УДК 517.98

Операторно липшицевы функции и модельные пространства. Александров А. Б. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 5–58.

Пусть H^∞ обозначает пространство ограниченных аналитических функций в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. В работе доказано, что каждая функция из модельного пространства $H^\infty \cap \Theta\overline{H^\infty}$ операторно липшицева на вещественной прямой $\mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда внутренняя функция Θ удовлетворяет обычному условию Липшица, т. е. $\Theta' \in H^\infty$.

Пусть $(\mathrm{OL})'(\mathbb{R})$ обозначает множество всех функций $f \in L^\infty$, первообразная которых операторно липшицева на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Мы доказываем, что $H^\infty \cap \Theta\overline{H^\infty} \subset (\mathrm{OL})'(\mathbb{R})$, если внутренняя функция Θ является произведением Бляшке с корнями, удовлетворяющими равномерному условию Фростмана. В работе также изучаются следующие вопросы. Когда внутренняя функция Θ принадлежит пространству $(\mathrm{OL})'(\mathbb{R})$? Когда все делители внутренней функции Θ принадлежат пространству $(\mathrm{OL})'(\mathbb{R})$?

В качестве приложения мы доказываем, что пространство $(\mathrm{OL})'(\mathbb{R})$ не является подалгеброй алгебры $L^\infty(\mathbb{R})$.

Ещё одно приложение связано с описанием множеств точек разрыва производных операторно липшицевых функций. Мы доказываем, что множество $\mathcal{E}, \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$, является множеством точек разрыва некоторой операторно липшицевой функции в том и только в том случае, когда $\mathcal{E}$ есть множество первой категории и типа F_σ.

Значительная часть результатов статьи основана на достаточном условии операторной липшицевости, полученном Арази, Бартоном и Фридманом. В статье приводится также достаточной условие операторной липшицевости, которое тоньше достаточного условия Арази–Бартона–Фридмана. Библ. – 27 назв.

УДК 517.5

Свойство $\log(f) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ в терминах преобразований Рисса. Васильев И. М. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 59–69.

Условие, упомянутое в заглавии, эквивалентно представимости функции f в виде $f = v_1/v_2$, где $|R_j v_i| \leqslant c v_i$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь $R_1, \ldots, R_n$ – преобразования Рисса. Библ. – 3 назв.

УДК 517.5

Оценки функционалов через второй модуль непрерывности четных производных. Виноградов О. Л., Жук В. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 70–90.

В работе устанавливается разложение функции по разностям второго порядка ее последовательных производных. Затем с помощью этого разложения получаются оценки функционалов через второй модуль непрерывности ω_2. Частными случаями полученных оценок служат неравенства типа Джексона для приближений целыми функциями конечной степени, тригонометрическими многочленами и сплайнами в различных пространствах функций. Постоянные в оценках меньше, чем ранее известные. Приведем одно из установленных неравенств.

Пусть $p \in [1, +\infty]$, $\sigma, \gamma > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in W_p^{(2r)}(\mathbb{R})$. Тогда

$$A_{\sigma-0}(f)_p \leqslant \frac{\pi^{2r}}{\sigma^{2r}}\Bigg(\gamma^{2r}\int\limits_0^1 |\psi_{2r}| + \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\gamma^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}}\Bigg)\omega_2\left(f^{(2r)}, \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_p.$$

Здесь $\psi_{2r}(u) = -\frac{B_{2r}(u)}{(2r)!}(1-u) - 2r\frac{B_{2r+1}(u)}{(2r+1)!}$, $\mathcal{B}_n$ и B_n – числа и многочлены Бернулли, $\mathcal{K}_n$ – константы Фавара, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$ – наилучшее приближение целыми функциями степени меньше σ в $L_p(\mathbb{R})$.

Библ. — 16 назв.

УДК 517.983

О целых решениях экспоненциального типа одного неявного линейного дифференциально-разностного уравнения в банаховом пространстве. Гефтер С. Л., Стулова Т. Е. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 91–97.

Пусть A – замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве, область определения которого не обязательно является плотной.

В заметке изучаются целые решения экспоненциального типа следующего простейшего дифференциально-разностного уравнения $w'(z) = Aw(z-h) + f(z)$. В предположении ограниченной обратимости оператора A доказывается корректность этого уравнения в специальном пространстве целых вектор-функций экспоненциального типа. Библ. – 12 назв.

УДК 517.5

Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной метрике с весом. Гладкая А. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 98–107.

Работа содержит обобщение результатов П.Л.Чебышева о полиномах, наименее улоняющихся от нуля в равномерной метрике с весом, на целые функции экспоненциального типа. Предъявлена функция f_σ, наименее уклоняющаяся от нуля среди целых функций степени σ, принадлежащих классу A. Этот класс включает в себя функции, ненулевые корни которых a_k удовлетворяют неравенству $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right| < \infty$.

Пусть даны функция ρ_m класса A, степени m, четная, положительная на вещественной оси, и число $\sigma > m$. Положим

$$f_\sigma(z) := \frac{1}{2}\left(e^{-i\sigma z} g_m^2(z) + e^{i\sigma z} g_m^2(-z)\right),$$

где $\rho_m(x) = |g_m(x)|^2$. Для функции f_σ доказана следующая теорема.

Теорема. *Для любой целой функции Q класса A, отличной от тождественного нуля, степени меньшей σ выполняется неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{f_\sigma - Q}{\rho_m}\right| > \sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{f_\sigma}{\rho_m}\right|.$$

Другими словами, единственным элементом наилучшего приближения для функции f_σ среди функций меньшей степени будет тождественный ноль. Библ. – 5 назв.

УДК 517.538.52+517.444

Сходимость мнимых частей наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ при $p < 1$. Каюмов И. Р., Каюмова А. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 108–116.

Для $p \in (1/2, 1)$ в работе исследована сходимость в $L_p(\mathbb{R})$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Im}(t - z_k)^{-1}|$, где z_k – точки на комплексной плоскости. Дано полное решение этой задачи в случае, когда последовательность $\{\mathrm{Re}\ z_k\}$ не имеет предельных точек. Подробно исследован случай, когда последовательность $\{\mathrm{Re}\ z_k\}$ имеет конечное число предельных точек. Библ. – 6 назв.

УДК 517.443+517.982.27

Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа в пространствах Мори–Кампанато: анонс. Осипов Н. Н. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 117–123.

Рубио де Франсиа доказал одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов в L^p, $2 \leqslant p < \infty$. Развивая его методы, можно доказать аналог такого неравенства для показателей p, "больших бесконечности", то есть для классов Гёльдера и пространства BMO. Библ. – 12 назв.

УДК 517.55, 517.982.274

Интегральные обратные оценки для логарифмических пространств Блоха в шаре. Петров А. Н. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 124–135.

Получены интегральные обратные оценки для логарифмических пространств Блоха в единичном шаре из $\mathbb{C}^m$. В качестве приложений изучаются гиперболические градиенты внутренних отображений. Библ. – 11 назв.

УДК 517.5

Конструктивное описание классов Бесова в выпуклых областях в $\mathbb{C}^d$. Роткевич А. С. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 136–174.

Метод псевдоаналитического продолжения Е. М. Дынкина распространяется на выпуклые области с гладкой границей в $\mathbb{C}^d$. С его помощью дается конструктивное описание классов Бесова в областях указанного вида.

Библ. – 22 назв.

УДК 517.982.1:517.538

О связи между АК-устойчивостью и ВМО-регулярностью. Руцкий Д. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 175–187.

Пусть (X, Y) – пара банаховых решёток измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, удовлетворяющих условию Фату и ещё одному условию, позволяющему корректно ввести подпространства типа Харди в X и Y. Показывается, что свойства ограниченной АК-устойчивости и ВМО-регулярности совпадают для таких пар. Если решётка XY' банахова, или если обе решётки X^2 и Y^2 банаховы, или если $Y = \mathrm{L}_p$ при $p \in \{1, 2, \infty\}$, то свойства АК-устойчивости и ВМО-регулярности также совпадают для таких пар (X, Y). Библ. – 13 назв.

УДК 517.518.13

Серия операторов в $L^2(\mathbb{C})$, пропорциональных унитарным. Широков Н. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 41. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 416), СПб., 2013, с. 188–201.

В статье доказано, что операторы в $L^2(\mathbb{C})$ вида

$$Tf(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(w(z) - w(\xi))^n}{(z - \xi)^{n+2}} f(\xi) dm_2(\xi),$$

где $|w(z) - w(\xi)| \leqslant c|z - \xi|$, $z, \xi \in \mathbb{C}$, пропорциональны унитарным тогда и только тогда, когда $w(z) = az$ или $w(z) = b\overline{z}$. Библ. – 3 назв.