

С. Л. Берлов

## АНТИКЛИКИ И ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА В КРУГОВЫХ ГРАФАХ

Если  $G = (V, E)$  – граф, то будем обозначать через:

$V(G)$  – множество вершин  $G$ , а  $E(G)$  – множество ребер;

$d_G(x)$  (*степень* вершины графа) – количество ребер, содержащих вершину  $x \in V$ ;

$\Delta(G)$  – максимальная из степеней вершин;

$\delta(G)$  – минимальная из степеней вершин;

$\chi(G)$  – *хроматическое число*  $G$ , то есть минимальное возможное число цветов по всем правильным раскраскам  $G$ .

$\omega(G)$  – *кликовое число* графа  $G$ , то есть размер максимальной клики как индуцированного подграфа  $G$ .

$\overline{G}$  – *дополнительный* граф к графу  $G = (V, E)$  то есть граф, получаемый из  $G$  заменой всех рёбер на антирёбра и наоборот.

### §1. ВВЕДЕНИЕ

*Круговым графом* называется граф пересечений конечного множества хорд в круге. Вершинами такого графа будут хорды, соединяющие некоторые пары данных точек на окружности, а смежными будут пары вершин, соответствующие хорды которых имеют общую внутреннюю точку. Будем обозначать множество таких графов через  $CIR$ . Свойства круговых графов изучаются с середины прошлого века. Проверка, является ли данный граф круговым, представляет собой  $NP$ -трудную задачу, и математики концентрировались на установлении различных свойств круговых графов. В статье [1] приведены алгоритмы нахождения максимальных клик и антиклик (то есть, независимых множеств) в этих графах, а статья [2] даёт характеристику круговых графов в терминах графов пересечений коциклических путей.

---

*Ключевые слова:* граф, хроматическое число, антиклика, круговой граф.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00096) и при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор No. 11.G34.31.0053.

Введём обозначение:  $f(k) = \max(\chi(G) \mid G \in CIR; \omega(G) \leq k)$ . Вопрос о наиболее точных значениях  $f(k)$  рассматривался в ряде работ. Для произвольного  $k$  наилучшая верхняя оценка была получена в [3]. Там было доказано, что  $f(k) \leq 2^{k+6}$ . Для маленьких значений  $k$  известны более точные оценки:  $f(2) = 5$  (статьи [4] и [5]) и  $f(3) \leq 30$  (статья [6]).

Рассмотрим несколько иной подход к круговым графам. Обозначим через  $CIR(n)$  полный круговой граф на  $n$  точках. Т. е. граф пересечений всех хорд, соединяющих данные  $n$  точек на окружности. В этом графе  $\frac{n(n-1)}{2}$  вершин и  $C_n^4$  рёбер. Пусть все вершины этого графа разбиты на  $t$  множеств, причём никакие две хорды, имеющие общий конец, не принадлежат одному множеству. Понятно, что тогда  $t \geq n$ . Возникает вопрос: верно ли, что в одном из множеств найдётся достаточно большая антиклика? Если зафиксировать отношение  $\frac{m}{n} = k$ , то этот вопрос весьма нетривиален. Ответ на него содержится в следующей лемме:

**Лемма 1.** *Пусть все вершины графа  $CIR(n)$  разбиты на  $t$  множеств, причём никакие две хорды, имеющие общий конец, не принадлежат одному множеству. Тогда в одном из множеств найдётся антиклика мощности не менее  $\lceil \frac{n}{t} \ln \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rceil$ .*

Это означает, что при достаточно больших значениях  $n$  и фиксированном  $k$  найдётся достаточно большая антиклика.

В качестве очевидного следствия вытекает такая теорема:

**Теорема 1.** *Дано число  $k \geq 1$ . Рассмотрим граф, дополнительный к  $CIR(n)$ . Пусть его вершины разбиты на  $kn$  множеств, причём никакие две хорды, имеющие общий конец, не принадлежат одному из множеств. Тогда хроматическое число подграфа, порождённого одним из множеств будет не меньше  $\lceil \frac{1}{k} \ln \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rceil$ .*

Также получается такое следствие:

**Следствие 1.** *Если  $n > 2e^{2t-2} + 3$  при некотором натуральном числе  $t$ , то при расстановке в  $n$  точках на окружности чисел от 1 до  $n$  в произвольном порядке всегда можно выбрать  $t$  попарно непересекающихся хорд, суммы чисел на концах которых равны.*

Если отказаться от условия на то, что хорды, принадлежащие одному множеству не могут иметь общего конца, то получается такой результат:

**Теорема 2.** Дано положительное число  $k$ . Рассмотрим граф  $CIR(n)$ . Пусть его вершины разбиты на  $kn$  множеств. Тогда подграф, порождённый одним из множеств, будет содержать антиклику не менее, чем на  $\sqrt{\frac{\ln(n/2)}{k}}$  вершинах.

И следствие:

**Следствие 2.** Дано натуральное число  $k$ . Если  $n > 2e^{2kt^2}$  для некоторого натурального числа  $t$ , то при расстановке в  $n$  точек на окружности натуральных чисел, не превосходящих  $kn$ , всегда можно выбрать более  $t$  попарно непересекающихся хорд, суммы чисел на концах которых равны.

## §2. МАКСИМАЛЬНАЯ АНТИКЛИКА

Сначала докажем важную лемму:

**Лемма 2.** Пусть в графе  $G$  ровно  $a_i$  вершин степени  $i$ . Тогда в нем существует антиклика мощности  $a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \dots$ .

Эта лемма достаточно известна, например, в несколько иной формулировке встречалась в [7, Лемма 25.1]. Здесь для полноты мы приведём доказательство этого факта.

**Доказательство.** Докажем утверждение индукцией по количеству вершин. Обозначим сумму  $a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \dots$  через  $S(G)$ . Достаточно доказать, что  $S(G) \leq \omega(\overline{G})$ .

База: если граф полный и содержит  $n$  вершин, то  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 0, a_{n-1} = n$  и  $S(G) = 1$ .

Переход: Пусть граф не является полным. Удалим вершину  $A$  наименьшей степени  $\delta(G)$ . Также удалим все вершины, смежные с  $A$ . Поскольку граф  $G$  не являлся полным, после этой операции останется граф  $G_1$ , не являющийся пустым. Для него верно предположение индукции. Заметим, что  $\omega(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}_1) + 1$ , поскольку к максимальной антиклике  $G_1$  можно добавить вершину  $A$ .

Поскольку из графа  $G$  было удалено  $\delta(G) + 1$  вершин, степени которых были не меньше  $\delta(G)$ , то вклад удалённых вершин в  $S(G)$  был не больше 1. Поскольку степени остальных вершин не увеличились, то их вклад в эту сумму не уменьшился. Таким образом,  $S(G)$  уменьшилась не более, чем на 1. Но после этого она стала не больше, чем  $\omega(\overline{G}_1) \leq \omega(\overline{G}) - 1$ . Следовательно, изначально  $S(G) \leq \omega(\overline{G})$ .  $\square$

Докажем теперь лемму 1.

**Доказательство.** Предположим противное. *Длиной* хорды  $A$  назовем количество точек, находящихся с той стороны от хорды, где их меньше. Будем обозначать эту длину через  $\ell(A)$ . Заметим, что эту хорду может пересекать не более  $\ell(A)$  других хорд из множества, в которое попала хорда  $A$ , поскольку любая пересекающая её хорда этого множества имеет концы в разных полуплоскостях относительно  $A$ . Следовательно, степень вершины  $A$  в том множестве, в которое попала хорда  $A$ , не превосходит  $\ell(A)$ . Обозначим число  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  через  $s$ . Заметим, что тогда в графе  $CIR(n)$  будет ровно по  $n$  хорд, длины которых равны  $1, 2, \dots, s$ . Тогда в силу леммы 2, для любого множества, для которого существует ровно  $a_i$  хорд длины  $i$ , размер максимальной антиклики не меньше  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_s}{s+1}$ . Но тогда выполнено неравенство  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_s}{s+1} < \lceil \frac{n}{m} \ln(s+1) \rceil$ . Так как левая часть не превосходит размера максимальной антиклики, а правая – строго больше, то правая часть больше размера максимальной антиклики хотя бы на 1, откуда  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_s}{s+1} < \frac{n}{m} \ln(s+1)$ . Просуммируем подобные неравенства по всем множествам. Поскольку имеется ровно  $n$  хорд длины  $i$  при  $i \leq s$  и каждая из этих хорд будет ровно один раз участвовать в сумме, то получим  $n(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s+1}) < n \ln(s+1)$ . Поскольку  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s+1} > \ln(s+1)$ , то получается противоречие, которое доказывает лемму 1.  $\square$

Следствие 1 доказывается так:

**Доказательство.** Разобьём все хорды на  $2n$  множеств:  $i$ -ому множеству будут принадлежать хорды с суммой чисел на концах, равной  $i + 2$  (некоторые множества могут быть пусты). Применим лемму 1. Тогда найдутся  $\lceil \frac{1}{2} \ln \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rceil$  попарно непересекающихся хорд, принадлежащих одному и тому же множеству. Поскольку  $n > 2e^{2t-2} + 3$ , то найдётся более  $\frac{1}{2} \ln[e^{2t-2} + 1] \geq t - 1$  попарно непересекающихся хорд, т. е. не менее  $t$ .  $\square$

Перейдём к доказательству теоремы 2.

**Доказательство.** Обозначим через  $t$  размер максимальной антиклики графа  $CIR(n)$ , принадлежащей одному множеству. Из каждой точки на окружности может выходить не более  $t$  хорд, принадлежащих

одному множеству, поскольку все эти хорды образуют антиклику. Докажем, что хорду длины  $\ell(A)$  может пересекать не более  $t\ell(A)$  других хорд из множества, в которое попала хорда  $A$ . Действительно, любая пересекающая её хорда этого множества имеет концы в разных полуплоскостях относительно  $A$ , а с одной из сторон таких точек всего  $\ell(A)$ . Но при этом из каждой такой точки выходит не более  $t$  хорд, принадлежащих тому же классу, что и  $A$ . Следовательно, степень вершины  $A$  в том множестве, в которое попала хорда  $A$ , не превосходит  $t\ell(A)$ .

Пусть в некотором множестве будет ровно  $a_i$  хорд длины  $i$ . Обозначим число  $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  через  $s$ . Теперь применим лемму 2. Из неё следует, что  $t \geq a_0 + \frac{a_1}{t+1} + \frac{a_2}{2t+1} + \frac{a_3}{3t+1} + \dots + \frac{a_s}{st+1}$ . Просуммируем подобные неравенства по всем множествам. Получим

$$knt \geq n \left( 1 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3t+1} \dots + \frac{1}{st+1} \right). \quad (1)$$

Поскольку функция  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  убывает при положительных  $x$ , то в силу интегральной оценки

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2t+1} + \dots + \frac{1}{st+1} &\geq \int_0^{s+1} \frac{1}{tx+1} dx \\ &= \frac{\ln(t(s+1)+1)}{t} \geq \frac{\ln(s+2)}{t} \geq \frac{\ln(n/2)}{t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если подставить это неравенство в 1, то получим, что  $knt > n \frac{\ln(n/2)}{t}$ , откуда  $t > \sqrt{\frac{\ln(n/2)}{k}}$ . Следовательно, в одном из подграфов, порождённых некоторым множеством, всегда найдётся антиклика мощности большей, чем  $\sqrt{\frac{\ln(n/2)}{k}}$ .  $\square$

Выведем теперь из этой теоремы следствие 2.

**Доказательство.** Разобьём все хорды на  $2kn$  множеств:  $i$ -ому множеству будут принадлежать хорды с суммой чисел на концах, равной  $i+1$  (некоторые множества могут быть пусты). Применим теорему 2. Тогда найдутся более, чем  $\sqrt{\frac{\ln(n/2)}{2k}}$  попарно непересекающихся хорд, принадлежащих одному и тому же множеству. Поскольку  $n > 2e^{2kt^2}$ ,

то найдутся более  $\sqrt{\frac{\ln e^{2kt^2}}{2k}} = t$  непересекающихся хорд, принадлежащих одному и тому же множеству.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Gavril, *Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph*. — Networks **3** (1975), 261–273.
2. H. de Fraysseix, *A characterization of circle graphs*. — Europ. J. Combin. **5** (1984), 223–238.
3. A. V. Kostochka and J. Kratochvil, *Covering and coloring polygon-circle graphs*. — Disc. Math. **163** (1997), 299–305.
4. A. V. Kostochka, *On upper bounds for the chromatic numbers of graphs*. — Trudy Inst. Math. **10** (1988), 204–226.
5. A. A. Ageev, *A triangle-free circle graph with chromatic number 5*. — Discrete Mathematics **152**, No. 1–3 (1996), 295–298.
6. Г. В. Пенашев, *Оценка хроматического числа графа пересечения хорд на окружности без  $K_4$* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2012), 149–156.
7. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, и Р. И. Тышкевич, *Лекции по теории графов*. Наука, 1990.

Berlov S. L. Independent sets and chromatic numbers of circle graphs.

Let the vertices of a circle graph be divided into several groups. This paper contains lower bounds on the size of an independent set that can be contained in one group of this subdivision.

Физико-математический лицей 239

Поступило 31 октября 2013 г.

Ярославский  
государственный университет,  
ул. Советская, д. 14,  
150000 Ярославль, Россия  
E-mail: sberlov@rambler.ru