Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

Д. В. Руцкий

О СВЯЗИ МЕЖДУ АК-УСТОЙЧИВОСТЬЮ И ВМО-РЕГУЛЯРНОСТЬЮ

Введение

В этой работе рассматриваются решётки измеримых функций X (общие сведения о решётках см., например, в [10]) на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающие свойством Фату, где (Ω, μ) – некоторое σ-конечное измеримое пространство, и также обладающие следующим свойством невырожденности $(*)$: для всякого $f \in X$, $f \neq 0$, найдётся такая мажоранта $g \geqslant |f|$, что $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ с некоторой константой[1] C, не зависящей от f, и $\log g(\cdot, \omega) \in \mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega \in \Omega$. Для таких решёток X естественно определяются пространства типа Харди

$$X_A = \{f \in X \mid f(\cdot, \omega) \in \mathrm{N}^+ \ \text{ п.в. } \ \omega \in \Omega\},$$

где N^+ – граничный класс Смирнова (подробнее об этом определении и некоторых элементарных свойствах пространств типа Харди можно узнать, например, в [9]). Пусть (X, Y) – совместимая пара квазибанаховых пространств и $E \subset X$, $F \subset Y$ – некоторые квазибанаховы пространства. Пара (E, F) называется K-замкнутой в паре (X, Y) с константой C, если для любых $a \in E + F$ и $f_0 \in X$, $g_0 \in Y$, таких, что $a = f_0 + g_0$, найдутся такие $f \in E$ и $g \in F$, что $a = f + g$, $\|f\|_E \leqslant C\|f_0\|_X$ и $\|g\|_F \leqslant C\|g_0\|_Y$. Это свойство представляет интерес, в частности, потому что оно влечёт формулу "хорошей" интерполяции $\mathcal{F}((E, F)) = \mathcal{F}((X, Y)) \cap (E + F)$ для функторов $\mathcal{F}$ вещественной интерполяции в категории квазибанаховых пространств. Пара (X, Y) квазибанаховых решёток на $\mathbb{T} \times \Omega$ называется АК-устойчивой, если пара (X_A, Y_A) K-замкнута в паре (X, Y). Решётка X называется BMO-регулярной, если для любого ненулевого элемента $f \in X$ найдётся мажоранта $u \geqslant |f|$, такая, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $\|\log u(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$

Ключевые слова: BMO-регулярность, АК-устойчивость, вещественная интерполяция, комплексная интерполяция.

[1] Легко видеть (см. также [4]), что при наличии этого свойства константу C в нем можно сделать любым числом, большим 1.

при почти всех $\omega \in \Omega$ для некоторых констант m и C, не зависящих от f. Пара (X, Y) называется BMO-регулярной, если для любых ненулевых $f \in X$ и $g \in Y$ найдутся мажоранты $u \geqslant |f|$ и $v \geqslant |g|$, такие, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$, $\|v\|_Y \leqslant m\|g\|_Y$ и $\left\|\log \frac{u(\cdot,\omega)}{v(\cdot,\omega)}\right\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$ с некоторыми константами C и m, не зависящими от f и g. В [5] было отмечено, что BMO-регулярность влечёт AK-устойчивость, и был поставлен вопрос о соотношении этих свойств. Известно довольно большое количество примеров пар решёток, для которых эти свойства эквивалентны (см. [5, 9, 12, 13]), включая случай пар весовых пространств Лебега $\mathrm{L}_p(w)$. В настоящей работе мы получим следующие довольно общие результаты.

Теорема 1. *Пусть (X, Y) – пара банаховых решёток измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающих свойством Фату, свойством $(*)$ и таких, что решётка XY' банахова. Пара (X, Y)* AK*-устойчива тогда и только тогда, когда пара (X, Y)* BMO*-регулярна.*

Теорема 2. *Пусть (X, Y) – пара банаховых решёток измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающих свойством Фату, свойством $(*)$ и таких, что решётки X^2 и Y^2 банаховы. Пара (X, Y)* AK*-устойчива тогда и только тогда, когда пара (X, Y)* BMO*-регулярна.*

Теорема 3. *Пусть X – банахова решётка измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающая свойством Фату и свойством $(*)$, и пусть $p \in \{1, 2, \infty\}$. Пара (X, L_p)* AK*-устойчива тогда и только тогда, когда решётка X* BMO*-регулярна.*

Вероятно, утверждение об эквивалентности в действительности верно в самой общей ситуации пары квазинормированных решёток со свойством Фату. Рассматривая пространства Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с постоянным или переменным показателем $p(\cdot)$, легко привести примеры таких пар решёток (X_j, Y_j), к которым из этих теорем применима лишь теорема с номером $j \in \{1, 2, 3\}$.

Пара квазинормированных решёток (X, Y) измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ называется ограниченно AK-устойчивой с константой c, если для любых функций $f \in X$ и $g \in Y$ существует такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m \times \mu)$, что $\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c$ и $\|gU\|_X \leqslant c\|f\|_X$, $\|f(1-U)\|_Y \leqslant c\|g\|_Y$. Легко видеть, что свойство ограниченной AK-устойчивости не слабее свойства AK-устойчивости, но пока неясно, насколько эти свойства различаются. BMO-регулярность пары (X, Y)

влечёт её ограниченную АК-устойчивость; более подробно см. [12, §1.3].

Теорема 4. *Пусть (X,Y) – пара банаховых решёток измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающих свойством Фату и свойством $(*)$. Пара (X,Y) ограниченно* АК-*устойчива в том и только в том случае, когда пара (X,Y)* ВМО-*регулярна.*

Доказательство теорем 1–4 приводится далее в разделе 3.

§1. Применение комплексной интерполяции

В настоящей работе через $(X,Y)_{\theta,p}$ и $(X,Y)_\theta$ обозначаются, соответственно, вещественные и комплексные интерполяционные пространства между пространствами X и Y с соответствующими параметрами; подробнее см., например, в [1]. Ключевым моментом в доказательстве необходимости ВМО-регулярности в теореме 1 является следующее замечательное свойство комплексной интерполяции подпространств (отметим, что в работе [4] оно формулируется и доказывается для гораздо более общего случая).

Теорема 5 ([4, теорема 3.3])**.** *Пусть X_0 и X_1 – банаховы пространства, $Y_j, Z_j \subset X_j$, $j\in\{0,1\}$ – некоторые их подпространства, и для некоторого значения $0<\theta<1$ имеют место непрерывные вложения $(X_0,X_1)_\theta\cap(Y_0+Y_1)\subset(Y_0,Y_1)_\theta$, $(X_0,X_1)_\theta\cap(Z_0+Z_1)\subset(Z_0,Z_1)_\theta$, и*

$$(X_0,X_1)_\eta=(Y_0,Y_1)_\eta\oplus(Z_0,Z_1)_\eta \tag{1}$$

при значении $\eta=\theta$. Тогда соотношение (1) *также справедливо для всех $\theta-\delta<\eta<\theta+\delta$ при некотором $\delta>0$.*

Для подходящих решёток X кроме пространства X_A можно также определить "дополнение" $\overline{zX_A}=X\cap\overline{z\mathrm{N}^+}$, где $\overline{z\mathrm{N}^+}=\left\{\overline{zf}\mid f\in\mathrm{N}^+\right\}$. Для удобства приведём формулировку теоремы 5 для случая пространств типа Харди.

Следствие 6. *Пусть X и Y – банаховы решётки измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$, и для некоторого $0<\theta<1$ справедливы* (*эквивалентные*) *соотношения $[(X,Y)_\theta]_A=(X_A,Y_A)_\theta$ и $\overline{z\,[(X,Y)_\theta]_A}=\left(\overline{zX_A},\overline{zY_A}\right)_\theta$, а также формула*

$$(X,Y)_\eta=(X_A,Y_A)_\eta\oplus\left(\overline{zX_A},\overline{zY_A}\right)_\eta \tag{2}$$

при значении $\eta=\theta$. Тогда формула (2) *также справедлива для всех $\theta-\delta<\eta<\theta+\delta$ при некотором $\delta>0$.*

По поводу следующего утверждения см. [4, §5, лемма 5.3].

Предложение 7. *Пусть банахова решётка X на $\mathbb{T}\times\Omega$ обладает свойством $(*)$ и порядково непрерывной нормой. Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. $X = X_A \oplus \overline{zX_A}$.
2. *Проектор Рисса $\mathbb{P}$ действует и ограничен в решётке X.*

Изначально проектор Рисса задан на L_2, так что для доказательства нужно, в частности, объяснить, как понимать его на X. В силу порядковой непрерывности решётки X множество $X\cap\mathrm{L}_2$ плотно в X. Пусть $f\in X\cap\mathrm{L}_2$ и $\|f\|_X = 1$; достаточно проверить, что $\mathbb{P}f_1\in X_A$ с подходящей оценкой нормы для некоторого $f_1\in X$, такого, что $\|f-f_1\|_X\leqslant\frac12$. Соотношение в условии 1 означает, что $f = g+h$ с некоторыми $g\in X_A$ и $h\in\overline{zX_A}$, такими, что $\|g\|_X+\|h\|_X\leqslant c$ с некоторой константой c, не зависящей от f. Пусть u и v – соответствующие мажоранты для g и h из условия $(*)$. Образуем внешние функции $U = \exp(\log u + iH\log u)$, $V = \exp(\log v + iH\log v)$, $U_n = \exp(\log(u\wedge n) + iH\log(u\wedge n))$ и $V_n = \exp(\log(v\wedge n) + iH\log(v\wedge n))$, где H – преобразование Гильберта, и пусть $g_n = g\frac{U_n}{U}$, $h_n = h\overline{\frac{V_n}{V}}$. Тогда $g_n\to g$ и $h_n\to h$ по мере, причём $|g_n|\leqslant|g|\wedge n$ и $|h_n|\leqslant|h|\wedge n$ почти всюду. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $g_n\to g$ и $h_n\to h$ почти всюду, и в силу порядковой непрерывности нормы эта сходимость имеет место также и по норме пространства X. Следовательно, $\|g_n-g\|_X+\|h_n-h\|_X\leqslant\frac12$ для достаточно больших значений n. Положим $f_1 = f+(g_n-g)+(h_n-h) = g_n+h_n$; тогда $\|f-f_1\|_X\leqslant\frac12$. С помощью подходящей замены меры μ можно сделать так, что $\mu(\Omega)=1$; тогда $g_n\in\mathrm{L}_2$ и $h_n\in\mathrm{L}_2$. Поэтому $\mathbb{P}f_1 = \mathbb{P}g_n+\mathbb{P}h_n = g_n\in X_A$ и $\|\mathbb{P}f_1\|_X\leqslant c$. Переход $1\Rightarrow 2$ доказан. Переход $2\Rightarrow 1$ тривиален.

По поводу следующего утверждения см. [4, 5, 9]; наиболее общий результат такого рода был получен в [14].

Теорема 8 ([9, теорема 3]; [11]). *Пусть X – решётка измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающая свойством Фату. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Решётка X* BMO*-регулярна.*
2. *Проектор Рисса $\mathbb{P}$ действует ограниченно в решётке $\mathrm{L}_2^{1-\alpha}X^\alpha$ при некотором (эквивалентно, при всех достаточно малых) $0<\alpha<1$.*

3. *Решётка* X' ВМО-*регулярна.*

Предложение 9. *Пусть* X *и* Y *– квазибанаховы решётки измеримых функций на* $\mathbb{T}\times\Omega$, *обладающие свойством* $(*)$. *Тогда решётка* $(X,Y)_{\theta,q}$ *также обладает свойством* $(*)$ *при всех* $0<\theta<1$ *и* $0<q\leqslant\infty$.

Действительно, пусть $a\in(X,Y)_{\theta,q}$ и $a\neq 0$; нужно найти подходящую мажоранту b для a. Можно считать, что $a\geqslant 0$ почти всюду. Найдётся некоторое разложение $a=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}u_j$, $u_j\in X\cap Y$, такое что $\left\|\{2^{-j\theta}\|u_j\|_X\vee 2^{j(1-\theta)}\|u_j\|_Y\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^q}\leqslant c\|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}}$ с некоторой константой c, не зависящей от a. Можно считать также, что $u_j\geqslant 0$ почти всюду при всех $j\in\mathbb{Z}$. Найдётся такой индекс j, что $u_j\neq 0$ в $X\cap Y$. Легко видеть, что решётка $X\cap Y$ также обладает свойством $(*)$ с некоторой констводной C. Поэтому найдётся такая мажоранта $v\geqslant u_j$, что $\|v\|_X\leqslant C\|u_j\|_X$, $\|v\|_Y\leqslant C\|u_j\|_Y$, и $\log v(\cdot,\omega)\in\mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega\in\Omega$. Пусть $b=a+(v-u_j)$. Легко видеть, что $b\geqslant a$ и $\|b\|_{(X,Y)_{\theta,q}}\leqslant C\|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}}$, причём $-\log(b\wedge 1)(\cdot,\omega)\leqslant-\log(v\wedge 1)(\cdot,\omega)\in\mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega\in\Omega$. С другой стороны, решётка $X+Y$ также обладает свойством $(*)$. Выбрав соответствующую мажоранту w для $b\in X+Y$ в $X+Y$, получаем оценку $\log(b\vee 1)(\cdot,\omega)\leqslant\log(w\vee 1)(\cdot,\omega)\in\mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega\in\Omega$. Таким образом, $\log b(\cdot,\omega)\in\mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega\in\Omega$, что и требовалось доказать.

Чтобы применить следствие 6, мы воспользуемся следующей хорошо известной связью между вещественным и комплексным методами интерполяции (см. также [2]).

Теорема 10 ([1, теорема 4.7.2]). *Пусть* X *и* Y *– банаховы пространства,* $1\leqslant p_0,p_1\leqslant\infty$, $0<\theta_0<\theta_1<1$, $0<\eta<1$, $\theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1$ *и* $\frac{1}{p}=(1-\eta)\frac{1}{p_0}+\eta\frac{1}{p_1}$. *Тогда*

$$\left((X,Y)_{\theta_0,p_0},(X,Y)_{\theta_1,p_1}\right)_\eta=(X,Y)_{\theta,p}$$

и

$$\left((X,Y)_{\theta_0},(X,Y)_{\theta_1}\right)_{\eta,p}=(X,Y)_{\theta,p}. \tag{3}$$

Следующее утверждение хорошо известно и имеет много интересных обобщений; см., например, [3].

Предложение 11. *Пусть* Z *– банахова решётка измеримых функций на некотором* σ*-конечном измеримом пространстве, обладающая* *свойством Фату и такая, что решётки Z и Z' имеют порядково непрерывную норму. Тогда справедливо соотношение*

$$(Z, Z')_{\frac{1}{2},2} = \mathrm{L}_2 = (Z, Z')_{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Действительно, обозначим $Y = (Z, Z')_{\frac{1}{2},2}$. Легко проверить, что решётка Y обладает свойством Фату и порядково непрерывной нормой. По двойственности и симметрии для вещественной интерполяции

$$\begin{aligned} Y' = Y^* = (Z, Z')^*_{\frac{1}{2},2} = (Z^*, Z'^*)_{\frac{1}{2},2} = (Z', Z'')_{\frac{1}{2},2} \\ = (Z', Z)_{\frac{1}{2},2} = (Z, Z')_{\frac{1}{2},2} = Y. \end{aligned}$$

Следовательно, $Y^2 = YY' = \mathrm{L}_1$ и $Y = \mathrm{L}_2$. Второе соотношение в (4) получается аналогично; также оно вытекает из представления

$$(Z, Z')_{\frac{1}{2}} = Z^{\frac{1}{2}} Z'^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}_1^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}_2$$

(см., например, [7, глава 4, теорема 1.14]).

Теперь мы можем сформулировать и доказать основное утверждение этого раздела.

Предложение 12. *Пусть Z – банахова решётка измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающая свойством Фату и свойством $(*)$, и пусть решётки Z и Z' имеют порядково непрерывную норму. Предположим, что имеет место формула хорошей интерполяции*

$$[(Z, Z')_{\theta,2}]_A = (Z_A, Z'_A)_{\theta,2}$$

при всех значениях θ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$. Тогда проектор Рисса $\mathbb{P}$ действует и ограничен в решётке $(Z, Z')_{\theta,2}$ при всех значениях θ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$.

Обозначим $Z_\zeta = (Z, Z')_{\zeta,2}$, $X_\zeta = (Z_A, Z'_A)_{\zeta,2}$ и $Y_\zeta = \left(\overline{zZ_A}, \overline{zZ'_A}\right)_{\zeta,2}$ для $0 \leqslant \zeta < 1$. Легко видеть, что решётка Z_ζ обладает свойством Фату. По [9, лемма 2] решётка Z' обладает свойством $(*)$, и по предложению 9 решётка Z_ζ также обладает свойством $(*)$ при всех $0 < \zeta < 1$. По условию $X_\zeta = [Z_\zeta]_A$ при всех значениях ζ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$, и, в частности, $X_{\frac{1}{2}} = \mathrm{H}_2$. Из этого соотношения умножением на z и комплексным сопряжением также получается, что $Y_\zeta = \overline{z\,[Z_\zeta]_A}$ при всех ζ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$, и, в частности, $Y_{\frac{1}{2}} = \overline{z\mathrm{H}_2}$. Нам нужно проверить ограниченность проектора Рисса $\mathbb{P}$ в решётке Z_ζ для всех значений ζ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$. По теореме 10 справедливы соотношения

$$X_{\frac{1}{2}} = (X_\zeta, X_{1-\zeta})_{\frac{1}{2}} = \left([Z_\zeta]_A, [Z_{1-\zeta}]_A\right)_{\frac{1}{2}},$$
$$Y_{\frac{1}{2}} = (Y_\zeta, Y_{1-\zeta})_{\frac{1}{2}} = \left(\overline{z\,[Z_\zeta]_A}, \overline{z\,[Z_{1-\zeta}]_A}\right)_{\frac{1}{2}}$$

и

$$\begin{aligned}(Z_\zeta, Z_{1-\zeta})_{\frac{1}{2}} &= Z_{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}_2 = \mathrm{H}_2 \oplus \overline{z\mathrm{H}_2} = X_{\frac{1}{2}} \oplus Y_{\frac{1}{2}} \\ &= \left([Z_\zeta]_A, [Z_{1-\zeta}]_A\right)_{\frac{1}{2}} \oplus \left(\overline{z\,[Z_\zeta]_A}, \overline{z\,[Z_{1-\zeta}]_A}\right)_{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

при всех величинах ζ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$. Таким образом, мы проверили, что для пары $(Z_\zeta, Z_{1-\zeta})$ выполнены условия следствия 6 при всех ζ, достаточно близких к $\frac{1}{2}$, и поэтому

$$(Z_\zeta, Z_{1-\zeta})_\alpha = \left([Z_\zeta]_A, [Z_{1-\zeta}]_A\right)_\alpha \oplus \left(\overline{z\,[Z_\zeta]_A}, \overline{z\,[Z_{1-\zeta}]_A}\right)_\alpha$$

при всех величинах α, достаточно близких к $\frac{1}{2}$. Таким образом, по предложению 7 проектор $\mathbb{P}$ действует ограниченно в решётке

$$(Z_\zeta, Z_{1-\zeta})_\alpha = Z_\theta,$$

где число $\theta = (1-\alpha)\zeta + \alpha(1-\zeta)$ пробегает некоторую окрестность $\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

Следствие 13. *Пусть банахова решётка Z измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$ обладает свойством Фату, свойством $(*)$, и решётки Z и Z' имеют порядково непрерывную норму. Предположим, что пара (Z, Z')* АК-*устойчива. Тогда проектор Рисса действует ограниченно в решётке* $(\mathrm{L}_2, Z)_{\zeta,2}$ *при всех достаточно малых значениях* $0 < \zeta < 1$.

Для проверки следствия 13 достаточно заметить, что по формуле реитерации и предложению 11

$$(\mathrm{L}_2, Z)_{\zeta,2} = \left((Z, Z')_{\frac{1}{2},2}, Z\right)_{\zeta,2} = (Z, Z')_{\frac{1}{2}(1-\zeta)+\zeta,2} = (Z, Z')_{\frac{1}{2}(1+\zeta),2}.$$

§2. “Деление” для вещественной интерполяции

Следствие 13 показывает, что в его условиях проектор Рисса действует ограниченно в решётке $(\mathrm{L}_2, Z)_{\zeta,2}$ при некотором $0 < \zeta < 1$. В этом разделе мы покажем, как из этого условия можно получить ВМО-регулярность решётки Z.

Предложение 14. *Пусть X и Y – квазибанаховы решётки измеримых функций на некотором σ-конечном измеримом пространстве. Тогда $(X,Y)^{\alpha}_{\theta,p} = (X^{\alpha}, Y^{\alpha})_{\theta,\frac{p}{\alpha}}$ для любых $\alpha > 0$, $0 < \theta < 1$ и $0 < p \leqslant \infty$.*

Действительно, достаточно проверить, что для любой неотрицательной функции $f \in (X,Y)^{\alpha}_{\theta,p}$ с нормой 1 мы также имеем $f \in (X^{\alpha}, Y^{\alpha})_{\theta,\frac{p}{\alpha}}$ с подходящей оценкой нормы; обратное включение получится из этого включения, если заменить α на $\frac{1}{\alpha}$, X на X^{α} и Y на Y^{α}. По предположению $f^{1/\alpha} \in (X,Y)_{\theta,p}$ с нормой 1, и найдутся некоторые разложения $f^{\frac{1}{\alpha}} = g_j + h_j$, такие, что последовательность

$$\left\{2^{-\theta j}\|g_j\|_X + 2^{(1-\theta)j}\|h_j\|_Y\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$$

лежит в l^p с нормой не более 1. Разумеется, можно считать, что функции g_j и h_j неотрицательны. Заменяя функции g_j и h_j на функции $\tilde{g}_j = f\chi_{\{g_j > h_j\}}$ и $\tilde{h}_j = f\chi_{\{h_j \geqslant g_j\}}$, мы получаем новые разложения $f^{\frac{1}{\alpha}} = \tilde{g}_j + \tilde{h}_j$, причём, как легко видеть, последовательность $M = \left\{2^{-\theta j}\|\tilde{g}_j\|_X + 2^{(1-\theta)j}\|\tilde{h}_j\|_Y\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ лежит в l^p с нормой не более 2. Остаётся заметить лишь, что $f = \tilde{g}^{\alpha}_j + \tilde{h}^{\alpha}_j$, и норма последовательности

$$\begin{aligned}&\left\{2^{-\theta j}\|\tilde{g}^{\alpha}_j\|_{X^{\alpha}} + 2^{(1-\theta)j}\|\tilde{h}^{\alpha}_j\|_{Y^{\alpha}}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\\ &\quad= \left\{(\lambda^{-\theta j}\|\tilde{g}_j\|_X)^{\alpha} + (\lambda^{(1-\theta)j}\|\tilde{h}_j\|_Y)^{\alpha}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

в $l^{\frac{p}{\alpha}}$ при $\lambda = 2^{1/\alpha}$ оценивается подходящим образом через норму последовательности M в l^p.

Предложение 15. *Пусть Z – банахова решётка на $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающая свойством Фату, и проектор Рисса действует ограниченно в решётке $\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\alpha,2}$ при некотором $0 < \alpha < 1$. Тогда решётка $(\mathrm{L}_\infty, Z')_{\theta,\infty}$ BMO-регулярна равномерно по*[2] *$\frac{1}{2} < \theta < 1$.*

Действительно, пусть $\delta = \frac{\alpha}{2}$. Из теоремы реитерации легко получить, что проектор Рисса ограничен в решётке $\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\zeta,2}$ равномерно по $\frac{1}{2}\delta \leqslant \zeta \leqslant \delta$, а значит, эта решётка равномерно BMO-регулярна

[2] Также легко проверить, что эта решётка равномерно BMO-регулярна при всех $0 < \theta < 1$, однако нам нужны лишь близкие к 1 значения θ.

при указанных значениях ζ. Анализируя доказательство соотношения (3) теоремы 10, нетрудно видеть, что в нём допустимо взять значение $\theta_0 = 0$, и оценка константы эквивалентности норм в (3) не зависит от значения η. Таким образом, соотношение

$$\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\zeta,2} = \left(\mathrm{L}_2, \left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\delta}\right)_{\theta,2} = \left(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_2^{1-\delta} Z^{\frac{\delta}{2}}\right)_{\theta,2}$$

справедливо равномерно по θ при всех $\zeta = \delta\theta$ и $0 < \theta < 1$, откуда следует, что решётка $\left(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_2^{1-\delta} Z^{\frac{\delta}{2}}\right)_{\theta,2}$ BMO-регулярна равномерно по $\frac{1}{2} < \theta < 1$. Используя предложение 14, получаем, что тем же свойством обладает и решётка $\left(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_2^{1-\delta} Z^{\frac{\delta}{2}}\right)^2_{\theta,2} = \left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_1^{1-\delta} Z^{\delta}\right)_{\theta,1}$, откуда следует, что решётка

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_1^{1-\delta} Z^{\delta}\right)'_{\theta,1} &= \left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_1^{1-\delta} Z^{\delta}\right)^*_{\theta,1} = \left(\mathrm{L}_1^*, (\mathrm{L}_1^{1-\delta} Z^{\delta})^*\right)_{\theta,\infty} \\ &= \left(\mathrm{L}_1', (\mathrm{L}_1^{1-\delta} Z^{\delta})'\right)_{\theta,\infty} = \left(\mathrm{L}_\infty, Z'^{\delta}\right)_{\theta,\infty}\end{aligned}$$

BMO-регулярна равномерно по $\frac{1}{2} < \theta < 1$. Применяя ещё раз предложение 14, получаем требуемое утверждение.

Решётка X называется A_2-регулярной с константами C и m, если для любого ненулевого элемента $f \in X$ найдётся мажоранта $u \geqslant |f|$, такая, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $u(\cdot,\omega) \in \mathrm{A}_2$ с константой C при почти всех $\omega \in \Omega$ для некоторых констант m и C, не зависящих от f, где A_2 – веса Макенхаупта. Известно (см., например, [8, глава 5, §6.2]), что условие $\log w \in \mathrm{BMO}$ с константой C влечёт $w^{\delta} \in \mathrm{A}_2$ с константой C_1 для некоторых чисел $\delta > 0$ и C_1, зависящих только от величины C; обратно, условие $w \in \mathrm{A}_2$ влечёт $\log w \in \mathrm{BMO}$ с соответствующими оценками констант. Отсюда следует, что если решётка X BMO-регулярна, то решётка X^{δ} A_2-регулярна при некотором $\delta > 0$, а всякая A_2-регулярная решётка также является и BMO-регулярной; подробнее см. [14].

Предложение 16. *Пусть X – банахова решётка на $\mathbb{T} \times \Omega$, обладающая свойством Фату, и такая, что решётка $(\mathrm{L}_\infty, X)_{\theta,\infty}$ A_2-регулярна равномерно по $\frac{1}{2} < \theta < 1$. Тогда решётка X также A_2-регулярна.*

Действительно, пусть $f \in X$ с нормой 1; требуется найти подходящую мажоранту для f в X. Можно считать, что $f \geqslant 0$ почти всюду. Пусть соответствующие константы A_2-регулярности в условии не превосходят C. Определим множество

$$U = \left\{ w \mid \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|M\|_{\mathrm{L}_2\left(w^{-\frac{1}{2}}(\cdot,\omega)\right)} \leqslant C \right\}$$

соответствующих весов A_2, где M – максимальный оператор Харди–Литлвуда, действующий по первой переменной, а $\mathrm{L}_2\left(w^{-\frac{1}{2}}\right)$ обозначает[3] весовое пространство L_2 с нормой $\|h\|_{\mathrm{L}_2\left(w^{-\frac{1}{2}}\right)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\int |h|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}$. По [14, предложение 3.4] множество U выпукло и замкнуто по мере. Заметим, что $f^\theta \in \mathrm{L}_\infty^{1-\theta} X^\theta \subset (\mathrm{L}_\infty, X)_{\theta,\infty}$ с нормой 1 при всех $0 < \theta < 1$. По условию для всякого $\frac{1}{2} < \theta < 1$ найдётся такая функция $g_\theta \in (\mathrm{L}_\infty, X)_{\theta,\infty} \subset \mathrm{L}_\infty + X$, что $g_\theta \geqslant f^\theta$, $\|g_\theta\|_{(\mathrm{L}_\infty,X)_{\theta,\infty}} \leqslant c$ и $g_\theta \in U$, где константа c не зависит от f и θ. Обозначим $F = \{\varphi \in \mathrm{L}_\infty + X \mid \|\varphi\|_{\mathrm{L}_\infty+X} \leqslant c, \varphi \in U\}$; таким образом, $g_\theta \in F$ при всех $0 < \theta < 1$. Так как решётка X обладает свойством Фату, решётка $\mathrm{L}_\infty + X$ также обладает этим свойством, и поэтому множество F замкнуто по мере. Также оно выпукло и ограничено в пространстве $\mathrm{L}_\infty + X$. Пусть некоторая последовательность $0 < \theta_j < 1$ сходится к 1. Поскольку решётка $\mathrm{L}_\infty + X$ обладает свойством Фату, по [14, предложение 3.3] найдётся некоторая последовательность u_k выпуклых комбинаций функций $\{g_{\theta_j}\}_{j\geqslant k}$, такая, что u_k сходится почти всюду к некоторой функции $u \in F$. Пусть v_k – выпуклые комбинации функций f^{θ_j} с теми же коэффициентами, что и у u_k. Тогда $v_k \leqslant u_k$ почти всюду, и из поточечной сходимости f^{θ_j} к f следует, что v_k также поточечно сходится к f, а значит, $u \geqslant f$. Далее, поскольку $\|g_\theta\|_{(\mathrm{L}_\infty,X)_{\theta,\infty}} \leqslant c$, для всякого значения $s_j > 0$ найдутся некоторые разложения $g_{\theta_j} = a_j + b_j$, $a_j \in \mathrm{L}_\infty$, $b_j \in X$, такие, что $s_j^{-\theta_j}\|a_j\|_{\mathrm{L}_\infty} + s_j^{1-\theta_j}\|b_j\|_X \leqslant c$. Выбирая значение $s_j = 2^{\frac{\theta_j}{\theta_j-1}}$, получаем оценки $\|a_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2^{\frac{\theta_j}{\theta_j-1}} c$ и $\|b_j\|_X \leqslant 2^{\theta_j} c \leqslant 2c$. Переходя к соответствующим выпуклым комбинациям, получаем отсюда разложения $u_k = A_k + B_k$, $A_k \in \mathrm{L}_\infty$, $B_k \in X$, такие что $\|A_k\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2^{\frac{\theta_k}{\theta_k-1}} c$ и $\|B_k\|_X \leqslant 2c$. Отсюда заключаем, что $A_k \to 0$ почти всюду, и поэтому $B_k - u_k \to 0$ почти всюду, а значит, $B_k \to u$ почти всюду; следовательно, $u \in X$ и $\|u\|_X \leqslant 2c$. Таким образом, функция u является

[3] Напомним, что весовая решетка $X(a)$ – это решетка с нормой $\|f\|_{X(a)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|fa^{-1}\|_X$; подробнее см., например, [14].

подходящей A_2-мажорантой для f в X, что завершает доказательство предложения 16.

Объединяя предложение 15 с предложением 16, замечанием перед ним, и используя теорему 8, получаем следующее утверждение.

Предложение 17. *Пусть Z – банахова решётка на $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающая свойством Фату, и проектор Рисса действует ограниченно в решётке $\left(\mathrm{L}_2, Z^{\frac{1}{2}}\right)_{\zeta,2}$ при всех достаточно малых значениях $0<\zeta<1$. Тогда решётка Z BMO-регулярна.*

§3. Проверка основных результатов

Теперь мы можем собрать доказательство теорем 1–4. Как уже отмечалось, хорошо известно, что ограниченная АК-устойчивость следует из BMO-регулярности. Проверим сначала переход от АК-устойчивости к BMO-регулярности в теореме 2. Удобно заменить в её условии пару (X,Y) на пару $(X^{1/2},Y^{1/2})$ (легко видеть, что эти пары BMO-регулярны лишь одновременно). Итак, пусть X и Y – банаховы решётки на $\mathbb{T}\times\Omega$, обладающие свойством Фату и свойством $(*)$, и предположим, что пара $\left(X^{\frac{1}{2}},Y^{\frac{1}{2}}\right)$ АК-устойчива. Обозначим $Z=\mathrm{L}_2^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{4}}Y'^{\frac{1}{4}}$. По [6, лемма 4] пара

$$\begin{aligned}\left(X^{\frac{1}{2}}(X'Y')^{\frac{1}{4}},Y^{\frac{1}{2}}(X'Y')^{\frac{1}{4}}\right)&=\left(\left[X^{\frac{1}{4}}X'^{\frac{1}{4}}\right]X^{\frac{1}{4}}Y'^{\frac{1}{4}},\left[Y^{\frac{1}{4}}Y'^{\frac{1}{4}}\right]X'^{\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{4}}\right)\\&=\left(\mathrm{L}_1^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{4}}Y'^{\frac{1}{4}},\mathrm{L}_1^{\frac{1}{4}}X'^{\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{4}}\right)=\left(\mathrm{L}_2^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{4}}Y'^{\frac{1}{4}},\mathrm{L}_2^{\frac{1}{2}}X'^{\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{4}}\right)=(Z,Z')\end{aligned}$$

также АК-устойчива. Решётка Z банахова, и вместе с решёткой Z' обладает порядково непрерывной нормой. Следствие 13 показывает, что проектор Рисса ограниченно действует в решётке $(\mathrm{L}_2,Z)_{\zeta,2}$ при всех достаточно малых значениях $0<\zeta<1$. Тогда по предложению 17 решётка Z BMO-регулярна, откуда по свойству делимости BMO-регулярности (см., например, [14, теорема 1.5]) вытекает BMO-регулярность решётки $(XY')^{\frac{1}{4}}$, а значит (см., например, [14, теорема 5.8]), и BMO-регулярность пары (X,Y).

Проверим теперь переход от АК-устойчивости к BMO-регулярности в теореме 1. Если в её условиях пара (X,Y) АК-устойчива, то по [12, предложение 6] пара $(X\mathrm{L}_1,Y\mathrm{L}_1)$ ограниченно АК-устойчива (в том предложении используется банаховость решётки XY'), и по [12, предложение 1] пара

$$\left((X\mathrm{L}_1)^{\frac{1}{4}}, (Y\mathrm{L}_1)^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\left(X^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(Y^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

также ограниченно АК-устойчива. Из теоремы 2 получаем, что пара $\left(X^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}_1^{\frac{1}{2}}, Y^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}_1^{\frac{1}{2}}\right)$ BMO-регулярна, откуда по [14, теорема 5.8] вытекает BMO-регулярность пары (X, Y).

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 18 ([6, §15, следствие к лемме 4])**.** *Пусть банаховы решётки X, Y и F на $\mathbb{T} \times \Omega$ обладают свойством Фату и свойством* $(*)$, *и пусть задано число* $0 < \alpha < 1$. *Тогда пары* $\left(F^{1-\alpha}X^{\alpha}, F^{1-\alpha}Y^{\alpha}\right)$ *и* (X^{α}, Y^{α}) АК-*устойчивы лишь одновременно.*

Проверим теперь переход от АК-устойчивости к BMO-регулярности в теореме 3. Случай $p = \infty$ сводится к случаю $p = 1$, поскольку если пара (X, L_1) АК-устойчива, то по [9, лемма 7] пара $(X', \mathrm{L}'_\infty) = (X', \mathrm{L}_1)$ также АК-устойчива. В случае $p = 1$ решётка $X\mathrm{L}'_1 = X\mathrm{L}_\infty = X$ банахова, и поэтому АК-устойчивость пары (X, L_1) по теореме 1 влечёт её BMO-регулярность, откуда по [14, предложение 5.10] следует требуемая BMO-регулярность решётки X. Наконец, в случае $p = 2$ из АК-устойчивости пары $(X, \mathrm{L}_2) = \left(X^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}, X^{\frac{1}{2}}X'^{\frac{1}{2}}\right)$ по теореме 18 следует АК-устойчивость пары $\left(X^{\frac{1}{2}}, X'^{\frac{1}{2}}\right)$, что по теореме 2 даёт BMO-регулярность этой пары, откуда по [14, теорема 5.8] получается BMO-регулярность решётки $X^{\frac{1}{2}}\left(X'^{\frac{1}{2}}\right)' = X\mathrm{L}_2$, и решётка X BMO-регулярна по [14, теорема 1.5].

Переход от ограниченной АК-устойчивости к BMO-регулярности в теореме 4 немедленно вытекает из [12, предложение 1] и теоремы 2.

Литература

1. J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, 1976.
2. F. Cobos, J. Peetre, L. E. Persson, *On the connection between real and complex interpolation of quasi-Banach spaces.* — Bull. Sci. Math. **122** (1998), 17–37.
3. F. Cobos, T. Schonbek, *On a theorem by Lions and Peetre about interpolation between a Banach space and its dual.* — Houston J. Math. **24(2)** (1998), 325–344.
4. N. J. Kalton, *Complex interpolation of Hardy-type subspaces.* — Math. Nachr.**171** (1995), 227–258.

5. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
6. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159(2)** (2003), 277–289.
7. S. G. Krein, Ju. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Vol. 54 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1982.
8. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Univ. Press, 1993.
9. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и Анализ **14(2)** (2002), 117–135.
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* БХВ, Петербург, 2004.
11. Д. В. Руцкий, *Два замечания о связи BMO-регулярности и аналитической устойчивости интерполяции для решеток измеримых функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **366** (2009), 102–115.
12. Д. В. Руцкий, *Замечания о BMO-регулярности и AK-устойчивости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 116–165.
13. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решётках измеримых функций и интерполяция.* Диссертация С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 2011.
14. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решётках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алебра и Анализ **23(2)** (2011), 248–295.

Rutsky D. V. On the relationship between AK-stability and BMO-regularity.

Let (X, Y) be a couple of Banach lattices of measurable functions on $\mathbb{T} \times \Omega$ having the Fatou property and satisfying a certin condition $(*)$ that makes it possible to consistently introduce the Hardy-type subspaces of X and Y. We establish that the bounded AK-stability property and the BMO-regularity property are equivalent for such couples. If either lattice XY' is Banach, or both lattices X^2 and Y^2 are Banach, or $Y = \mathrm{L}_p$ with $p \in \{1, 2, \infty\}$, then the AK-stability property and the BMO-regularity property are also equivalent for such couples (X, Y).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, наб. р. Фонтанки, 27
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 24 июня 2013 г.