Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

Н. А. Широков

СЕРИЯ ОПЕРАТОРОВ В $L^2(\mathbb{C})$, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ УНИТАРНЫМ

Для функции $f \in L^2(\mathbb{C})$ классический оператор T_0, определенный для п.в. $z \in \mathbb{C}$ формулой

$$T_0 f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|\xi - z| > \varepsilon} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, dm_2(\xi), \tag{1}$$

где m_2 – мера Лебега в $\mathbb{C}$, пропорционален унитарному. Именно [1, гл. 1], справедливо соотношение $\|T_0 f\|_{L^2(\mathbb{C})} = \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{C})}$. Оказывается, что существует целая серия операторов T_n, пропорциональных унитарным.

Теорема 1. *Для операторов T_n, определяемых при п.в. $z \in \mathbb{C}$ формулой*

$$T_n f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|\xi - z| > \varepsilon} \frac{(\bar{\xi} - \bar{z})^n}{(\xi - z)^{n+2}} f(\xi)\, dm_2(\xi) \tag{2}$$

справедливо равенство $\|T_n f\|_{L^2(\mathbb{C})} = \frac{1}{2n+2}\|f\|_{L^2(\mathbb{C})}$.

То, что операторы T_n корректно определены и ограничены, установлено, в частности, в [2]. В той же работе рассматривались более общие, чем T_n, операторы

$$T_{n,w} f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|\xi - z| > \varepsilon} \left(\frac{w(\xi) - w(z)}{\xi - z}\right)^n \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, dm_2(\xi), \tag{3}$$

которые оказывались корректно определенными и ограниченными в $L^2(\mathbb{C})$ для функций $w(z)$, удовлетворяющих условию

$$|w(z) - w(\xi)| \leqslant c|z - \xi|, \quad z, \xi \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Оказывается, что, по крайней мере для достаточно гладких функций w, лишь серия операторов aT_n, $n \geqslant 0$, где $a \in \mathbb{C}$, состоит из операторов, пропорциональных унитарному.

Ключевые слова: коммутаторы Кальдерона, сингулярные интегралы, унитарные операторы.

Поддержано РФФИ, грант 11-01-00526.

Теорема 2. *Пусть функция w удовлетворяет условию* (4), $w \in C^1(\mathbb{C})$ *и оператор $T_{n,w}$ пропорционален унитарному. Тогда либо $w(z) \equiv az$ и $T_{n,w} = a^n T_0$, либо $w(z) \equiv b\bar{z}$ и $T_{n,w} = b^n T_n$, где a, $b \in \mathbb{C}$.*

Доказательство теоремы 1. Будем использовать двумерное преобразование Фурье функции $F \in L^2(\mathbb{C})$ с нормировкой

$$\widehat{F}(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} F(x,y) e^{-i(\sigma x+\tau y)}\, dm_2(x,y),$$

которая дает равенство Планшереля в форме $\|\widehat{F}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Пусть f – финитная C^∞-гладкая функция. Тогда

$$T_n f(z) = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to+\infty}} \int\limits_{\varepsilon<|\xi-z|<R} f(\xi)\frac{(\bar{\xi}-\bar{z})^n}{(\xi-z)^{n+2}}\, dm_2(\xi) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} (f * S_{\varepsilon,R})(z), \tag{5}$$

где

$$S_{\varepsilon,R}(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leqslant \varepsilon, \\ \frac{\overline{\xi}^n}{\xi^{n+2}}, & \varepsilon < |\xi| < R, \\ 0, & R \leqslant |\xi|, \end{cases} \tag{6}$$

поэтому

$$(\widehat{T_n f})(\lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \hat{f}(\lambda)\widehat{S}_{\varepsilon,R}(\lambda).$$

Теперь при $\lambda = \sigma + i\tau$, $\xi = x + iy$ имеем

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to+\infty}} \widehat{S}_{\varepsilon,R}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\sigma x+\tau y)} \frac{\overline{\xi}^n}{\xi^{n+2}}\, dm_2(\xi) =: \widehat{S}(\lambda). \tag{7}$$

Положим в (7) $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, $\xi = re^{i\theta}$, тогда $\sigma x + \tau y = r\rho\cos(\theta - \varphi)$ и

$$\begin{aligned}\widehat{S}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\varphi)}\cdot e^{-i(2n+2)\theta}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot r\,d\,r d\theta\\ &= e^{-i(2n+2)\varphi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dr}{r}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\rho\cos\theta_1}e^{-i(2n+2)\theta_1}d\,\theta_1\\ &= e^{-i(2n+2)\varphi}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dr}{r}\int\limits_0^{\pi} e^{-ir\rho\cos\theta}\cos(2n+2)\theta d\,\theta. \end{aligned}\tag{8}$$

Согласно формуле (2) в (7.12), стр. 92, из [3], имеем равенство

$$\int\limits_0^\pi e^{iz\cos\theta}\cos m\theta d\theta = \pi i^m J_m(z),\tag{9}$$

где J_m – функция Бесселя порядка m, поэтому (8) и (9) влекут

$$\begin{aligned}\widehat{S}(\lambda) &= e^{-i(2n+2)\varphi}(-1)^{n+1}\int\limits_0^\infty\frac{J_{2n+2}(r\rho)}{r}\,dr\\ &= \frac{1}{2n+2}(-1)^{n+1}e^{-i(2n+2)\varphi},\end{aligned}\tag{10}$$

при этом мы воспользовались формулой [3, (29), 7.14.2, стр. 106]. Таким образом, равенство (10) влечет соотношение

$$|(\widehat{T_n f})(\lambda)| = \frac{1}{2n+2}|\widehat{f}(\lambda)|.\tag{11}$$

Теперь (11) и равенство Планшереля дают утверждения теоремы 1. $\square$

Для доказательства теоремы 2 потребуются некоторые приготовления. Считаем, что функция w удовлетворяет условию

$$|w(z) - w(\xi)| \leqslant |z - \xi|, \quad z, \xi \in \mathbb{C},\tag{12}$$

и пусть в некоторой точке z_0 имеют место равенства

$$w'_z(z_0) = a, \quad w'_{\bar z}(z_0) = b, \quad \text{где} \quad a,\ b \neq 0.\tag{13}$$

Из (12) находим, что $|a|+|b| \leqslant 1$. Выберем $\eta > 0$ и выберем ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, так, чтобы при $z \in \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi : |\xi - z_0| \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon\}$ были справедливы соотношения

$$|w'_z(z) - w'_z(z_0)| < \eta, \quad |w'_{\bar z}(z) - w'_{\bar z}(z_0)| < \eta, \tag{14}$$

и при z, $\xi \in \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0)$ выполнялось бы условие

$$|w(\xi) - w(z) - w'_z(z)(\xi - z) - w'_{\bar z}(z)(\overline{\xi} - \bar z)| < \eta|z - \xi|. \tag{15}$$

Тогда при $z, \xi \in \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0)$ в случае $|z-\xi| \geqslant \frac{2}{3}\max(|z-z_0|, |\xi-z_0|)$ имеем

$$\begin{aligned}
&|(w(z) - w(z_0) - a(z - z_0) - b(\bar z - \bar z_0))\\
&- (w(\xi) - w(z_0) - a(\xi - z_0) - b(\overline{\xi} - \bar z_0))|\\
&\leqslant |w(z) - w(z_0) - a(z - z_0) - b(\bar z - \bar z_0)|\\
&+ |w(\xi) - w(z_0) - a(\xi - z_0) - b(\overline{\xi} - \bar z_0)|\\
&\leqslant \eta|z - z_0| + \eta|\xi - z_0|\\
&\leqslant 2\eta \max(|z - z_0|, |\xi - z_0|) \leqslant 3\eta|z - \xi|.
\end{aligned} \tag{16}$$

В случае $|z - \xi| < \frac{2}{3}\max(|z - z_0|, |\xi - z_0|)$ получаем

$$\begin{aligned}
&|(w(z) - w(z_0) - a(z - z_0) - b(\bar z - \bar z_0))\\
&- (w(\xi) - w(z_0) - a(\xi - z_0) - b(\overline{\xi} - \bar z_0))|\\
&= |w(z) - w(\xi) - a(z - \xi) - b(\bar z - \overline{\xi})|\\
&\leqslant |w(z) - w(\xi) - w'_z(\xi)(z - \xi) - w'_{\bar z}(\xi)(\bar z - \overline{\xi})|\\
&+ |w'_z(\xi) - w'_z(z_0)||z - \xi| + |w'_{\bar z}(\xi) - w'_{\bar z}(z_0)||z - \xi|\\
&< \eta|z - \xi| + 2\eta|z - \xi| = 3\eta|z - \xi|.
\end{aligned} \tag{17}$$

В итоге (16) и (17) дают, что при z, $\xi \in \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0)$ выполнено неравенство

$$|w_1(z) - w_1(\xi)| < 3\eta|z - \xi|,$$

где

$$w_1(z) = w(z) - w(z_0) - a(z - z_0) - b(\bar z - \bar z_0).$$

Не умаляя общности, полагаем $w(z_0) = 0$, тогда

$$|w_1(z)| < \frac{9}{2}\eta\varepsilon \tag{18}$$

при $|z - z_0| \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon$. Пусть

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0, & t > \frac{3}{2}\varepsilon, \\ 1 - \frac{2}{\varepsilon}(t - \varepsilon), & \varepsilon < t \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon, \end{cases} \tag{19}$$

$w_2(z) = w_1(z)\theta_\varepsilon(|z - z_0|)$.

Учитывая соотношения (18) и (19), находим, что при $z, \xi \in \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |w_2(z) - w_2(\xi)| \leqslant {} & |w_1(z) - w_1(\xi)|\theta_\varepsilon(|z - z_0|) \\ & + |w_1(\xi)||\theta_\varepsilon(|z - z_0|) - \theta_\varepsilon(|\xi - z_0|)| \\ & \leqslant 3\eta|z - \xi| + \frac{9}{2}\eta\varepsilon \cdot \frac{2}{\varepsilon}|z - \xi| = 12\eta|z - \xi|. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку $w_2(z) = 0$ при $z \notin \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0)$, оценка (20) справедлива при любых $z, \xi \in \mathbb{C}$. Теперь полагаем

$$\tilde{w}(z) = a(z - z_0) + b(\bar{z} - \bar{z}_0) + w_2(z). \tag{21}$$

Заметим, что

$$\tilde{w}(z) = \begin{cases} w(z), & z \in \overline{B}_\varepsilon(z_0) \\ a(z - z_0) + b(\bar{z} - \bar{z}_0), & z \notin \overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0) \end{cases}. \tag{22}$$

Считаем, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, и пусть $\delta = \varepsilon^2$. Предположим, что $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}_\delta(z_0)$ и $\int\limits_{B_\delta(z_0)} |f|^2\, dm_2 = 1$. Пусть

$$A = \int\limits_{B_\delta(z_0)} |f|\, dm_2. \tag{23}$$

Неравенство Коши–Шварца влечет

$$A^2 \leqslant \int\limits_{B_\delta(z_0)} |f|^2\, dm_2 \cdot \pi\delta^2 = \pi\delta^2, \quad A \leqslant \sqrt{\pi}\delta = \sqrt{\pi}\varepsilon^2. \tag{24}$$

Теперь при $|z-z_0|\geqslant\varepsilon$ получаем:

$$|T_{n,w}f(z)|\leqslant\int\limits_{B_\delta(z_0)}\frac{|w(z)-w(\xi)|^n}{|z-\xi|^{n+2}}\,|f(\xi)|\,dm_2(\xi)$$
$$\leqslant\int\limits_{B_\delta(z_0)}\frac{1}{|z-\xi|^2}|f(\xi)\,|dm_2(\xi)<\frac{2A}{|z-z_0|^2}. \tag{25}$$

Тогда (24) и (25) дают соотношение

$$\int\limits_{|z-z_0|\geqslant\varepsilon}|T_{n,w}f(z)|^2\,dm_2(z)<4A^2\int\limits_{|z-z_0|\geqslant\varepsilon}\frac{dm_2(z)}{|z-z_0|^4}=8\pi A^2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dr}{r^3}$$
$$<\frac{4\pi^2\delta^2}{\varepsilon^2}=4\pi^2\varepsilon^2. \tag{26}$$

Считаем, что $0<\eta<\frac{1}{12n}$, тогда из оценки (20) следует, что

$$|w_2(z)-w_2(\xi)|\leqslant\frac{1}{n}|z-\xi|,\quad z,\xi\in\overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0). \tag{27}$$

Учитывая, что $|a|+|b|\leqslant 1$, из (27) находим, что

$$|\tilde{w}(z)-\tilde{w}(\xi)|\leqslant(1+\frac{1}{n})|z-\xi|,\quad z,\xi\in\overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0). \tag{28}$$

В таком случае из (28), подобно (24), получаем, что

$$|T_{n,\tilde{w}}f(z)|\leqslant\int\limits_{B_\delta(z_0)}\frac{|\tilde{w}(z)-\tilde{w}(\xi)|^n}{|z-\xi|^{n+2}}|f(\xi)|\,dm_2(\xi)$$
$$<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{(|z-z_0|-\delta)^2}\;A<\frac{2eA}{|z-z_0|^2},$$
$$z\in\overline{B}_{\frac{3}{2}\varepsilon}(z_0)\setminus\overline{B}_\varepsilon(z_0). \tag{29}$$

Теперь (29) влечет

$$\int\limits_{|z-z_0|\geqslant\varepsilon}|T_{n,\tilde{w}}f(z)|^2\,dm_2(z)<4e^2A^2\int\limits_{|z-z_0|\geqslant\varepsilon}\frac{dm_2(z)}{|z-z_0|^4}$$
$$<4e^2\pi^2\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}=4e^2\pi^2\varepsilon^2. \tag{30}$$

Предположим теперь, что $c > 0$ таково, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |T_{n,w} f(z)|^2 \, dm_2(z) = c^2 \int\limits_{\mathbb{C}} |f|^2 \, dm_2 \tag{31}$$

для любой функции f, $f \in L^2(\mathbb{C})$. Выберем позже $\varkappa$, $1 > \varkappa > 0$, которое будет зависеть лишь от a и b; по этому $\varkappa$ выберем ε так, чтобы удовлетворялось соотношение $4e^2\pi^2\varepsilon^2 < \frac{1}{2}\varkappa c^2$. Тогда формулы (31) и (26) влекут (напомним, что $\int\limits_{\mathbb{C}} |f|^2 \, dm_2 = 1$):

$$c^2 \geqslant \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |T_{n,w} f(z)|^2 \, dm_2(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} |T_{n,w} f|^2 \, dm_2 - \int\limits_{|z-z_0|>\varepsilon} |T_{n,w} f|^2 \, dm_2$$

$$> c^2 \bigl(1 - \frac{1}{2}\varkappa\bigr).$$

Так как $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}_\delta(z_0)$ и $w(z) = \tilde{w}(z)$ при $z \in \overline{B}_\varepsilon(z_0)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |T_{n,\tilde{w}} f|^2 \, dm_2 = \int\limits_{B_\varepsilon(z_0)} |T_{n,w} f|^2 \, dm_2 + \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_\varepsilon(z_0)} |T_{n,\tilde{w}} f|^2 \, dm_2 > c^2 (1 - \frac{1}{2}\varkappa), \tag{32}$$

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |T_{n,\tilde{w}} f|^2 \, dm_2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} |T_{n,w} f|^2 \, dm_2 + \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_\varepsilon(z_0)} |T_{n,\tilde{w}} f|^2 \, dm_2 < c^2 \bigl(1 + \frac{1}{2}\varkappa\bigr). \tag{33}$$

Приведем результат из [2].

Теорема А. *Пусть функции w_1 и w_2 удовлетворяют условию*

$$|w_j(z) - w_j(\xi)| \leqslant A_j |z - \xi|, \quad z, \xi \in \mathbb{C}, \ j = 1, 2, \tag{34}$$

где A_j, $j = 1, 2$, – некоторые постоянные, и

$$T_{n,w_1,m,w_2} f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(w_1(z) - w_1(\xi))^n (w_2(z) - w_2(\xi))^m}{(z - \xi)^{n+m+2}} \, f(\xi) \, dm_2(\xi). \tag{35}$$

Тогда существует постоянная B_{m+n} такая, что

$$\|T_{n,w_1,m,w_2} f\|_{L^2(\mathbb{C})} \leqslant B_{n+m} A_1^n A_2^m \|f\|_{L^2(\mathbb{C})} \tag{36}$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{C})$.

Пусть $w_*(z) = a(z - z_0) + b(\bar z - \bar z_0)$, тогда $\widetilde w = w_* + w_2$,

$$|w_*(z) - w_*(\xi)| \leqslant (|a| + |b|)|z - \xi| \leqslant |z - \xi|, \quad |w_2(z) - w_2(\xi)| \leqslant 12\eta|z - \xi|. \tag{37}$$

Запишем $T_{n,\widetilde w}f$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{n,\widetilde w}f(z) &= \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(w_*(z) - w_*(\xi))^n}{(z-\xi)^{n+2}} f(\xi)\,dm_2(\xi) \\ &+ \sum_{k=1}^n C_n^k \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(w_*(z) - w_*(\xi))^{n-k}(w_2(z) - w_2(\xi))^k}{(z-\xi)^{n+2}} f(\xi)\,dm_2(\xi) \\ &= T_{n,w_*}f(z) + \sum_{k=1}^n C_n^k T_{n-k,w_*,k,w_2} f(z). \end{aligned} \tag{38}$$

С учетом соотношений (34)–(37) и (38) находим, что

$$\begin{aligned} \|(T_{n,\widetilde w} - T_{n,w_*})f\|_{L^2(\mathbb{C})} &\leqslant \sum_{k=1}^n B_n C_n^k (12\eta)^k \|f\|_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= B_n\left((1+12\eta)^n - 1\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{C})} < \left(e^{12n\eta} - 1\right) B_n \|f\|_{L^2(\mathbb{C})}. \end{aligned} \tag{39}$$

Поскольку параметр $\varkappa$, $0 < \varkappa < \frac14$, выбирается первым, а по нему выбираем η, мы считаем, что η выбрано так, что

$$B_n(e^{12n\eta} - 1) < \varkappa c, \tag{40}$$

тогда (39) и (40) дадут при $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}_\delta(z_0)$, $\|f\|_{L^2(\mathbb{C})} = 1$ следующее соотношение:

$$\|T_{n,w_*}f\|_{L^2(\mathbb{C})} \leqslant \|T_{n,\widetilde w}f\|_{L^2(\mathbb{C})} + \varkappa c < \left(\sqrt{1 + \frac{\varkappa}{2}} + \varkappa\right)c < \left(1 + \frac32\varkappa\right)c, \tag{41}$$

$$\|T_{n,w_*}f\|_{L^2(\mathbb{C})} \geqslant \|T_{n,\widetilde w}f\|_{L^2(\mathbb{C})} - \varkappa c > \left(\sqrt{1 - \frac{\varkappa}{2}} - \varkappa\right)c > (1 - 2\varkappa)c, \tag{42}$$

поэтому для f_1, f_2 таких, что $\operatorname{supp} f_j \subset \overline{B}_\delta(z_0)$, $\|f_j\|_{L^2(\mathbb{C})} = 1$, из (41), (42) находим

$$\frac{\|T_{n,w_*}f_1\|^2_{L^2(\mathbb{C})}}{\|T_{n,w_*}f_2\|^2_{L^2(\mathbb{C})}} < \left(\frac{1 + \frac32\varkappa}{1 - 2\varkappa}\right)^2. \tag{43}$$

Не умаляя общности, считаем, что $z_0 = 0$. Перепишем $T_{n,w_*}f$ в следующей форме:

$$T_{n,w_*}f(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(\bar{z}-\bar{\xi})^k}{(z-\xi)^{k+2}} f(\xi)\,dm_2(\xi)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k T_k f(z), \tag{44}$$

тогда для $\lambda = \rho e^{i\varphi}$ из (44) и (10) находим, что

$$(\widehat{T_{n,w_*}f})(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k+2} e^{-i(2k+2)\varphi}\right) \hat{f}(\lambda). \tag{45}$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$q(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k+2} e^{-i(2k+2)\varphi},$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$. Выберем $\beta, \varphi_1, \varphi_2$ так, что

$$\min_{\varphi\in[\varphi_1-\beta,\varphi_1+\beta]} |q(\varphi)|^2 - \max_{\varphi\in[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(\varphi)|^2 = \gamma > 0. \tag{46}$$

Как видно из определения (46), γ зависит лишь от q.

Мы выберем произвольное $\nu > 0$ и найдем функции f_1, f_2 такие, что $\operatorname{supp} f_j \subset \overline{B}_\delta(0)$, $j = 1, 2$, и

$$1 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} |\hat{f}_1(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho\,d\rho\,d\varphi < (1+\nu) \int\limits_{\varphi_1-\beta}^{\varphi_1+\beta}\int\limits_0^{\infty} |\hat{f}_1(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho\,d\rho\,d\varphi \tag{47}$$

и

$$1 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} |\hat{f}_2(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho\,d\rho\,d\varphi < (1+\nu) \int\limits_{\varphi_2-\beta}^{\varphi_2+\beta}\int\limits_0^{\infty} |\hat{f}_2(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho\,d\rho\,d\varphi. \tag{48}$$

(Построение функций f_1, f_2 приведено в лемме ниже.)

Положим

$$M = \max_{\varphi\in[0,2\pi]} |q(e^{i\varphi})|^2.$$

В таком случае мы получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{C}} |\widehat{T_{n,w_*} f_1}(\lambda)|^2 \, dm_2(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} |q\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)|^2 |\widehat{f}_1(\lambda)|^2 dm_2(\lambda) \\
&\geqslant \min_{\varphi\in[\varphi_1-\beta,\varphi_1+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 \int\limits_{\varphi_1-\beta}^{\varphi_1+\beta} \int\limits_0^{\infty} |\widehat{f}_1(\rho e^{i\varphi})|^2 \, \rho \, d\rho \, d\varphi \\
&> \frac{1}{1+\nu} \min_{\varphi\in[\varphi_1-\beta,\varphi_1+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} |\widehat{f}_1(\rho e^{i\varphi})|^2 \, \rho \, d\rho \, d\varphi \\
&= \frac{1}{1+\nu} \min_{\varphi\in[\varphi_1-\beta,\varphi_1+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2; \qquad (49)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{C}} |\widehat{T_{n,w_*} f_2}(\lambda)|^2 dm_2(\lambda) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} |q(e^{i\varphi})|^2 |\widehat{f}_2(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \\
&\leqslant M \int\limits_{[\varphi_2-\pi,\varphi_2+\pi]\setminus[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} \int\limits_0^{\infty} |\widehat{f}_2(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \\
&+ \max_{\varphi\in[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(\varphi)|^2 \int\limits_{\varphi_2-\beta}^{\varphi_2+\beta} \int\limits_0^{\infty} |\widehat{f}_2(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \\
&< \left(\max_{\varphi\in[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 + M\nu \right) \int\limits_{\varphi_2-\beta}^{\varphi_2+\beta} \int\limits_0^{\infty} |\widehat{f}_2(\rho e^{i\varphi})\,|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \\
&\leqslant \max_{\varphi\in[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 + M\nu. \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Выберем ν так, чтобы имела место оценка

$$
\frac{1}{1+\nu} \min_{\varphi\in[\varphi_1-\beta,\varphi_1+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 - \max_{\varphi\in[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 - M\nu > \frac{\gamma}{2}. \qquad (51)
$$

Тогда из (49)–(51) находим, что

$$\frac{\int\limits_{\mathbb{C}} |\widehat{T_{n,w_*}f_1}(\lambda)|^2 dm_2(\lambda)}{\int\limits_{\mathbb{C}} |\widehat{T_{n,w_*}f_2}(\lambda)|^2 dm_2(\lambda)} > \frac{\min\limits_{[\varphi_1-\beta,\varphi_1+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2}{\left(\max\limits_{[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 + M\nu\right)(1+\nu)}$$

$$> \frac{\max\limits_{[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 + M\nu + \frac{\gamma}{2}}{\max\limits_{[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 + M\nu}$$

$$= 1 + \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{1}{\max\limits_{[\varphi_2-\beta,\varphi_2+\beta]} |q(e^{i\varphi})|^2 + M\nu}. \tag{52}$$

При достаточно малом ν, выбранном по γ, и достаточно малом $\varkappa$, выбранном в (43), соотношения (43) и (52) противоречивы, поэтому условия $a \neq 0$ и $b \neq 0$ несовместимы.

Лемма. *Существуют функции f_1, f_2, удовлетворяющие соотношениям (47) и (48).*

Доказательство. Построение функций f_1 и f_2 аналогично. Построим, например, f_1.

Если U_α – поворот координатных осей на угол α,

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{bmatrix} = U_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_\alpha \end{bmatrix} = U_\alpha \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix},$$

то $x_\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y_\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$, и аналогичное равенство имеет место для σ_α и τ_α, следовательно, $x\sigma_\alpha + y\tau_\alpha = x_{-\alpha}\sigma + y_{-\alpha}\tau$, поэтому для $f_\alpha(x,y) = f(x_\alpha, y_\alpha)$ справедливо соотношение

$$\widehat{f}_\alpha(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(x,y) e^{-i(x\sigma+y\tau)}\,dm_2(x,y)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_\alpha,y_\alpha) e^{-i(x\sigma+y\tau)}\,dm_2(x,y)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y) e^{-i(x_{-\alpha}\sigma+y_{-\alpha}\tau)}\,dm_2(x,y)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-i(x\sigma_\alpha+y\tau_\alpha)}\,dm_2(x,y) = \widehat{f}(\sigma_\alpha,\tau_\alpha), \tag{53}$$

при этом если $\operatorname{supp} f \subset \overline{B_\delta}(0)$, то и $\operatorname{supp} f_\alpha \subset \overline{B_\delta}(0)$. Поэтому соотношение (53) позволяет, не уменьшая общности, считать, что $\varphi_1 = 0$.

Далее будет указана быстро убывающая на бесконечности функция $\Phi(\sigma)$, для которой $\operatorname{supp} \widetilde{\Phi} \subset \left[-\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right]$, где $\widetilde{\Phi}$ – обратное одномерное преобразование Фурье функции Φ. Пусть $\Phi_A(\sigma) = \Phi(\sigma - A)$, тогда $\widetilde{\Phi}_A(x) = e^{iAx}\widetilde{\Phi}(x)$, $\operatorname{supp} \widetilde{\Phi}_A \subset [-\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}]$. Положим $\widehat{f}_1(\sigma, \tau) = \Phi_A(\sigma)\Phi(\tau)$, где $A > 0$ будет достаточно большим, тогда

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\sigma} \cdot e^{iy\tau} \Phi_A(\sigma)\Phi(\tau)\, d\sigma\, d\tau \\ &= \widetilde{\Phi}_A(x)\widetilde{\Phi}(y) = e^{iAx}\widetilde{\Phi}(x)\widetilde{\Phi}(y). \end{aligned} \tag{54}$$

Из (54) находим, что

$$\operatorname{supp} f_1 \subset [-\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}] \times [-\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}] \subset \overline{B}_\delta(0).$$

При этом

$$\|f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widetilde{\Phi}(x)|^2 |\widetilde{\Phi}(y)|^2\, dx\, dy = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi(\sigma)|^2\, d\sigma \right)^2 = 1, \tag{55}$$

если предполагаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi(\sigma)|^2\, d\sigma = 1. \tag{56}$$

Положим $a = \frac{\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta} A$, тогда квадрат с центром в точке $(A, 0)$ и стороной a содержится в угле $\{(\sigma, \tau) : |\arg(\sigma + i\tau)| \leqslant \beta\}$. Положим $\delta_1 = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, $a_1 = \frac{a}{2}$,

$$\Phi(\sigma) = c_1 \frac{(\sin \delta_1 \sqrt{\sigma^2 - a_1^2})^2}{\sigma^2 - a_1^2}. \tag{57}$$

Функция Φ, определенная в (57) – целая функция экспоненциального типа $2\delta_1 = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $\Phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, поэтому по теореме Пэли–Винера $\operatorname{supp} \widetilde{\Phi} \subset [-\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{\delta}{\sqrt{2}}]$. Постоянную c_1 выберем так, чтобы $\|\Phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Для того, чтобы удовлетворить соотношениям (47) и (48), достаточно проверить, что при достаточно большом a отношение

$$l(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{\int\limits_{|\sigma|>a} |\Phi(\sigma)|^2 d\sigma}{\int\limits_{|\sigma|\leqslant a} |\Phi(\sigma)|^2 d\sigma} \tag{58}$$

может быть сделано сколь угодно малым. Действительно, имеют место следующие оценки:

$$\frac{1}{c_1^2} \int\limits_{|\sigma|\geqslant a} |\Phi(\sigma)|^2\, d\sigma \leqslant 2 \int\limits_a^\infty \frac{1}{(\sigma^2 - a_1^2)^2}\, d\sigma < \frac{2}{a^3}, \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c_1^2} \int\limits_{|\sigma|\leqslant a} |\Phi(\sigma)|^2\, d\sigma > \frac{1}{c_1^2} \int\limits_{|\sigma|\leqslant a_1} |\Phi(\sigma)|^2\, d\sigma \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_{|\sigma|\leqslant a_1} \frac{e^{2\delta_1\sqrt{a_1^2-\sigma^2}} + e^{-2\delta_1\sqrt{a_1^2-\sigma^2}} - 2}{(\sigma^2 - a_1^2)^2}\, d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{a_1}{2}} \frac{e^{2\delta_1\sqrt{a_1^2-\sigma^2}}}{(a_1^2-\sigma^2)^2} d\sigma + O\left(e^{2\delta_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a_1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{2\delta_1 a_1}}{a_1^4} \int\limits_0^{\frac{a_1}{2}} \frac{e^{2\delta_1(\sqrt{a_1^2-\sigma^2}-a_1)}}{(1-\frac{\sigma^2}{a_1^2})^2}\, d\sigma + O\left(e^{\sqrt{3}\delta_1 a_1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{2\delta_1 a_1}}{a_1^4} \int\limits_0^{\frac{a_1}{2}} e^{-2\delta_1\frac{\sigma^2}{\sqrt{a_1^2-\sigma^2}+a_1}}\, d\sigma(1+o(1)) + O\left(e^{\sqrt{3}\delta_1 a_1}\right) \\
&= \frac{1}{2a^4} e^{2\delta_1 a_1} \int\limits_0^{\frac{a_1}{2}} e^{-\frac{\delta_1}{a_1}\sigma^2}\, d\sigma(1+o(1)) + O\left(e^{\sqrt{3}\delta_1 a_1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \cdot \frac{e^{2\delta_1 a}}{a^{7/2}}(1+o(1)), \quad a \to +\infty.
\end{aligned} \tag{60}$$

Из (59) и (60) находим, что при больших a

$$l(a) < \frac{4\sqrt{2}\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\pi}} a^{\frac{1}{2}} e^{-2\delta_1 a}(1+o(1)), \tag{61}$$

что повлечет (47) и (48). $\square$

Таким образом, мы получаем, что в любой точке z_0 либо $w'_z(z_0) = a = 0$, либо $w'_{\bar{z}}(z_0) = b = 0$; при этом предыдущее доказательство показывает, что соотношения $w'_z(z_0) = 0$ и $w'_{\bar{z}}(z_0) = 0$ одновременно выполняться тоже не могут. Пусть

$$\mathbb{C}_{w+} = \{z_0 \in \mathbb{C} : w'_z(z_0) \neq 0\}, \quad \mathbb{C}_{w-} = \{z_0 \in \mathbb{C} : w'_{\bar{z}}(z_0) \neq 0\}.$$

Тогда $\mathbb{C}_{w+}$ и $\mathbb{C}_{w-}$ открыты в силу условия $w \in C^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{w+} \cup \mathbb{C}_{w-}$, и $\mathbb{C}_{w+} \cap \mathbb{C}_{w-} = \varnothing$. Поэтому либо $\mathbb{C}_{w+} = \mathbb{C}$, либо $\mathbb{C}_{w-} = \mathbb{C}$. В первом случае функция w аналитична в $\mathbb{C}$, $|a(z_0)| = |w'_z(z_0)| \leqslant 1$, поэтому $w'_z(z) \equiv a$, $w(z) = az + a_1$, $T_{w,n} = a^n T_0$. Во втором случае функция $\bar{w}$ аналитична в $\mathbb{C}$, $|b(z_0)| = |\overline{w}'_z| \leqslant 1$, поэтому $\overline{w}(z) = \bar{b}z + \bar{b}_1$, $w(z) = b\bar{z} + b_1$, $T_{w,n} = b^n T_n$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции.* Наука, М. (1959).
2. Н. А. Широков, *Оценки в L^p некоторых сингулярных интегральных операторов.* — Известия АН Арм. ССР, **15**, No. 1 (1980), 63–76.
3. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции* II, Наука, М. (1974).

Shirokov N. A. A series of operators in $L^2(\mathbb{C})$ proportional to unitary ones.

We prove that singular integral operators in $L^2(\mathbb{C})$ defined by the formula $Tf(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{(w(z)-w(\xi))^n}{(z-\xi)^{n+2}} f(\xi)dm_2(\xi)$, where $|w(z) - w(\xi)| \leqslant c|z - \xi|$, $z, \xi \in \mathbb{C}$, are proportional to unitary ones if and only if $w(z) = az$ or $w(z) = b\overline{z}$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28,
198504 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 6 мая 2013 г.