Рассмотрим этот лепесток. Он делит $G_{1,i}$ на две части, из которых пустой является именно часть, содержащая Q_i. Ясно, что второй лепесток из нашей пары тогда не лежит в части $G_{1,i}$. Но все лепестки ромашки F в $G_{i,1}$ содержат либо s, либо u. Значит, он содержит u, откуда по доказанному ранее следует, что первый лепесток из нашей пары пересекается с Q_i. Но тогда лепестки из нашей пары являются близкими, так как оба пересекаются с лепестком Q_i. Противоречие.

Таким образом, из пары неблизких лепестков лепестков ромашки F, не содержащих s, один обязательно содержит t. Рассмотрим этот лепесток. Если он лежит в части $G_{i,1}$, то он обязан содержать одну из вершин u и s (см. начало случая 3.1), то есть пересекаться с обоими лепестками Q_1 и Q_i. Это невозможно, так как эти лепестки не являются близкими по условию теоремы. Значит, этот лепесток лежит именно в части $G_{1,i}$.

Теперь рассмотрим вторую пару лепестков, то есть два неблизких лепестка, не содержащих u. Докажем, что один из них имеет номер от 1 до $i-1$, причем из тех двух частей, на которые он делит часть $G_{1,i}$, пустой является именно та, что содержит Q_i. Если один из этих лепестков – это $\{s, d_1\}$ или Q_1, то другой лежит в части $G_{1,i}$ и не пересекается с Q_1. В таком случае из тех двух частей, на которые он делит часть $G_{1,i}$ пустой является именно та, что содержит Q_i. Если же среди лепестков нашей пары нет ни Q_1, ни $\{s, d_1\}$, то они оба имеют номера от 2 до $i-1$ и делят часть $G_{1,i}$ на две, одна из которых пуста. Тогда для одного из них пуста именно часть, содержащая Q_i.

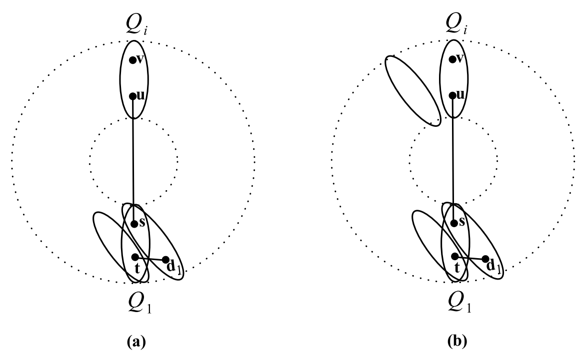


Рис. 21. Ромашка F, конец случая 3.1 части 2 теоремы 3.

Итак, доказано, что один из лепестков первой пары содержит t, а один из второй имеет номер от 1 до $i-1$ и делит часть $G_{1,i}$ на две, из которых пустой является именно часть, содержащая Q_i (см. рис. 21b). Поэтому по лемме 13 все вершины в части $G_{1,i}$, смежные с s или u, являются вершинами ромашки F. Если какая-то из вершин u и s содержится в лепестке Q'_x, то вторая его вершина по пункту 1 леммы 14 смежна с s или u соответственно и по только что доказанному утверждению обязана лежать в $\mathrm{V}(F)$.

Значит, вершины u, s тоже не содержатся в Q'_x, так как иначе в этом лепестке нет вершины не из $\mathrm{V}(F)$. Тогда $Q'_x \cap Q_{1,i} = \varnothing$. При этом одна из частей $G'_{1,x}$ и $G'_{x,j}$ пуста (см. вывод 14). Часть $G'_{x,j}$ не может быть пустой, так как иначе в части $G_{1,i}$ вершина t может быть смежна только с вершинами лепестка Q'_x, а в части $G_{i,1}$ ее степень, как мы знаем (см. рис. 21), равна 1. Значит, пуста часть $G'_{1,x}$. Тогда каждая из вершин лепестка Q'_x смежна с u или с s, из чего по доказанному следует, что $Q'_x \subset \mathrm{V}(F)$. Противоречие.

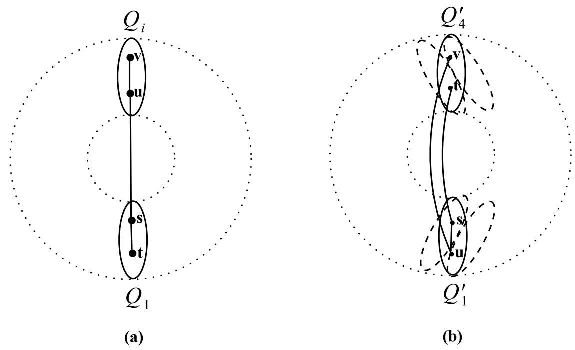


Рис. 22. Ромашки F и F', случай 3.2 части 2 теоремы 3.

Случай 3.2. $st, uv \in \mathrm{E}(G)$. Тогда по лемме 17 ромашка F' является малой и $j = 4$, причем в одной из частей $G_{1,i} = G'_{1,j}$ и $G_{i,1} = G'_{j,1}$ все лепестки F' пересекаются с $Q_1 = \{s, t\}$, а в другой – с $Q_i = \{u, v\}$. Пусть в части $G_{1,i}$ лежат те ее лепестки, что пересекаются с Q_1. Ясно, что либо $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1, i) = \{su\}$, а $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(i, 1) = \varnothing$, либо наоборот – $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1, i) = \varnothing$, а $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(i, 1) = \{su\}$. Не умаляя общности, будем считать, что $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1, i) = \{su\}$. Заметим, что тогда каждая вершина ромашки F', лежащая в $\mathrm{Int}(G_{1,i})$, является либо в подграфе $G_{1,i} - v - \mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1, i)$ единственной вершиной, смежной с u, либо в подграфе $G_{1,i} - u$ единственной вершиной, смежной с v (см. рис. 22b). Тогда по лемме 13 все вершины ромашки F', лежащие в части $G_{1,i}$, являются вершинами ромашки F. Но ранее уже было доказано (см. вывод 9), что в таком случае ни одно из внутренних разделяющих множеств ромашки F не разделяет $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Противоречие.

Случай 3.3. *Проведено ровно одно из ребер st и uv.* Не умаляя общности, будем считать, что $st \in \mathrm{E}(G)$. Заметим, что пункту 1 леммы 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки ромашки F содержат одну из вершин s и u, и кроме того, в одной из этих частей все лепестки ромашки F' содержат одну из вершин s и t. Удобно рассмотреть два случая в зависимости от того, одна и та же это часть или нет.

Случай 3.3.1. *В одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки F содержат одну из вершин s и u, а в другой все лепестки F' содержат*

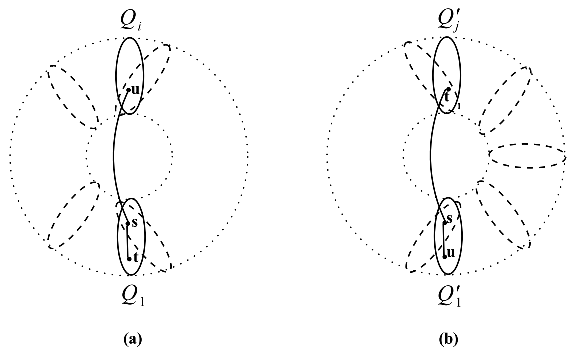


Рис. 23. Ромашки F и F', случай 3.3.1 части 2 теоремы 3.

одну из вершин s и t. Не умаляя общности, будем считать, что для F это часть $G_{i,1}$, а для F' – часть $G_{1,i}$ (см. рис. 23). Из этого следует, что $\mathrm{E}^F_{\mathrm{out}}(1,i) = \{su\}$, и точно так же, как в случае 3.2 по лемме 12 получаем, что все вершины ромашки F', лежащие в части $G_{1,i}$, являются вершинами ромашки F. А в таком случае ни одно из внутренних множеств ромашки F не разделяет $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см. вывод 9). Противоречие.

Случай 3.3.2. *В одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки ромашки F содержат одну из вершин s и u, а все лепестки F' содержат s или t.* Не умаляя общности, будем считать, что это часть $G_{i,1}$ (см. рис 24). Значит, в частности, лепесток Q'_y содержит s или t. Напомним, что Q'_y по определению обязан содержать вершину не из $\mathrm{V}(F)$.

Предположим, что $t \in Q'_y$. Тогда вторая вершина Q'_y – это по лемме 19 единственная вершина, смежная с v в $G'_{j,1} - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(j,1)$, обозначим ее через z. Но $\mathrm{E}(Q'_1, Q'_j) = \{st\}$, а $G'_{j,1} = G_{i,1}$. Значит, по лемме 12 получаем, что $z \in \mathrm{V}(F)$, то есть $Q'_y \subset \mathrm{V}(F)$. Противоречие.

Вывод 15. Лепесток Q'_y обязан содержать s. Тогда по лемме 19 вершина u смежна с обеими вершинами лепестка Q'_y, и ее степень в части $G_{i,1}$ равна двум. Поэтому u должна быть смежна по крайней мере с двумя в вершинами из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$.

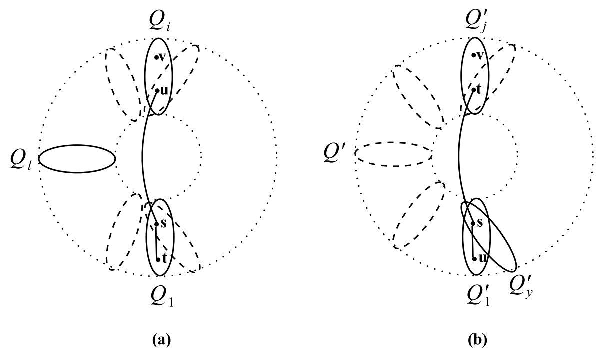


Рис. 24. Ромашки F и F', случай 3.3.2 части 2 теоремы 3.

Значит, в части $G_{1,i}$ нет лепестков ромашки F, содержащих v. А в части $G_{i,1}$ каждый лепесток F содержит s или u, и поэтому не содержит v.

Вывод 16. Ни один лепесток F, кроме Q_i, не содержит v.

Если в ромашке F нет лепестка, не пересекающегося с $Q_{1,i}$, то по лемме 15 ромашка F является малой и каждая вершина множества $Q_{1,i}$ лежит ровно в двух лепестках, что противоречит выводу 16. Значит, в ромашке F есть лепесток, не пересекающийся с $Q_{1,i}$. Пусть это лепесток Q_ℓ. Ясно, что ℓ от 1 до i. Одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ пуста, иначе в $G_{1,i}$ нет вершин из множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см. вывод 9).

Вывод 17. В ромашке F есть лепесток Q_ℓ, не пересекающийся с $Q_{1,i}$. Он лежит в части $G_{1,i}$. При этом одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ является пустой.

Докажем, что в ромашке F' нет лепестков, делящих часть $G_{1,i} = G'_{1,j}$ на две непустые. Пусть это не так и нашелся лепесток Q' с таким свойством. Тогда из доказанного ранее (см. вывод 8) следует, что в части $G_{1,i}$ нет вершин из $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$. Значит, в части $G_{i,1}$ должна найтись как минимум одна вершина из этого множества. Рассмотрим лепесток ромашки F, содержащий ее. Он содержит s или u. Если он содержит u, то вторая его вершина – это по лемме 19 единственная вершина, смежная с v в $G_{1,i}$. В таком случае она по следствию 3 лежит в $\mathrm{V}(F')$, а тогда наш лепесток целиком лежит в $\mathrm{V}(F')$, что невозможно.

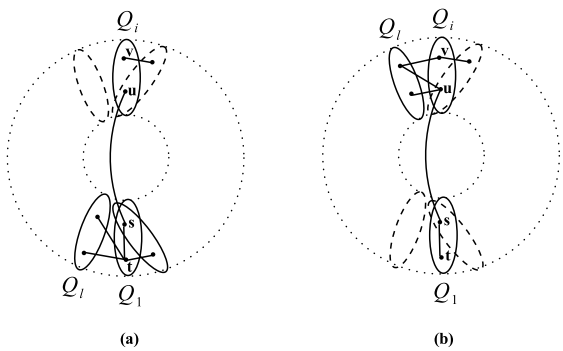


Рис. 25. Два варианта расположения лепестка Q_ℓ ромашки F, случай 3.3.2 части 2 теоремы 3.

Поэтому он содержит s, и в нем по пункту 2 леммы 19 лежит единственная вершина из $\mathrm{Int}(G_{i,1})$, смежная с t. Итак, обе вершины u (см. вывод 15) и t имеют степень 2 в $G_{i,1}$. Тогда каждая из них смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$ (см. рис. 25). Рассмотрим лепесток Q_ℓ. Он не пересекается с $Q_{1,i}$, и одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ является пустой (см. вывод 17).

Предположим, что пуста часть $G_{1,\ell}$. Тогда t смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ, а s – как минимум с одной из них. Значит, найдется вершина $w \in Q_\ell$, смежная и с s, и с t. Мы знаем, что $Q_\ell \cap Q_{1,i} = \varnothing$, поэтому $w \in \mathrm{Int} G_{1,i}$. В то же самое время, лепесток Q' ромашки F' по лемме 6 обязан разделять Q'_1 и Q'_j в $G'_{1,j} - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$, и при этом $s \in Q'_1$, а $t \in Q'_j$. Значит, $w \in Q'$. Итак, $Q_\ell \cap Q' \neq \varnothing$, причем Q' делит часть $G_{1,i} = G'_{1,j}$ на две непустые. Это противоречит выводу 2.

Случай, когда пуста часть $G_{\ell,i}$ разбирается совершенно аналогично, и мы приходим к следующему выводу.

Вывод 18. В ромашке F' нет лепестков, делящих часть $G_{1,i}$ на две непустые. В частности, лепесток Q'_x не может делить часть $G_{1,i}$ на две непустые.

Кроме того (см. вывод 17), в части $G_{1,i}$ есть лепесток Q ромашки F, не пересекающийся с $Q_{1,i}$ (см. рис. 25). Значит, по второй части следствия 3 лепесток Q'_x не может пересекаться с множеством $Q_{1,i}$ (иначе он будет целиком содержаться в $\mathrm{V}(F)$, что невозможно). При этом одна из частей $G'_{1,x}$ и $G'_{x,j}$ является пустой. Разберем два случая в зависимости от того, какая из этих частей пуста.

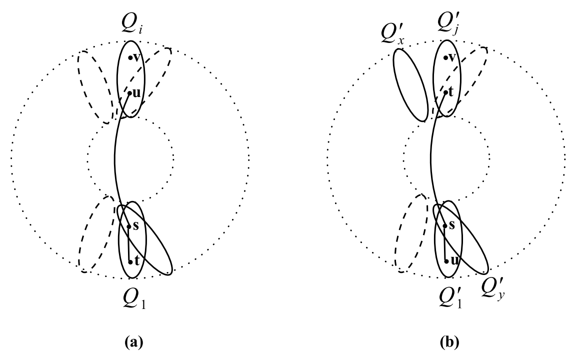


Рис. 26. Ромашки F и F', начало случая 3.3.2.1 части 2 теоремы 3.

Случай 3.3.2.1. *Часть* $G'_{x,j}$ *пуста.* Тогда v смежна не более, чем с двумя вершинами в части $G_{1,i}$ (это вершины лепестка Q'_x). Поэтому в части $G_{i,1}$ нет ни лепестков F, содержащих u, ни лепестков F', содержащих t (так как иначе v была бы смежна не более, чем с одной вершиной в $G_{i,1}$ по лемме 19). Значит, в этой части есть лепесток F, содержащий s (см. рис. 26). Следовательно, вершина t имеет степень 2 в $G_{i,1}$. Тогда t смежна смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x (см. рис. 27). Напомним, что Q_ℓ – это лепесток ромашки F в части $G_{1,i}$, не пересекающийся с $Q_{1,i}$, а Q'_x – это лепесток ромашки F', содержащий вершину a из множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Поэтому $Q'_x \not\subset Q_{1,\ell}$. В то же время, вершина $t \in Q_1$ смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x.

Поэтому часть $G_{1,\ell}$ не может быть пустой.

Но одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ обязана быть пустой (см. вывод 17). Тогда пуста именно часть $G_{\ell,i}$.

Вывод 19. Часть $G_{1,\ell}$ непуста.

Заметим, что u имеет степень 2 в $G_{i,1}$ (см. вывод 15), поэтому из того, что часть $G_{\ell,i}$ пуста, следует, что u смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ (см. рис. 28).

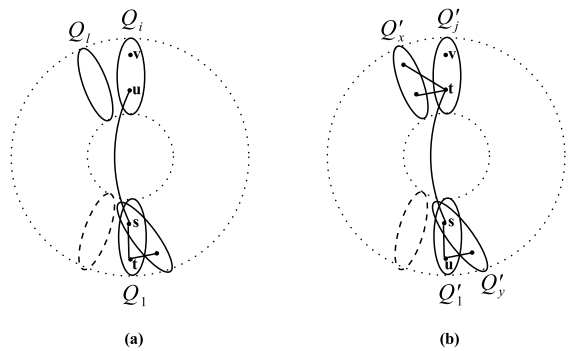


Рис. 27. Ромашки F и F', случай 3.3.2.1 части 2 теоремы 3. Вершина t смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x.

Вывод 20. Лепесток Q_ℓ совпадает с множеством вершин, смежных с u в $G_{1,i}$.

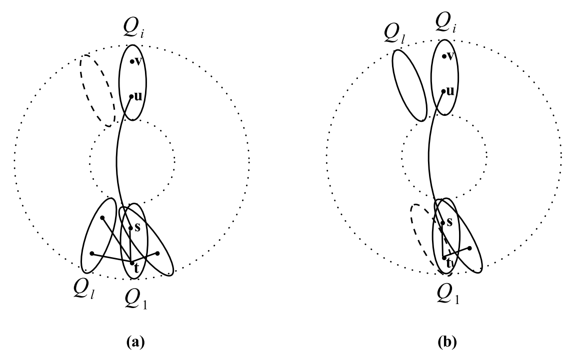


Рис. 28. Возможные способы расположения лепестка Q_ℓ, случай 3.3.2.1 части 2 теоремы 3.

Кроме того, вершина v не смежна ни с кем кроме вершин лепестка Q'_x в подграфе $G_{1,i}$, так как часть $G'_{x,j}$ пуста, причем как минимум с одной вершиной этого лепестка она смежна по лемме 7. Аналогичное утверждение верно для той же вершины v и лепестка Q_ℓ. Однако, совпадать лепестки Q'_x и Q_ℓ не могут, потому что в лепестке Q'_x есть вершина a из множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Тогда лепестки Q'_x и Q_ℓ имеют ровно одну общую вершину, причем v смежна в $G_{1,i}$ только с ней. Пусть это вершина d_1. По лемме 8 в ромашке F есть лепесток $\{u, d_1\}$, а в ромашке F' есть лепесток $\{t, d_1\}$ (см. рис. 29).

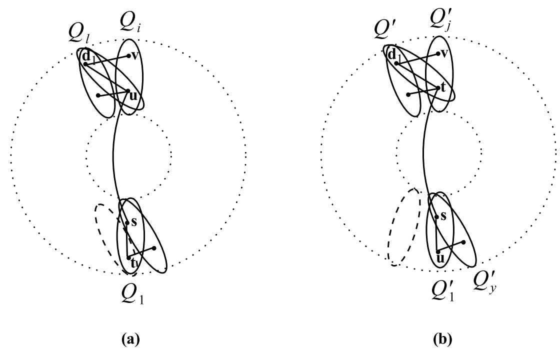


Рис. 29. Ромашки F и F', случай 3.3.2.1 части 2 теоремы 3. В ромашке F кроме Q_ℓ нет лепестков, не пересекающихся с $Q_{1,i}$.

Из вывода 20 следует, что в F кроме Q_ℓ нет лепестков, не пересекающихся с множеством $Q_{1,i}$. Теперь докажем, что в ромашке F' кроме Q'_x нет лепестков, не пересекающихся с $Q_{1,i}$.

Пусть это не так, и нашелся лепесток Q' с таким свойством. Ясно, что он лежит в части $G_{1,i}$, причем, как было доказано (см. вывод 18), одна из частей, на которые он делит $G_{1,i}$, пуста. Если пуста часть, содержащая Q'_j, то лепесток Q' совпадает с Q'_x, так как тогда вершины Q' — это две вершины части $G'_{1,j}$, смежные с t. Значит, пуста именно часть, содержащая Q'_1. Но мы доказали, что u смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ. Тогда лепесток Q' должен совпадать с Q_ℓ. Но часть $G_{1,\ell}$ непуста (см. вывод 19). Отсюда графы $G_{1,\ell} - Q_\ell - s$ и $G_{1,\ell} - Q_\ell - t$ состоят более, чем из одной вершины, причем по лемме 5 каждый из них связен. Значит, лепесток Q_ℓ не разделяет s и t в $G_{1,i} - st$. Противоречие.

Следовательно, все лепестки ромашки F', кроме Q'_x, пересекаются с множеством $Q_{1,i}$.

Таким образом, все лепестки ромашки F пересекаются с одним из двух лепестков Q_1 и $Q_{i-1} = \{u, d_1\}$, а все лепестки F' – с одним из

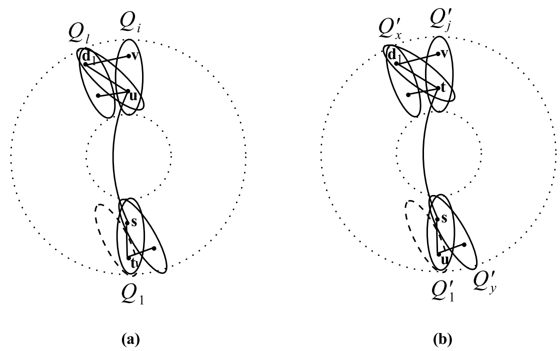


Рис. 30. Ромашки F и F', случай 3.3.2.1 части 2 теоремы 3. В ромашке F', кроме Q'_x, нет лепестков, не пересекающихся с $Q_{1,i}$.

двух лепестков Q'_1 и $Q'_{j-1} = \{t, d_1\}$. Тогда по лемме 15 ромашки F и F' являются малыми, в каждой из них по 6 лепестков, лепесток Q_2 содержит t, а лепесток Q'_2 содержит u. Заметим, что по лемме 19 вершина s смежна в $G_{1,i} - Q_{1,i}$ только со второй вершиной лепестка Q_2. С другой стороны, по той же лемме (но примененной уже к ромашке F') вершина s смежна в $G_{1,i} - Q'_{1,j}$ только со второй вершиной лепестка Q'_2. Но $G_{1,i} - Q_{1,i} = G'_{1,j} - Q'_{1,j}$. Поэтому вторые вершины лепестков Q_2 и Q'_2 совпадают. Пусть они оба содержат вершину d_2.

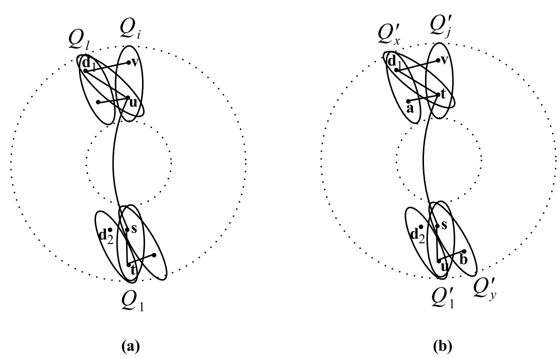


Рис. 31. Ромашки F и F', конец случая 3.3.2.1 части 2 теоремы 3.

Итак, все лепестки F пересекаются с одним из ее лепестков $\{s, t\}$ и $\{u, d_1\}$, а все лепестки F' – с одним из ее лепестков $\{s, u\}$ и $\{t, d_1\}$. При этом у ромашек F и F' кроме вершин s, t, u, d_1 есть еще две общие – вершины v и d_2 (см. рис. 31). Значит, ромашки F и F' – это малые ромашки, и у них ровно по две индивидуальные вершины (по крайней мере, две индивидуальные точно есть – это a и b). То есть выполнен третий вариант нашей теоремы.

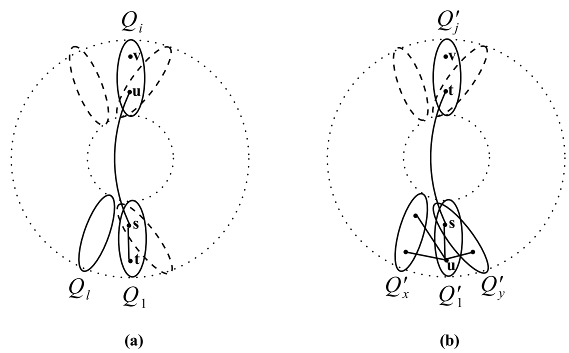


Рис. 32. Ромашки F и F', начало случая 3.3.2.2 части 2 теоремы 3.

Случай 3.3.2.2. *Часть* $G'_{1,x}$ *пуста.* Так как вершина u имеет степень 2 в $G_{i,1}$ (см. вывод 15), она обязана быть смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x (см. рис. 32). Часть $G_{\ell,i}$ не может быть пустой, так как u смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x, который не может совпадать с Q_ℓ, потому что по определению Q'_x содержит вершину $a \notin \mathrm{V}(F)$. Но одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ обязана быть пустой (см. вывод 17). Значит, пуста именно часть $G_{1,\ell}$. Тогда вершина s не смежна ни с кем из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$, кроме вершин лепестка Q'_x с одной стороны и кроме вершин лепестка Q_ℓ с другой. Совпадать лепестки Q_ℓ и Q'_x не могут, как уже было неоднократно доказано. Следовательно, эти лепестки пересекаются, и их общая вершина является единственной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$, смежной с s. Пусть это вершина d_1 (см. рис. 33).

Из доказанного следует, что, кроме Q_ℓ, у F нет лепестков, не пересекающихся с множеством $Q_{1,i}$. Кроме того, было доказано, что ни один лепесток ромашки F не содержит v (см. вывод 16). Пусть в части $G_{i,1}$ нет лепестка ромашки F, содержащего s. В таком случае все лепестки этой ромашки делятся на те, что лежат в $Q_{1,\ell}$, и на те,

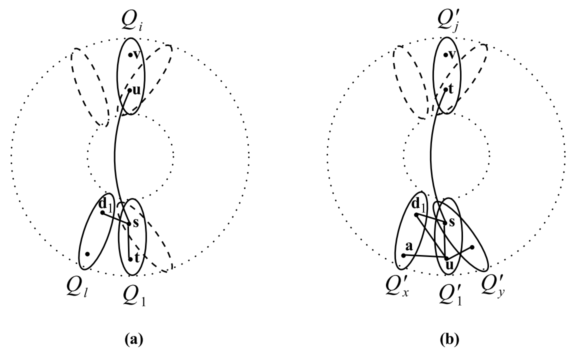


Рис. 33. Ромашки F и F', случай 3.3.2.2 части 2 теоремы 3.

что содержат u. Тогда все внутренние множества ромашки F будут содержать u, что невозможно по лемме 2. Значит, в части $G_{i,1}$ есть лепесток ромашки F, содержащий s. В таком случае вершина t имеет степень 2 в $G_{i,1}$ (смежна с обеими вершинами этого лепестка). Но при этом часть $G_{1,\ell}$ пуста и состоит из четырех вершин. Следовательно, вершина t смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ. Так как s смежна в $\mathrm{Int}(G_{1,i})$ только с d_1, из леммы 8 следует, что множество $\{t, d_1\}$ является лепестком ромашки F. Аналогично, в F' есть лепесток $\{u, d_1\}$ (см. рис. 34). Предположим, что в F', кроме Q'_x, есть еще один лепесток Q', не пересекающийся с $Q_{1,i}$. Одна из частей, на которые он делит часть $G_{1,i}$ пуста (см. вывод 18). Если это часть, содержащая Q'_1, то Q' совпадает с Q'_x. Значит, это часть, содержащая Q'_j. Тогда Q' отделяет вершины t и v от остальных вершин части $G_{1,i}$. Значит, он обязан содержать все вершины внутренности этой части, смежные с t. То есть этот лепесток должен содержать Q_ℓ. Следовательно, $Q' = Q_\ell$. Но часть $G_{\ell,i}$ непуста, так как вершина $a \in Q'_x$ содержится в этой части и по определению не лежит в $\mathrm{V}(F)$. Отсюда по лемме 5 графы $G_{\ell,i} - Q_\ell - u$ и $G_{\ell,i} - Q_\ell - v$ связны. Значит, лепесток Q_ℓ не разделяет u и v в $G_{1,i} - \mathrm{E}(Q'_1, Q'_j)$, что невозможно по лемме 6.

Итак, в F', кроме Q'_x, нет лепестков, не пересекающихся с множеством $Q_{1,i}$. Теперь докажем, что в F' не может быть лепестка, содержащего v и отличного от Q'_j. Такой лепесток может лежать только в части $G_{1,i}$, но тогда вершина t смежна только с одной вершиной

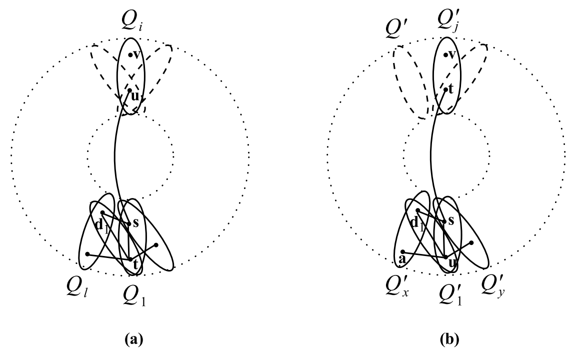


Рис. 34. Ромашки F и F', случай 3.3.2.2 части 2 теоремы 3. Множество $\{t, d_1\}$ является лепестком F, а $\{u, d_1\}$ — лепестком F'.

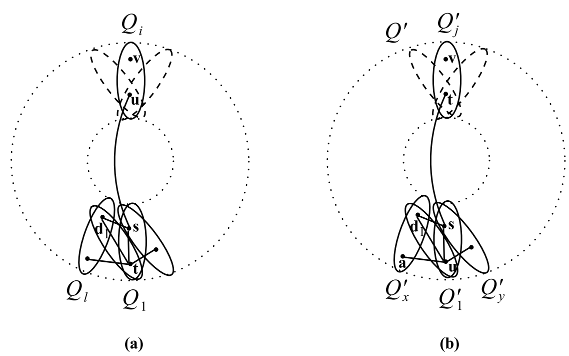


Рис. 35. Ромашки F и F', случай 3.3.2.2 части 2 теоремы 3. Все лепестки F' кроме Q'_x пересекаются с $Q_{1,i}$.

из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$ – второй вершиной этого лепестка. Однако, вершина t смежна с двумя вершинами из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$: это вершины лепестка Q_ℓ.

Таким образом, почти все лепестки ромашек F и F' определены. Неясно пока только, есть ли в F лепесток, отличный от Q_i и содержащий u, и есть ли в F' лепесток, отличный от Q'_j и содержащий t, и если они есть, то в каких частях эти лепестки лежат.

Докажем, что либо они оба есть, либо обоих нет, и если эти лепестки есть, то они пересекаются и либо они оба лежат в $G_{1,i}$, либо

– в $G_{i,1}$. Действительно, если какой-то из описанных лепестков есть, то по лемме 19 вторая его вершина является единственной, смежной с v в соответствующей части. А тогда по лемме 12 эта вершина содержится в множестве вершин обеих ромашек, то есть является второй вершиной обоих описанных лепестков.

Значит, либо обе ромашки F и F' – это ромашки $W1$-типа (если дополнительных лепестков нет), либо обе – $W2$-типа (если эти лепестки есть), и в любом случае у них ровно по две индивидуальные вершины (вершины a и b лежат в $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$). То есть выполнен либо четвёртый, либо пятый вариант нашей теоремы.

Итак, случай 3 полностью разобран. Переходим к случаю 4.

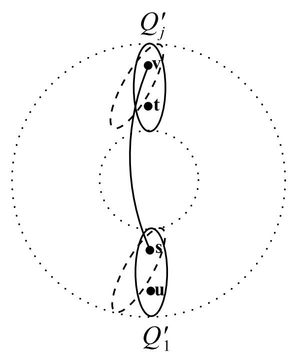


Рис. 36. Ромашки F и F', случай 4 части 2 теоремы 3.

Случай 4. *Между лепестками Q_1 и Q_i проведено ровно одно ребро, причем один из его концов содержится в Q'_1, а другой – в Q'_j.*

Не умаляя общности, будем считать, что проведено ребро sv. Тогда в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки ромашки F' содержат s или v. Пусть это $G_{1,i}$ (см. рис. 36). Рассмотрим все вершины ромашки F', содержащиеся в $\mathrm{Int}(G_{1,i})$. Заметим, что каждая из них по лемме 19 является либо единственной вершиной во всей части $G_{1,i}$, смежной с t, либо – единственной, смежной с u. Тогда по следствию 3 все эти вершины являются вершинами ромашки F, что невозможно (см. вывод 9). Противоречие.

Случай 5. *Между лепестками Q_1 и Q_i проведено два ребра, причем они имеют общий конец.*

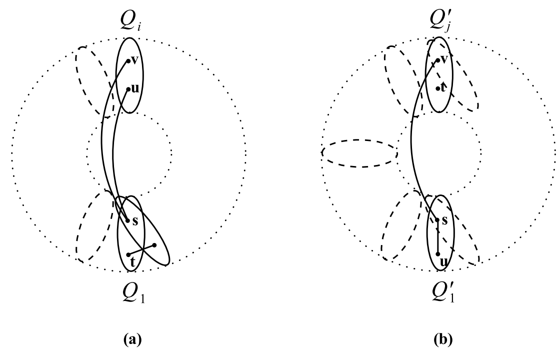


Рис. 37. Ромашки F и F', случай 5 части 2 теоремы 3.

Не умаляя общности, будем считать, что это ребра su и sv (см. рис. 37). В одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ по лемме 17 лежит ровно один лепесток ромашки F, причем он содержит s. Пусть в части $G_{i,1}$. Значит, степень вершины t в $G_{i,1}$ не больше двух.

Ясно, что в части $G_{1,i}$ должен найтись лепесток ромашки F, не пересекающийся с $Q_{1,i}$ (иначе F – малая ромашка, а ее структура противоречит лемме 15). Значит, по второй части следствия 3 все вершины лепестков ромашки F', лежащих в части $G_{1,i}$ и пересекающихся с $Q_{1,i}$, содержатся в $\mathrm{V}(F)$. Но в части $G_{1,i}$ должны быть вершины из $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см. вывод 9). Значит, в части $G_{1,i}$ есть лепестки ромашки F', не пересекающиеся с $Q_{1,i}$. Но так как есть ребро sv между лепестками Q'_1 и Q'_j, по лемме 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки F' содержат одну из вершин s и v. Значит, именно в части $G_{i,1}$. Кроме того, если в $G_{i,1}$ есть лепесток F', содержащий v, то он лежит в $\mathrm{V}(F)$ по следствию 3. При этом в части $G_{i,1}$ обязаны найтись вершины из $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см. вывод 9). Поэтому в $G_{i,1}$ точно есть лепесток F', содержащий s (см. рис. 38).

Вывод 21. В части $G_{i,1}$ степень вершины u равна двум (так как есть лепесток ромашки F', содержащий s), а степень вершины t – не больше двух (так как есть лепесток ромашки F, содержащий s).

Заметим, что $uv \notin \mathrm{E}(G)$, так как иначе по второй части леммы 17 в части $G_{i,1}$ должен быть ровно один лепесток ромашки F', причем он содержит u.

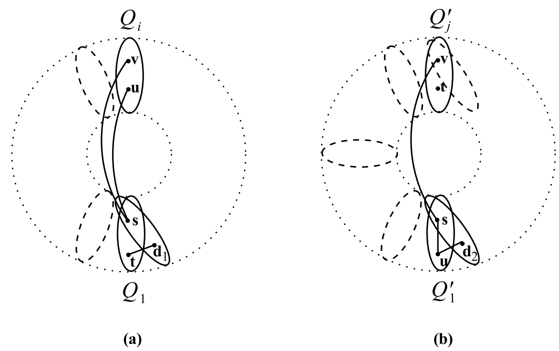


Рис. 38. Ромашки F и F', случай 5 части 2 теоремы 3. В F' в части $G_{i,1}$ есть лепесток, содержащий s.

Пусть лепестки ромашек F и F', содержащие s – это $\{s, d_1\}$ и $\{s, d_2\}$ соответственно.

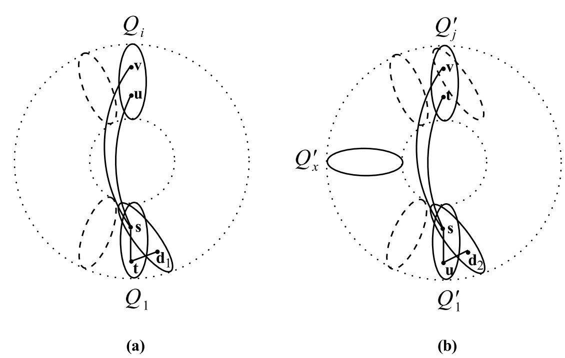


Рис. 39. Ромашки F и F', случай 5 части 2 теоремы 3. Если Q'_x делит часть $G_{1,i}$ на две непустые, то $st \in$ E(G). Это приводит к противоречию.

Напомним, что Q'_x – это лепесток ромашки F', содержащий вершину $a \notin$ V(F). Предположим, что Q'_x делит часть $G_{1,i}$ на две непустые. Тогда в $G_{1,i}$ нет вершин из множества V$(F) \setminus$ V(F') (см. вывод 8). Следовательно, в $G_{i,1}$ есть вершины из этого множества. Но в Int$(G_{i,1})$ есть лишь одна вершина ромашки F – это d_1. Тогда $d_1 \notin$ V(F'). Если ребра st нет, то по лемме 12 получается, что $d_1 \in \mathrm{V}(F')$, что невозможно. Значит $st \in \mathrm{E}(G)$ (см. рис. 39).

Рассмотрим лепесток Q_ℓ ромашки F, не пересекающийся с $Q_{1,i}$. Ясно, что он лежит в части $G_{1,i}$, причем одна из частей, на которые он ее делит, пуста (см. вывод 9). Кроме того, $Q'_x \cap Q_\ell = \varnothing$ (см. вывод 2, в качестве Q' надо взять Q_ℓ, а в качестве Q_ℓ – лепесток Q'_x). Предположим, что пуста именно часть $G_{1,\ell}$. Тогда по лемме 7 одна из вершин лепестка Q_ℓ смежна с s, а другая – с t. Если какая-то из вершин s и t смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ, то лепесток Q'_x не разделяет s и t в $G'_{1,j} - \mathrm{E}^{F'}_{\mathrm{out}}(1,j)$, что невозможно по лемме 6.

Таким оборазом, если пуста часть $G_{1,\ell}$, то каждая из вершин s и t смежна лишь с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$. Аналогично, если пуста часть $G_{\ell,i}$, то каждая из вершин u и v смежна лишь с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$. Но при этом одна из этих частей пуста, как мы доказали, а у вершин t и u степень в $G_{i,1}$ не больше двух (см. вывод 21). Значит, у какой-то них степень в графе G меньше четырех. Противоречие.

Тогда одна из частей $G'_{x,j}$ и $G'_{1,x}$ пуста. Случай 5.1, когда пуста часть $G'_{x,j}$, разбирается точно так же, как случай 3.3.2.1, – далее приведен план разбора случая 5.1 с пояснениями некоторых моментов. Кроме того, ниже представлен полный разбор случая 5.2, когда пуста часть $G'_{1,x}$. Стоит отметить, что он во многом повторяет разбор случая 3.3.2.2.

Случай 5.1. *Часть* $G'_{x,j}$ *пуста.* Вершина v смежна не более, чем с двумя вершинами в части $G_{1,i}$ (это вершины лепестка Q'_x), а вершина t имеет степень не больше двух в $G_{i,1}$ (см. вывод 21). Тогда t смежна смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x и с вершиной s. Рассмотрим лепесток Q_ℓ ромашки F в части $G_{1,i}$, не пересекающийся с $Q_{1,i}$ (см. рис. 40). Для него справедлив вывод 19 – часть $G_{1,\ell}$ непуста. Но одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ пуста, иначе в $G_{1,i}$ нет вершин из множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см. вывод 9). Тогда пуста именно часть $G_{\ell,i}$.

Вершина u имеет степень 2 в $G_{i,1}$ (см. вывод 21), поэтому u смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ. Отсюда, в F кроме Q_ℓ нет лепестков, не пересекающихся с множеством $Q_{1,i}$.

Вершина v не смежна ни с кем кроме вершин лепестка Q'_x в подграфе $G_{1,i}$. Аналогичное утверждение верно для той же вершины v и лепестка Q_ℓ, не совпадающего с Q'_x. Тогда лепестки Q'_x и Q_ℓ имеют ровно одну общую вершину, причем v смежна в $G_{1,i}$ только с ней.

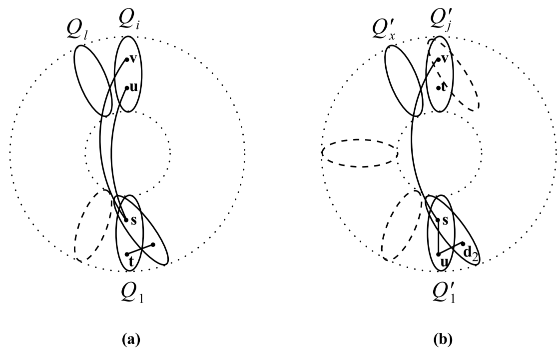


Рис. 40. Ромашки F и F', случай 5.1 части 2 теоремы 3.

Пусть это вершина d_1. По лемме 8 в ромашке F есть лепесток $\{u, d_1\}$, а в ромашке F' есть лепесток $\{t, d_1\}$.

В ромашке F', кроме Q'_x, нет лепестков, не пересекающихся с $Q_{1,i}$.

Таким образом, все лепестки ромашки F пересекаются с одним из двух лепестков Q_1 и $Q_{i-1} = \{u, d_1\}$, а все лепестки F' – с одним из двух лепестков Q'_1 и $Q'_{j-1} = \{t, d_1\}$. Тогда по лемме 15 ромашки F и F' являются малыми, в каждой из них по 6 лепестков, лепесток Q_2 содержит t, а лепесток Q'_2 содержит u.

Вторые вершины лепестков Q_2 и Q'_2 совпадают, пусть они оба содержат вершину d_2.

Итак, все лепестки F пересекаются с одним из ее лепестков $\{s, t\}$ и $\{u, d_1\}$, а все лепестки F' – с одним из ее лепестков $\{s, u\}$ и $\{t, d_1\}$. При этом у ромашек F и F' кроме вершин s, t, u, d_1 есть еще две общие – вершины v и d_2. Значит, ромашки F и F' – это малые ромашки, и у них ровно по две индивидуальные вершины. То есть выполнен третий вариант нашей теоремы.

Случай 5.2. *Часть* $G'_{1,x}$ *пуста.* Так как вершина u имеет степень 2 в $G_{i,1}$ (см. вывод 21), она обязана быть смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x. Рассмотрим лепесток Q_ℓ ромашки F в части $G_{1,i}$, не пересекающийся с $Q_{1,i}$ (см. рис. 41).

Часть $G_{\ell,i}$ не может быть пустой, так как u смежна с обеими вершинами лепестка Q'_x, который не может совпадать с Q_ℓ, потому что по определению Q'_x содержит вершину $a \notin \mathrm{V}(F)$. Но одна из частей $G_{1,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ пуста, иначе в $G_{1,i}$ нет вершин из множества $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см.

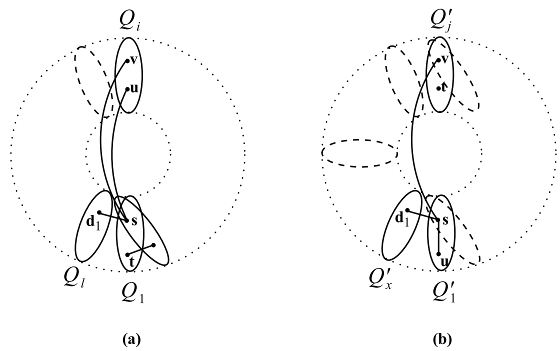


Рис. 41. Ромашки F и F', случай 5.2 части 2 теоремы 3.

вывод 9). Тогда пуста именно часть $G_{1,\ell}$, и вершина t смежна не более, чем с двумя вершинами множества $\mathrm{Int}(G_{1,i})$.

Вершина s не смежна ни с кем из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$, кроме вершин лепестка Q'_x с одной стороны и кроме вершин лепестка Q_ℓ с другой. Совпадать лепестки Q_ℓ и Q'_x не могут, как уже было неоднократно доказано. Следовательно, эти лепестки пересекаются, и их общая вершина является единственной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$, смежной с s. Пусть это вершина d_1.

Из доказанного следует, что, кроме Q_ℓ, у F нет лепестков, не пересекающихся с множеством $Q_{1,i}$.

Ни один лепесток ромашки F, кроме Q_i не содержит v, потому что в части $G_{i,1}$ лежит всего один лепесток ромашки F и он содержит s, а в части $G_{1,i}$ вершина u смежна с двумя вершинами лепестка Q_ℓ.

Вершина t имеет степень не больше двух в $G_{i,1}$ (см. вывод 21). Но при этом часть $G_{1,\ell}$ пуста и состоит из четырех вершин. Следовательно, вершина t смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ. Так как s смежна в $\mathrm{Int}(G_{1,i})$ только с d_1, из леммы 8 следует, что множество $\{t, d_1\}$ является лепестком ромашки F. Аналогично, в F' есть лепесток $\{u, d_1\}$.

Предположим, что в F', кроме Q'_x, есть еще один лепесток Q', не пересекающийся с $Q_{1,i}$. Одна из частей, на которые он делит часть $G_{1,i}$, пуста (см. вывод 18). Если это часть, содержащая Q'_1, то Q' совпадает с Q'_x. Значит, это часть, содержащая Q'_j. Тогда Q' отделяет вершины t и v от остальных вершин части $G_{1,i}$. Значит, он обязан содержать все вершины внутренности этой части, смежные с t. То есть этот лепесток должен содержать Q_ℓ. Следовательно, $Q' = Q_\ell$. Но часть $G_{\ell,i}$ непуста, так как вершина $a \in Q'_x$ содержится в этой части и по определению не лежит в $\mathrm{V}(F)$. Отсюда по лемме 5 графы $G_{\ell,i} - Q_\ell - u$ и $G_{\ell,i} - Q_\ell - v$ связны. Значит, лепесток Q_ℓ не разделяет u и v в $G_{1,i} - \mathrm{E}(Q'_1, Q'_j)$, что невозможно по лемме 6.

Итак, в F', кроме Q'_x, нет лепестков, не пересекающихся с множеством $Q_{1,i}$.

Теперь докажем, что в F' не может быть лепестка, содержащего v и отличного от Q'_j. В части $G'_{j,1}$ таких лепестков нет, потому что все лепестки в этой части содержат одну из вершин s и t по лемме 17. А в части $G'_{1,j}$ вершина t смежна с обеими вершинами лепестка Q_ℓ.

Таким образом, почти все лепестки ромашек F и F' определены. Неясно пока только, есть ли в F лепесток, отличный от Q_i и содержащий u, и есть ли в F' лепесток, отличный от Q'_j и содержащий t, и если они есть, то в каких частях эти лепестки лежат.

Докажем, что либо они оба есть, либо обоих нет, и если эти лепестки есть, то они пересекаются и либо они оба лежат в $G_{1,i}$, либо оба – в $G_{i,1}$. Действительно, если какой-то из описанных лепестков есть, то по лемме 19 вторая его вершина является единственной, смежной с v в соответствующей части. А тогда по лемме 12 эта вершина содержится в множестве вершин обеих ромашек, то есть является второй вершиной обоих описанных лепестков.

Значит, либо обе ромашки F и F' – это ромашки $W1$-типа (если дополнительных лепестков нет), либо обе – $W2$-типа (если эти лепестки есть), и в любом случае у них ровно по две индивидуальные вершины (вершины a и b лежат в $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$). То есть выполнен либо четвёртый, либо пятый вариант нашей теоремы.

Случай 6. *Проведены ребра* su *и* tv.

В этом случае по лемме 17 ромашка F является малой. Заметим, что если нет ни одного из ребер st и uv, то все вершины ромашки F являются вершинами ромашки F' по лемме 12, что невозможно. А если есть оба этих ребра, то по той же лемме 17 ромашка F' тоже являются малой. Более того, тогда у ромашек F и F' есть 6 общих вершин, в чем несложно убедиться (для каждого лепестка ромашек F и F', содержащего ровно одну из вершин множества $\{s, t, u, v\}$ найдется такая вершина из этого множества, для которой вторая вершина лепестка будет единственной вершиной смежной с ней во внутренности одной из частей $G_{1,i} = G'_{1,j}$ и $G_{i,1} = G'_{j,1}$).

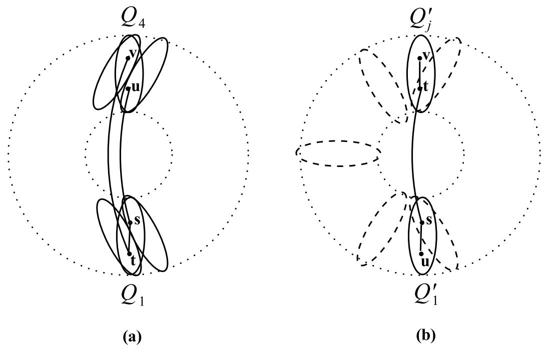


Рис. 42. Ромашки F и F', случай 6 части 2 теоремы 3.

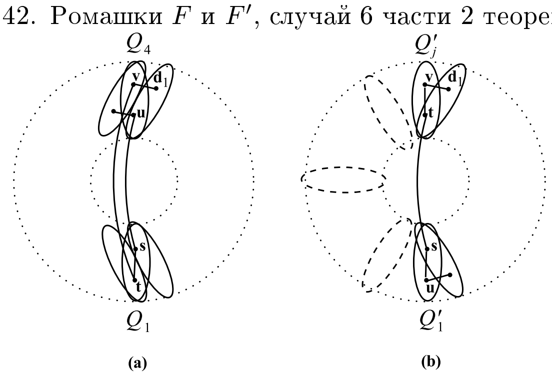


Рис. 43. Ромашки F и F', случай 6 части 2 теоремы 3.

Поэтому будем считать, что проведено ровно из ребер st и uv. Пусть это ребро st (см. рис. 42). Тогда по лемме 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ все лепестки ромашки F' содержат s или t. Пусть это часть $G_{i,1}$. Заметим, что по той же лемме 17 в этой части находятся либо лепестки F, содержащие s или u, либо лепестки F, содержащие v или t. Будем считать, что в $G_{i,1}$ лежат лепестки F, содержащие u или s. Пусть вторая вершина лепестка ромашки F, содержащего u – это вершина d_1. Тогда d_1 – это единственная вершина, смежная с v в

$G'_{j,1} - t$, и по следствию 3 получаем, что $\{t, d_1\}$ – это лепесток ромашки F' (см. рис. 43). В части $G_{i,1}$ должны быть вершины из $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (см. вывод 9), поэтому в F' есть лепесток, содержащий s и лежащий в $G_{i,1}$. Значит, степень u в $G_{i,1}$ равна двум. Но при этом в части $G_{1,i}$ есть лепесток ромашки F, содержащий v. То есть u смежна лишь с одной вершиной из $\mathrm{Int}(G_{1,i})$. Поэтому степень u в графе G меньше четырех. Противоречие.

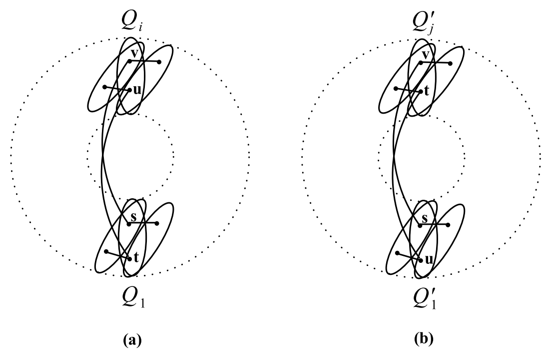


Рис. 44. Ромашки F и F', случай 7 части 2 теоремы 3.

Случай 7. *Проведены ребра sv и tu.*

Тогда по лемме 17 ромашки F и F' малые и других ребер между вершинами s, t, u и v нет. По лемме 17 в одной из частей $G_{1,i}$ и $G_{i,1}$ каждый лепесток ромашки F содержит либо s, либо v (см. рис. 44). Не умаляя общности, будем считать, что это часть $G_{1,i}$. В таком случае вершины t и u имеют степень 2 в $G_{1,i}$ по лемме 19. Значит, поскольку все вершины графа G имеют степень по крайней мере 4, каждая из вершин t и u смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\mathrm{Int}(G_{i,1})$. Поэтому в части $G_{i,1}$ нет лепестков F', содержащих s или v – иначе будет противоречие с леммой 19. Но по лемме 17 эти лепестки в ромашке F' должны найтись. Значит, они обязаны лежать в части $G_{1,i}$. Ясно, что тогда множества вершин ромашек F и F', содержащихся в части $G_{1,i}$, совпадают, что протворечит выводу 9 (см. рис. 44). $\square$

Литература

1. Ф. Харари, *Теория графов*. УМирФ, М. (1973). (Перевод с английского. F.Harary, Graph theory, 1969.)

2. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press (1966).
3. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* ПОМИ препринт 19/2008, 2008.
4. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
5. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
6. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
7. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
8. А. Л. Глазман, *Обобщенные ромашки в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 45–78.

Glazman A. L. Generalized flowers in k-connected graph. Part 2.

We continue the work started in [8] and research k-cutsets in k-connected graphs. Several new statements concerning the structure of generalized flowers in k-connected graphs are proved here. Generalized flowers in the case $k = 4$ are considered after. For $k = 4$ we give the description of maximal generalized flowers with an empty center which have a common cutset.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191023 Россия, С-Петербург, наб. р. Фонтанки 27

Поступило 5 ноября 2013 г.

Section de Mathématiques,
Université de Genève. 2-4 rue du Lièvre,
Case postale 64, 1211 Genève, Suisse

E-mail: Alexander.Glazman@unige.ch