Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

А. С. Роткевич

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ КЛАССОВ БЕСОВА В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ В $\mathbb{C}^d$

Введение

В 1981 году Е. М. Дынькин [5] дал конструктивную характеристику аналитических классов Бесова на языке глобальных полиномиальных приближений для областей Радона в $\mathbb{C}$. В настоящей статье методы, предложенные в работе [5], обобщаются на многомерный случай.

Изучение характеристик функциональных пространств на языке аппроксимации – классическая задача, происшедшая из замечания Джексона (1911) о том, что так можно описывать гладкость. Одним из первых результатов в этой области является теорема Джексона–Бернштейна, характеризующая периодический класс Гёльдера $\Lambda^s[-\pi,\pi]$ при $0 < s < 1$ как класс функций, наилучшие приближения которых тригонометрическими многочленами степени n убывают с ростом n как n^{-s}. Касаясь результатов, известных в многомерном случае, отметим, что аналогичная характеристика была получена Н. А. Широковым в работе [20] для аналитических классов Гёльдера в строго псевдовыпуклых областях. Интересно, что предложенный нами результат также оказывается схожим с классической характеристикой периодических классов Бесова $\dot{B}^s_{pq}[-\pi,\pi]$.

Теорема 0.1. *Функция f на $[-\pi,\pi]$ принадлежит классу Бесова $\dot{B}^s_{p,q}[-\pi,\pi]$, $s>0$, $1\leqslant p$, $q\leqslant\infty$, тогда и только тогда, когда*

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^s E_n(f)_p\right)^q\right]^{1/q} < \infty, \tag{0.1}$$

где $E_n(f)_p = \inf\limits_{T_n}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ – наилучшее приближение функции f в $L^p[-\pi,\pi]$ тригонометрическими многочленами степени n.

Ключевые слова: пространство Бесова, интеграл Коши–Лере–Фантаппье, полиномиальные приближения.

Метод изучения классов Бесова основан на обобщении понятия псевдоаналитического продолжения, то есть продолжения функции f, заданной в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, до такой функции $\mathbf{f}$, определённой во всём пространстве $\mathbb{C}^d$, что невязка уравнений Коши–Римана $|\overline{\partial}\mathbf{f}| = \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{z}_1}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{z}_d}\right|$ убывает контролируемым образом при приближении к границе области Ω. Скорость этого убывания однозначно характеризует гладкость исходной функции и, например, так же, как и в одномерном случае, функция $f \in H^p(\Omega)$ лежит в аналитическом классе Бесова $A_p^s(\Omega)$ тогда и только тогда, когда возможно её продолжение с оценкой

$$\int\limits_{\mathbb{C}^d \setminus \Omega} |\overline{\partial}\mathbf{f}(z)|^p \rho(z)^{-p(s-1)-1}\, d\mu(z) < \infty, \tag{0.2}$$

где ρ – функция, определяющая область Ω, μ – мера Лебега в $\mathbb{C}^d$.

Основная идея состоит в том, что к оценкам вида (0.2) приводят совершенно различные конструкции псевдоаналитического продолжения. В настоящей работе приводятся две конструкции продолжения, основанные на локальных и глобальных полиномиальных приближениях. Таким образом удаётся связать модуль гладкости функции с её глобальными приближениями, что приводит к утверждению, аналогичному теореме 0.1.

Статья разбита на семь разделов. В §1 приводятся основные обозначения, предварительные определения и свойства классов изучаемых функций. §2 посвящен изучению свойств формулы Коши–Лере–Фантаппье, являющейся аналогом формулы Коши. Оценки ядра этой формулы, приведённые в этом разделе, получены, в основном, в работе [7] для более общего класса областей, но часть оценок оказывается верна только при условии строгой выпуклости рассматриваемой области. Как уже сказано выше, гладкость функций мы будем изучать с помощью локальных приближений, но классическое определение пространств Бесова основано на понятии модуля гладкости, определяемого посредством оператора взятия разности. В §3 мы изучаем связь классического определения с полиномиальным модулем гладкости, определяемым с помощью локальных приближений. Заметим, что результаты этого раздела верны для произвольной гладкой области в $\mathbb{R}^l$. В §4 построен оператор, дающий "почти наилучшее" приближение функции многочленами степени не большей некоторого параметра

$m \geqslant 0$. В §5 приводятся две конструкции псевдоаналитического продолжения – с помощью локальных и глобальных полиномиальных приближений. В §6 первая конструкция используется для описания классов Бесова в терминах псевдоаналитического продолжения. А именно, доказывается, что аналитические классы Бесова $A^s_{pq}(\Omega)$ описываются как классы функций, допускающие продолжение с оценкой

$$\int_0^\infty \left(\int_{\partial\Omega_r} |\overline{\partial} F(z)|^p \, d\sigma_r(z) \right)^{q/p} r^{-q(s-1)-1} \, dr < \infty, \tag{0.3}$$

где $\partial\Omega_r = \{z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega : \rho(z) = r\}$, σ_r – поверхностная мера Лебега на $\partial\Omega_r$ и ρ – функция, определяющая область Ω.

В §7 изучается конструктивная характеристика аналитических классов Бесова, в частности, доказано, что класс $A^s_{pq}(\Omega)$ характеризуется следующим условием на наилучшие полиномиальные приближения:

$$\left[\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left(n^s E_n(f)_p \right)^q \right]^{1/q} < \infty, \tag{0.4}$$

где $E_n(f)_p = \inf\limits_{T_n} \left(\int\limits_{\partial\Omega} |f(z) - T_n(z)|^p \, d\sigma(z) \right)^{1/p}$ – наилучшее приближение функции f в $L^p(\partial\Omega)$ многочленами степени n по каждой переменной, σ – поверхностная мера Лебега на $\partial\Omega$.

В §8 приводится ещё один пример удачного применения метода псевдоаналитического продолжения и доказывается непрерывность оператора Коши–Лере–Фантаппье в пространствах Бесова $B^s_p(\partial\Omega)$, когда $1 < p < \infty$ и $0 < s < 1$.

§1. Основные определения

1.1. Основные обозначения. Пусть $\mathbb{C}^d$ – пространство d комплексных переменных, $d \geqslant 2$, $z = (z_1, \dots, z_d)$, $z_j = x_j + iy_j$;

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right),$$

$$\partial f = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial z_k} \, dz_k, \quad \overline{\partial} f = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} \, d\overline{z}_k, \quad df = \partial f + \overline{\partial} f.$$

В пространстве $\mathbb{C}^d$ введём внутреннее произведение $\langle z,\, w\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} z_k w_k$, соответственно $|z| = \sqrt{\langle z,\, \overline{z}\rangle}$. Аналогично будем обозначать действие дифференциальных форм ∂f и $\overline{\partial} f$ на вектор $w \in \mathbb{C}^d$:

$$\langle \partial f,\, w\rangle = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial z_k} w_k, \quad \langle \overline{\partial} f,\, w\rangle = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} \overline{w}_k.$$

Учитывая это, мы также будем часто отождествлять форму ∂f с соответствующим вектором $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_d}\right)$. Отметим, что если функция ρ вещественнозначна, то $\frac{\partial \rho}{\partial z_k} = \overline{\frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_k}}$.

Обозначим расстояние от точки $z \in \mathbb{C}^d$ до множества $D \subset \mathbb{C}^d$ через $\operatorname{dist}(z,\ D) = \inf\{|z - w| : w \in D\}$.

Для краткой записи неравенств введём символы $\lesssim$, $\asymp$, и будем говорить, что $f \lesssim g$, если $f \leqslant cg$ для некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от основных аргументов величин f и g. Также, $f \asymp g$, если $c^{-1} g \leqslant f \leqslant cg$ для некоторой постоянной $c > 1$.

Через μ_l будем обозначать l-мерную меру Лебега.

1.2. Класс рассматриваемых областей. Пусть

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}^d : \rho(z) < 0\right\}$$

– строго выпуклая область, причём $\partial\rho \neq 0$ на $\partial\Omega$, где ρ – функция класса C^∞. Заметим, что можно считать, что $\rho(z) > 0$ вне области Ω и области вида $\Omega_r = \left\{z \in \mathbb{C}^d : \rho(z) < r\right\}$ также строго выпуклы при $0 \leqslant r \leqslant 2$ и $\partial\rho(z) \neq 0,\ z \in \Omega_2 \setminus \Omega$. Это означает, что второй дифференциал функции ρ порождает строго положительно определённую квадратичную форму на касательной плоскости:

$$d^2\rho(z)[z - w] \geqslant c|z - w|^2, \quad \operatorname{Re}\langle \partial\rho(z),\, z - w\rangle = 0, \quad z \in \Omega_2 \setminus \Omega, \quad (1.1)$$

для некоторой постоянной $c > 0$, где $d^2\rho$ – второй дифференциал функции ρ и, так как функция ρ вещественнозначна, то

$$d^2\rho(z)[v] = 2\operatorname{Re} \sum_{k,j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_k \partial z_j} v_k v_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_k \partial \overline{z}_j} v_k \overline{v}_j \right), \quad v \in \mathbb{C}^d.$$

Рассмотрим в точке $\xi \in \partial\Omega_r = \left\{\xi \in \mathbb{C}^d : \rho(\xi) = r\right\}$ *касательную гиперплоскость*

$$T_\xi^{\mathbb{R}} = \left\{z \in \mathbb{C}^d : \operatorname{Re}\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle = 0\right\}.$$

Это $(2d-1)$-мерное вещественное аффинное подпространство в $\mathbb{C}^d$ содержит единственное комплексное аффинное подпространство T_ξ размерности $d-1$, которое называют *комплексной касательной гиперплоскостью*, и в наших обозначениях

$$T_\xi = \left\{z \in \mathbb{C}^d : \langle \partial\rho(\xi), \xi - z\rangle = 0\right\}.$$

Обозначим проекцию точки $z \in \mathbb{C}^d$ на касательную гиперплоскость $T_\xi^{\mathbb{R}}$ через $\mathrm{pr}_\xi(z) \in T_\xi^{\mathbb{R}}$, а проекцию на комплексную касательную гиперплоскость обозначим через $\pi_\xi(z) \in T_\xi$.

1.3. Пространства Харди и Бесова. Основным объектом дальнейшего изучения являются классы Бесова и их аналитические аналоги в выпуклых областях. Для определения этих пространств необходимо ввести понятие интегрального модуля гладкости и связанные с ним операторы взятия разности. Отметим, что данное в этом параграфе определение оказывается неудобным в применении к изучению полиномиальных приближений, и в §3 мы даём эквивалентное определение класса Бесова на языке наилучших локальных полиномиальных приближений.

Итак, пространства $L^p(\partial\Omega_r) = L^p(\partial\Omega_r, d\sigma_r)$ вводятся относительно меры Лебега $d\sigma_r$ на поверхности $\partial\Omega_r$. Пространство аналитических в области Ω функций обозначим через $H(\Omega)$, а пространство Харди определим следующим образом:

$$H^p(\Omega) = \left\{f \in H(\Omega) : \|f\|_{H^p(\Omega)} = \sup_{r<0} \|f\|_{L^p(\partial\Omega_r)} < \infty\right\}.$$

Напомним, что функция $f \in H^p(\Omega)$ почти всюду имеет некасательные граничные значения, продолжив функцию на границу, получаем $\|f\|_{H^p(\Omega)} \asymp \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$.

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^l)$, $k \in \mathbb{N}$ и $t > 0$, определим оператор взятия k-й разности по координате $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$:

$$\Delta^1_{j,t} f(x) = f(x + te_j) - f(x), \quad \Delta^k_{j,t} f(x) = \Delta^1_{j,t}(\Delta^{k-1}_{j,t} f)(x). \tag{1.2}$$

Пусть теперь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ – мультииндекс и $h \in \mathbb{R}^l$, положим

$$\Delta^\alpha_h f(x) = \Delta^{\alpha_1}_{1,h_1} \circ \ldots \circ \Delta^{\alpha_l}_{l,h_l} f(x). \tag{1.3}$$

Соответственно определим интегральный α-модуль гладкости:

$$\omega^\alpha(f,h)_p = \|\Delta_h^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^l)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^l} |\Delta_h^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{1.4}$$

В дальнейшем чаще всего $\alpha = (m,\ldots,m)$ и $h = (t,\ldots,t)$, в этом случае будем использовать более краткое обозначение:

$$\omega^m(f,t) = \omega^{(m,\ldots,m)}(f,(t,\ldots,t)).$$

Определение 1.1. *Пусть $0 < s < \infty$ и $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, тогда класс Бесова $B^s_{pq}(\mathbb{R}^l)$ состоит из всех таких функций, что при $1 \leqslant q < \infty$ верно неравенство*

$$c_{pq}(f) = \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega^\alpha(f,h)_p}{h^s} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{1.5}$$

а при $q = \infty$ – неравенство

$$c_{p\infty}(f) = \sup_{h>0} \frac{\omega^\alpha(f,h)_p}{h^s} < \infty, \tag{1.6}$$

где α – произвольный мультииндекс, удовлетворяющий условию $\alpha_i > s$, $i = 1,\ldots,l$. Определение не зависит от мультииндекса α и норма $\|f\|_{B^s_{pq}(\mathbb{R}^l)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^l)} + c_{pq}(f)$ вводит на $B^s_{pq}(\mathbb{R}^l)$ структуру банахова пространства. Пространство $B_{pp}(\mathbb{R}^l)$ будем сокращённо обозначать символом $B_p(\mathbb{R}^l)$.

Перенесём теперь определение класса Бесова на границу области Ω, для этого рассмотрим открытый атлас и связанное с ним разбиение единицы. Пусть $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^N K_j$ и заданы гладкие диффеоморфизмы $\psi_j : \overline{K}_j \to Q_1$, где $Q_1 = [0,1]^{2d-1}$, кроме того задано гладкое разбиение единицы $\sum\limits_{j=1}^N \chi_j(z) = 1$, $z \in \partial\Omega$, причём $\operatorname{supp} \chi_j \subset K_j$. Диффеоморфизм, обратный к ψ_j, обозначим через $\varphi_j = \psi_j^{-1}$.

Определение 1.2. *Пусть $0 < s < \infty$ и $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, тогда*

$$B^s_{pq}(\partial\Omega) = \left\{ f \in L^p(\partial\Omega) : (\chi_j f) \circ \psi_j^{-1} \in B^s_{pq}(\mathbb{R}^{2d-1}) \right\}$$

и это – банахово пространство по норме

$$\|f\|_{B^s_{pq}(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^{N} \|(\chi_j f) \circ \psi_j^{-1}\|_{B^s_{pq}(\mathbb{R}^{2d-1})}.$$

Отметим, что разные атласы и разбиения единицы порождают разные, но попарно эквивалентные нормы. Подробнее о пространствах Бесова и связанных с ними понятиях и методах можно узнать из монографии [22].

Основным же объектом нашего изучения будет аналитический класс Бесова $A^s_{pq}(\Omega)$, состоящий из всех аналитических функций с граничными значениями в классе $B^s_{pq}(\partial\Omega)$, причём норма в пространстве $A^s_{pq}(\Omega)$ задаётся соотношением $\|f\|_{A^s_{pq}(\Omega)} = \|f\|_{B^s_{pq}(\partial\Omega)}$. Соответственно, $A^s_p(\Omega) = A^s_{pp}(\Omega)$.

1.4. Неравенство Харди. Для доказательства некоторых оценок нам понадобится следующее неравенство Харди. Пусть функция $f(t)$ положительна на $(0,\infty)$, зададим функцию $F(x)$ в зависимости от значения параметра $r \neq 1$ следующим образом:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad r > 1;$$

$$F(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt, \quad r < 1.$$

Тогда при $1 \leqslant p < \infty$ выполнена оценка

$$\int_0^\infty x^{-r} F^p(x)\,dx < \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}(xf(x))^p\,dx. \tag{1.7}$$

Доказательство и подробное обсуждение данных неравенств можно найти в монографии [8].

§2. Формула Коши–Лере–Фантаппье и оценки её ядра

2.1. Предварительные замечания. В теории функций нескольких комплексных переменных аналог формулы Коши даёт известная теорема Лере ([1,15]). Напомним, что если область $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^d : \rho(z) < 0\}$

выпукла и функция ρ гладкая, то функцию $f \in H^1(\Omega)$ можно восстановить по граничным значениям с помощью формулы Коши–Лере–Фантаппье:

$$f(z) = K_d f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)\partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d}, \quad z \in \Omega. \tag{2.1}$$

Отметим, что согласно [7] оператор K_d непрерывно отображает пространство $L^p(\partial\Omega)$ на пространство $H^p(\Omega)$, т.е. $\|K_d f\|_{H^p(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$.

Основным инструментом в этой статье будет метод продолжения функции f вне области Ω. Пусть $f_0 \in H^1(\Omega)$ и граничные значения функции f_0 почти всюду совпадают с граничными значениями некоторой функции $F \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^d \setminus \Omega)$ и $|\overline{\partial}F| \in L^1(\mathbb{C}^d \setminus \Omega)$, тогда по формуле Стокса при $z \in \partial\Omega$ имеем

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \lim_{r\to 0+} \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\partial\Omega_r} \frac{F(\xi)\partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d} \\ &= \lim_{r\to 0+} \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\mathbb{C}^d\setminus\Omega_r} \frac{\overline{\partial}F(\xi) \wedge \partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\mathbb{C}^d\setminus\Omega} \frac{\overline{\partial}F(\xi) \wedge \partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

поскольку

$$d\left(\frac{\partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d}\right) = 0, \quad z \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega.$$

Эта замечательная формула позволяет изучать свойства функции f_0, основываясь на оценке её продолжения. Заметим, что при этом не обязательно, чтобы функция F была продолжением в смысле совпадения граничных значений, достаточно, чтобы выполнялось соотношение (2.2). Будем называть такую функцию F *псевдоаналитическим продолжением* функции f_0.

Для краткости введём обозначения

$$\omega(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^d}\partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}; \quad K(\xi, z) = \frac{1}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d}. \tag{2.3}$$

2.2. Точечные оценки ядра. Как уже было сказано выше, важным инструментом в изучении граничных свойств аналитических функций будет формула (2.2). В этом параграфе мы даём точечные и интегральные оценки ядра оператора K_d. Отметим, что часть оценок можно получить в предположении лишь строгой линейной выпуклости (см. [7]), это относится к оценкам на поверхности $\partial\Omega$, однако продолжение этих оценок на множество $\mathbb{C}^d \setminus \Omega$ существенно использует выпуклость области (см. лемму 2.1). Для краткости, обозначим $v(\xi, z) = |\langle \partial\rho(\xi), \xi - z\rangle|$, а ближайшую к точке $\xi \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega$ точку границы $\partial\Omega$ – через ξ^*.

Лемма 2.1. *Пусть область Ω выпукла, тогда*

$$v(\xi, z) \asymp \rho(\xi) + v(\xi^*, z), \quad z \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega. \tag{2.4}$$

Доказательство. Обозначим через $n(\xi) = \frac{\partial\rho(\xi)}{|\partial\rho(\xi)|}$ комплексную нормаль в точке ξ. Заметим, что

$$\langle n(\xi), \xi - \xi^*\rangle = |\xi - \xi^*| = \operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega) \asymp \rho(\xi),$$

значит,

$$\begin{aligned}\langle \partial\rho(\xi), \xi - z\rangle &= |\partial\rho(\xi)| \left(\langle n(\xi), \xi - \xi^*\rangle + \langle n(\xi), \xi^* - z\rangle\right)\\ &= |\partial\rho(\xi)| \left(\operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega) + \langle n(\xi^*), \xi^* - z\rangle + \langle n(\xi) - n(\xi^*), \xi^* - z\rangle\right).\end{aligned}$$

При этом

$$|\langle n(\xi) - n(\xi^*), \xi^* - z\rangle| \lesssim |\xi - \xi^*||\xi^* - z| \lesssim |\xi^* - z|\rho(\xi).$$

Так как область Ω выпукла и, следовательно, $\operatorname{Re}\langle n(\xi^*), \xi^* - z\rangle \geqslant 0$ при $z \in \partial\Omega$ (см. [10]), то в предположении, что значение $|\xi^* - z|$ достаточно мало, получаем

$$\begin{aligned}&|\langle \partial\rho(\xi), \xi - z\rangle|\\ &\quad\gtrsim \left((\operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega) + \operatorname{Re}\langle n(\xi^*), \xi^* - z\rangle)^2 + \left(\operatorname{Im}\langle n(\xi^*), \xi^* - z\rangle\right)^2\right)^{1/2}\\ &\quad\gtrsim \operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega) + |\langle n(\xi^*), \xi^* - z\rangle| \gtrsim \rho(\xi) + v(\xi^*, z),\end{aligned}$$

обратное неравенство очевидно следует из неравенства треугольника. Локальные оценки в силу непрерывности рассматриваемых выражений переносятся на произвольные значения $z \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega$. $\square$

Следующая лемма показывает, что функция $v(\xi, z)$ устанавливает на $\partial\Omega$ квазиметрику (см. подробнее в [7]). Заметим, что оценки выполняются локально, что впоследствии компенсируется выбором финитных псевдоаналитических продолжений.

Лемма 2.2. *Пусть область Ω строго выпукла, тогда выполнены следующие оценки:*

1. $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \asymp \rho(z) \asymp |z-\xi|^2$, $z \in T_\xi \bigcap \Omega_2$, $\xi \in \partial\Omega$;
2. $|\xi - z|^2 \lesssim v(\xi, z) \lesssim |\xi - z|$, $z, \xi \in \partial\Omega$;
3. $v(\zeta, \xi) \asymp v(\xi, \zeta)$, $\zeta, \xi \in \partial\Omega$;
4. $v(\zeta, \xi) \lesssim v(\xi, w) + v(w, \zeta)$, $\zeta, \xi, w \in \partial\Omega$;
5. $|\xi - z|^2 \lesssim v(\xi, z)$, $\xi \in \Omega_2 \setminus \Omega$, $z \in \partial\Omega$.

Доказательство. 1. Пусть $z \in T_\xi \bigcap \Omega_2$, разложим $\rho(z)$ по формуле Тейлора:

$$\rho(z) = \rho(\xi) + 2\operatorname{Re}\langle \partial\rho(\xi),\, z-\xi\rangle + \frac{1}{2} d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right]|z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2)$$
$$= \frac{1}{2} d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right]\cdot|z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2) \asymp |z-\xi|^2.$$

2. Аналогично предыдущему пункту, из формулы Тейлора получаем

$$2\operatorname{Re}\langle \partial\rho(\xi),\, z-\xi\rangle = -\frac{1}{2} d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right]\cdot|z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2) \asymp |z-\xi|^2,$$

откуда вытекает оценка снизу. Оценка сверху очевидна.
3. Оценим значение $|v(\xi, z)/v(z, \xi)|$:

$$\left|\frac{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle}{\langle \partial\rho(z),\, z-\xi\rangle}\right| = \left|\frac{\langle \partial\rho(z),\, \xi - z\rangle - \langle \partial\rho(z) - \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle}{\langle \partial\rho(z),\, z-\xi\rangle}\right|$$
$$\lesssim 1 + \frac{|\xi - z|^2}{|\xi - z|^2} \lesssim 1.$$

Обратное неравенство получается по симметрии.
4. Это свойство легко получается из предыдущих пунктов:

$$\begin{aligned}
&|\langle \partial\rho(\zeta),\, \zeta-\xi\rangle| \\
&\leqslant |\langle \partial\rho(\zeta),\, \zeta - w\rangle| + |\langle \partial\rho(\zeta) - \partial\rho(w),\, w-\xi\rangle| + |\langle \partial\rho(w),\, w-\xi\rangle| \\
&\lesssim v(\zeta, w) + v(w, \xi) + |\zeta - w||w-\xi| \\
&\lesssim v(\xi, w) + v(w, \zeta) + |\zeta - w|^2 + |w-\xi|^2 \lesssim v(\xi, w) + v(w, \zeta).
\end{aligned}$$

5. Согласно пункту 2 этой леммы имеем $|\xi^* - z| \lesssim v(\xi^*, z)^{1/2}$ и

$$|\xi - z| \leqslant |\xi - \xi^*| + |\xi^* - z| \lesssim \rho(\xi) + v(\xi^*, z)^{1/2} \\ \lesssim \sqrt{\rho(\xi) + v(\xi^*, z)} \lesssim v(\xi, z)^{1/2}.$$

Заметим, что обратное неравенство неверно. □

Лемма 2.3. *Найдётся такая постоянная $A = A(\rho)$, что равномерно по $h > 0$ из условий $v(\xi, z) > Ah$, $v(z, w) < h$ следует, что $v(\xi, z) \asymp v(\xi, w)$, когда $\xi \in \Omega_2 \setminus \Omega$, $z, w \in \partial\Omega$.*

Доказательство. Заметим, что поскольку $v(\xi, z)$ задаёт квазиметрику на $\partial\Omega$, найдётся постоянная A_0 такая, что утверждение леммы выполнено для $\xi \in \partial\Omega$. Пусть теперь $\xi \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega$, тогда, согласно лемме 2.2, найдётся постоянная $c > 1$, такая что

$$c^{-1}(\rho(\xi) + v(\xi^*, z)) \leqslant v(\xi, z) \leqslant c(\rho(\xi) + v(\xi^*, z)).$$

Пусть $v(\xi, z) > 2cA_0$, тогда либо $\rho(\xi) > A_0 h$, либо $v(\xi^*, z) > A_0 h$. Допустим, что выполнено первое неравенство $\rho(\xi) > A_0 h$, тогда

$$v(\xi, w) \lesssim \rho(\xi) + v(\xi^*, w) \lesssim \rho(\xi) + v(\xi^*, z) + v(z, w) \\ \lesssim \rho(\xi) + h + v(\xi^*, z) \lesssim \rho(\xi) + v(\xi^*, z) \lesssim v(\xi, z),$$

обратное неравенство получается аналогично.

Пусть теперь $v(\xi^*, z) > A_0 h$, тогда $v(\xi^*, z) \asymp v(\xi^*, w)$, значит

$$v(\xi, w) \asymp \rho(\xi) + v(\xi^*, w) \asymp \rho(\xi) + v(\xi^*, z) \asymp v(\xi, z).$$

Лемма доказана. □

Основную оценку ядра, используемую далее, даёт следствие лемм 2.2 и 2.3.

Следствие 2.4. *Пусть $z, w \in \partial\Omega$, $\xi \in \Omega_2 \setminus \Omega$ и при этом $v(\xi, w) > Ah$ и $v(z, w) < h$, тогда равномерно по $h > 0$ выполняется оценка*

$$|K(\xi, z) - K(\xi, w)| \lesssim \frac{v(z, w)^{1/2}}{v(\xi, z)^{d+1/2}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Напомним, что $K(\xi,z)=\frac{1}{\langle\partial\rho(\xi),\,\xi-z\rangle^d}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&|\,\langle\partial\rho(\xi),\,\xi-z\rangle-\langle\partial\rho(\xi),\,\xi-w\rangle\,|\\
&\qquad=|\,\langle\partial\rho(\xi),\,w-z\rangle\,|\leqslant|\,\langle\partial\rho(\xi)-\partial\rho(z),\,z-w\rangle\,|\\
&\qquad+|\,\langle\partial\rho(z),\,z-w\rangle\,|\lesssim|\xi-z||z-w|+v(z,w)\\
&\qquad\lesssim v(\xi,z)^{1/2}v(z,w)^{1/2}+v(z,w)^{1/2}v(\xi,w)^{1/2}\lesssim v(\xi,w)^{1/2}v(z,w)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $v(\xi,z)\asymp v(\xi,w)$ согласно лемме 2.3, получаем

$$|K(\xi,z)-K(\xi,w)|\lesssim\frac{v(\xi,w)^{1/2}v(z,w)^{1/2}v(\xi,w)^{d-1}}{v(\xi,z)^d v(\xi,w)^d}\lesssim\frac{v(z,w)^{1/2}}{v(\xi,z)^{d+1/2}},$$

что и требовалось доказать. □

2.3. Интегральные оценки ядра. В основе интегральных оценок ядра оператора Коши–Лере–Фантаппье лежит следующая лемма, вводящая на $\partial\Omega$ систему специальных окрестностей.

Лемма 2.5. *Пусть $\xi\in\mathbb{C}^d\setminus\Omega$, $\delta>0$, определим*

$$V(\xi,\delta)=\{z\in\partial\Omega: v(\xi,z)<\delta\},\tag{2.6}$$

тогда $\sigma V(\xi,\delta)\lesssim\delta^d$.

Доказательство. Пусть, как и прежде, ξ^* – ближайшая точка границы $\partial\Omega$ к точке ξ, тогда, согласно лемме 2.1, $v(\xi,z)\lesssim\rho(\xi)+v(\xi^*,z)$, следовательно, достаточно рассмотреть случай $\xi\in\partial\Omega$. Но в этом случае результат хорошо известен, поскольку окрестности $V(\xi,\delta)$, $\xi\in\partial\Omega$, представляют из себя эллипсоиды Хёрмандера. □

Замечание 2.6. Пусть $0\leqslant r\leqslant 1$, $\xi\in\mathbb{C}^d\setminus\Omega$, $\delta>0$, и пусть

$$V(\xi;r,\delta)=\{z\in\partial\Omega_r: v(\xi,z)<\delta\},\tag{2.7}$$

тогда из гладкости функции ρ имеем $\sigma_r V(\xi;r,\delta)\lesssim\delta^d$.

Лемма 2.7. *Пусть $\alpha>0$ и $0<r<\delta<1$, тогда*

$$I_\alpha(\xi,\delta)=\int\limits_{\substack{z\in\partial\Omega,\\ v(\xi,z)>\delta}}\frac{d\sigma(z)}{v(\xi,z)^{d+\alpha}}\lesssim\delta^{-\alpha},\quad \xi\in\Omega_2\setminus\Omega;$$

$$J_\alpha(z,\delta)=\int\limits_{\substack{\xi\in\partial\Omega_r,\\ v(\xi,z)>\delta}}\frac{d\sigma_r(\xi)}{v(\xi,z)^{d+\alpha}}\lesssim\delta^{-\alpha},\quad z\in\Omega.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство, для этого рассмотрим множества

$$V_k = \{z \in \partial\Omega : 2^k\delta \leqslant v(\xi, z) \leqslant 2^{k+1}\delta\},$$

тогда $\{z \in \partial\Omega : v(\xi, z) > \delta\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$ и $\sigma(V_k) \lesssim 2^{kd}\delta^d$, откуда

$$I_\alpha(z, \delta) \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{kd}\delta^d}{(2^k\delta)^{d+\alpha}} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\alpha}\delta^{-\alpha} \lesssim \delta^{-\alpha}.$$

Второе неравенство доказывается аналогично рассмотрением множеств $W_k = \{\xi \in \partial\Omega_r : 2^k\delta \leqslant v(\xi, z) \leqslant 2^{k+1}\delta\}$, при этом снова $\sigma_r(W_k) \lesssim 2^{kd}\delta^d$. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть* $0 < r < \delta < 1$, *тогда*

$$\int\limits_{\substack{z\in\partial\Omega,\\ v(\xi,z)<\delta}} \frac{d\sigma(z)}{v(\xi, z)^d} \lesssim 1 + \log\frac{\delta}{r}, \quad \rho(\xi) = r;$$

$$\int\limits_{\substack{\xi\in\partial\Omega_r,\\ v(\xi,z)<\delta}} \frac{d\sigma_r(\xi)}{v(\xi, z)^d} \lesssim 1 + \log\frac{\delta}{r}, \quad z \in \Omega.$$

Доказательство. Доказательство этих неравенств схоже с доказательством предыдущей леммы, однако здесь необходимо следить за количеством множеств, на которые мы разбиваем область интегрирования. Пусть теперь $V_k = \{z \in \partial\Omega : 2^k \leqslant v(\xi, z) \leqslant 2^{k+1}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, и пусть $\rho(\xi) = r < \delta$. Заметим, что, согласно лемме 2.1,

$$c^{-1}v(\xi, z) \leqslant \rho(\xi) + v(\xi^*, z) \leqslant cv(\xi, z),$$

значит,

$$c^{-1}2^k - \delta \leqslant c^{-1}v(\xi, z) - \delta \leqslant v(\xi^*, z) \leqslant cv(\xi, z) - r \leqslant c2^{k+1} - r, \quad z \in V_k.$$

Следовательно, поскольку $0 \leqslant v(\xi^*, z) \leqslant \delta$, получаем. что $V_k = \varnothing$, если $2^{k+1} < c^{-1}r$ или $2^k > c \cdot \delta$, т.е. при $k < k_1(r) = \log_2 c^{-1}r - 1$ и при $k > k_2(\delta) = \log_2 c\delta$. Значит,

$$\{z \in \partial\Omega \ : \ v(\xi, z) < \delta\} = \bigcup_{k_1 \leqslant k \leqslant k_2} V_k$$

и

$$\int\limits_{\substack{\xi\in\partial\Omega_r,\\ v(\xi,z)<\delta}} \frac{d\sigma_r(\xi)}{v(\xi,z)^d} \leqslant \sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2} \int\limits_{V_k} \frac{d\sigma_r(\xi)}{v(\xi,z)^d}$$

$$\lesssim \sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2} \frac{2^{kd}}{2^{(k+1)d}} \lesssim k_2(\delta) - k_1(\delta) \lesssim 1 + \log\frac{\delta}{r}.$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

2.4. Приближение ядра Коши–Лере–Фантаппье. Следствие 2.4 даёт потенциал для локальных приближений ядра Коши–Лере–Фантаппье (см. далее в разделе 5.1). Часто требуется построить глобальное приближение, что возможно благодаря лемме 2.10, основанной на теореме В. К. Дзядыка об оценке ядра Коши (теорема 1, часть 1 главы 7 монографии [4]). Приближение здесь выбираем аналогично статье [9].

Лемма 2.9. *Пусть область Ω строго выпукла и $0 \in \Omega$, тогда для произвольной точки $\xi \in \partial\Omega$ значения выражения $\lambda = \frac{\langle\partial\rho(\xi),\, z\rangle}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi\rangle}$ при $z \in \Omega$ лежат в области $L(t)$, ограниченной большей дугой окружности $|\lambda| = R = R(\Omega)$ и хордой $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1 + e^{it}s,\ s \in \mathbb{R},\ |\lambda| \leqslant R\}$, где $t = \frac{\pi}{2} - \arg(\langle\partial\rho(\xi),\, \xi\rangle)$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \partial\Omega$, определим

$$\Lambda(\xi) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \frac{\langle\partial\rho(\xi),\, z\rangle}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi\rangle},\ z \in \Omega\right\}.$$

Заметим, что поскольку область Ω выпукла и $0 \in \Omega$, верны неравенства

$$|\langle\partial\rho(\xi),\, \xi\rangle| \gtrsim |\partial\rho(\xi)||\xi| \gtrsim 1, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Re}\langle\partial\rho(\xi),\, z - \xi\rangle \leqslant 0, \quad z \in \overline{\Omega},\ \xi \in \partial\Omega. \tag{2.9}$$

Область $\Lambda(\xi)$ выпукла и содержит 0, следовательно, тождество

$$\frac{\langle\partial\rho(\xi),\, z\rangle}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi\rangle} = 1 + \frac{\langle\partial\rho(\xi),\, z-\xi\rangle}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi\rangle}$$

вместе с оценками (2.8), (2.9) завершает доказательство леммы. □

Лемма 2.10. *Пусть $\alpha > 0$, тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$ найдётся многочлен по z $K_n^{\mathrm{glob}}(\xi, z)$ степени не выше n такой, что при $z \in \partial\Omega$ и $\xi \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega$ выполнены оценки*

$$|K(\xi, z) - K_n^{\mathrm{glob}}(\xi, z)| \lesssim \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{v(\xi, z)^{d+\alpha}}, \quad v(\xi, z) \geqslant \frac{1}{n}; \tag{2.10}$$

$$|K_n^{\mathrm{glob}}(\xi, z)| \lesssim n^d, \quad v(\xi, z) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Заметим, что, согласно [4] и [9], при любом $n \in \mathbb{N}$ найдётся многочлен по λ $T_n(t, \lambda)$ степени n такой, что

$$\left| \frac{1}{1 - \lambda} - T_n(t, \lambda) \right| \lesssim \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{|1 - \lambda|^{1+\alpha}}$$

при $\lambda \in L(t) \setminus \left\{\lambda : |1 - \lambda| < \frac{1}{n}\right\}$, причём коэффициенты многочлена $T_n(t, \lambda)$ непрерывно зависят от параметра t. Заметим также, что в силу принципа максимума

$$T_n(t, \lambda) \lesssim n^{-1}, \quad \lambda \in L(t) \bigcap \left\{ \lambda : |1 - \lambda| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Положив

$$K_{nd}^{\mathrm{glob}}(\xi, z) = \frac{1}{\langle \partial\rho(\xi), \xi \rangle^d} T_n^d \left(t(\xi), \frac{\langle \partial\rho(\xi), z \rangle}{\langle \partial\rho(\xi), \xi \rangle} \right),$$

легко видеть, что многочлены $K_{nd}^{\mathrm{glob}}(\xi, \cdot)$ удовлетворяют соотношениям (2.10)–(2.11). Дополняя последовательность многочленов соотношением $K_n^{\mathrm{glob}} = K_{d[n/d]}^{\mathrm{glob}}$, получаем требуемое приближение. □

§3. Локальные приближения и пространства $B_{pq}^s(\partial\Omega)$

Данное в §1 определение пространства Бесова оказывается неудобным в применении к аппроксимационным задачам, поэтому зачастую используют определение модуля непрерывности на языке локальных приближений полиномами. Отметим, что результаты этого раздела верны и в общем случае для произвольной области с $C^{[s]+1}$-гладкой границей.

Пусть $K \subseteq \partial\Omega$ и $f \in L^1(K)$, определим наилучшее приближение функции f многочленами степени m в метрике L^p формулой

$$E_m(f,K)_p = \inf_{T\in\mathbb{P}_m} \left(\int\limits_K |f-T|^p \, d\sigma \right)^{1/p}, \tag{3.1}$$

где $\mathbb{P}_m$ – множество всех многочленов степени m по каждой переменной, $m \geqslant 0$.

Замечание 3.1. Заметим, что нижнюю границу в определении (3.1) можно искать среди многочленов T таких, что $\|T\|_{L^p(K)} \leqslant 2\|f\|_{L^p(K)}$. Кроме того, из эквивалентности норм в конечномерном пространстве выполнено соотношение $\|T\|_{C^\infty(K)} \leqslant \frac{c(m)}{\sigma(K)}\|T\|_{L^p(K)}$, $T \in \mathbb{P}_m$.

Рассмотрим следующий специальный атлас границы области Ω:

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^N \widetilde{Q}_k, \ \text{где} \ \widetilde{Q}_k = \varphi_k(Q),$$

$$\text{и} \ Q = [0,1]^{2d-1} - \text{единичный куб в} \ \mathbb{R}^{2d-1}, \tag{3.2}$$

и предположим, что разбиение единицы $\sum\limits_{k=1}^N \chi_k = 1$ выбрано так, что

$$\widetilde{Q}_{k,\varepsilon} = \varphi_k((1-\varepsilon)Q) \subset \operatorname{supp} \chi_k \subset \widetilde{Q}_k \tag{3.3}$$

для некоторого значения $0 < \varepsilon < 1$.

Через $Q_h = Q_h(x) = \{x + [0,h]^{2d-1}\}$ будем обозначать куб в $\mathbb{R}^{2d-1}$ со стороной h, а его образ под действием диффеоморфизма φ_k будем обозначать через $\widetilde{Q}_h = \varphi_k(Q_h)$. Запись $\widetilde{Q}_{h/2} \subset F \subset \widetilde{Q}_h$ формально будет означать то, что найдутся две точки $x, y \in \mathbb{R}^{2d-1}$ такие, что $\varphi_k(Q_{h/2}(x)) \subset F \subset \varphi_k(Q_h(y))$ для одного из отображений φ_k. Аналогичные обозначения будем использовать, когда вместо диффеоморфизмов рассматриваются проекции на касательные гиперплоскости (см. замечание 3.5).

Определение 3.2. *Пусть $f \in L^p(\partial\Omega)$, определим полиномиальный модуль гладкости порядка $m \geqslant 1$ формулой*

$$\omega_m(f,h)_p = \sup \left(\sum_{j=1}^N E_{m-1}(f,F_j)_p^p \right)^{1/p},$$

где верхняя грань берётся по всем разбиениям $\{F_j\}$ *границы области* Ω *таким, что* $\widetilde{Q}_{h/2} \subset F_j \subset \widetilde{Q}_h$.

Отметим, что для кубов эквивалентность определения модуля непрерывности на языке приближений и разностей (см. определения (1.2)–(1.6)) доказана в работе [3], и в наших рассуждениях мы будем опираться на следующую лемму.

Лемма 3.3 (Брудный, Иродова [3]). *Пусть* $m \geqslant 1$ *и* $0 < p \leqslant \infty$, *тогда равномерно по* $f \in L^p([0,1]^l)$ *и* $t \in [0,1]$ *справедлива эквивалентность*

$$\omega^m(f,t)_p \asymp \sup\left(\sum_{j=1}^{N} E_{m-1}(f, Q_t^j)_p^p\right)^{1/p}, \tag{3.4}$$

где верхняя грань берётся по всем наборам $\{Q_t^j\}$ *непересекающихся кубов с длиной стороны* t.

Теорема 3.4. *Пусть* $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$ *и* $s > 0$, *и пусть область* Ω *имеет гладкую границу, а* $f \in L^p(\partial\Omega)$, *тогда* $f \in B^s_{pq}(\partial\Omega)$ *в том и только том случае, когда при* $q < \infty$

$$\widetilde{c}_{pq}(f) = \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_m(f,t)_p}{t^s}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty,$$

а при $q = \infty$

$$\widetilde{c}_{pq}(f) = \sup_{t>0} \frac{\omega_m(f,t)_p}{t^s} < \infty,$$

где $m \in \mathbb{N}$ *и* $m > s$. *При этом* $\|f\|_{B^s_{pq}} \asymp \|f\|_p + \widetilde{c}_{pq}(f)$.

Доказательство. Рассмотрим атлас и разбиение единицы, определённые в соотношениях (3.2) и (3.3). Идея доказательства состоит в сопоставлении многочленам, приближающим функцию f, многочленов, приближающих функции $(f\chi_k) \circ \varphi_k$, и обратно. При этом на кубе Q уже имеется эквивалентность определений и, согласно лемме 3.3, при $m \geqslant 0$ имеем

$$\omega^{m+1}((f\chi_k) \circ \varphi_k, t)_p \asymp \sup\left(\sum_j E_m((f\chi_k) \circ \varphi_k, Q_t^j)_p^p\right)^{1/p}.$$

С помощью этой эквивалентности докажем следующие две оценки, из которых будет следовать утверждение теоремы:

$$\omega^{m+1}((f\chi_k)\circ\varphi_k, t)_p \lesssim \omega_{m+1}(f,t)_p + \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} t^{m+2}; \tag{3.5}$$

$$\omega_{m+1}(f,t)_p \lesssim \sum_{k=1}^{N} \omega^{m+1}((f\chi_k)\circ\varphi_k, t)_p + \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} t^{m+2}. \tag{3.6}$$

Докажем неравенство (3.5). Для этого фиксируем значение k и рассмотрим семейство непересекающихся кубов $\left\{Q_t^j\right\}$ с длиной стороны t, лежащих в единичном кубе Q_1, и сопоставим каждому кубу его образ на $\partial\Omega$ под действием диффеоморфизма φ_k, пусть $\widetilde{Q}_t^j = \varphi_k(Q_t^j)$.

Рассмотрим многочлен $\widetilde{P_m}$ покоординатной степени m, определённый на $\widetilde{Q}_t^j$, такой что $\|\widetilde{P}_m\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} \leqslant 2\|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)}$ (см. замечание 3.1). Тогда функция $(\widetilde{P}_m\chi_k)\circ\varphi_k$ гладкая на Q_t^j, и по формуле Тейлора найдётся многочлен P_m степени m, определённый на Q_t^j и такой, что при $y \in Q_t^j$ справедливы оценки

$$|(\widetilde{P}_m\chi_k)\circ\varphi_k(y) - P_m(y)| \lesssim \|\widetilde{P}_m\chi_k\circ\varphi_k\|_{C^\infty(Q_t^j)} t^{m+1} \lesssim \frac{\|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)}}{|\widetilde{Q}_t^j|} t^{m+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|(f\chi_k)\circ\varphi_k - P_m\|_{L^p(Q_t^j)} &\lesssim \|(f-\widetilde{P}_m)\chi_k\circ\varphi_k\|_{L^p(Q_t^j)} + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} t^{m+1}\\ &\leqslant \|f-\widetilde{P}_m\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} t^{m+1}.\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора многочлена $\widetilde{P}_m$, получаем

$$E_m((f\chi_k)\circ\varphi_k, Q_t^j)_p \lesssim E_m(f,\widetilde{Q}_t^j)_p + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} t^{m+1},$$

$$\begin{aligned}&\left(\sum_j E_m((f\chi_k)\circ\varphi_k, Q_t^j)_p^p\right)^{1/p}\\ &\lesssim \left(\sum_j E_m(f,\widetilde{Q}_t^j)_p^p\right)^{1/p} + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_k)} t^{m+1} \leqslant \omega_{m+1}(f,t)_p + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_k)} t^{m+1}.\end{aligned}$$

Переходя к верхней грани в левой части этого неравенства, получим

$$\omega^{m+1}((f\chi_k)\circ\varphi_k, t)_p \lesssim \omega_{m+1}(f,t)_p + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_k)} t^{m+1}.$$

Для доказательства неравенства (3.6) мы воспользуемся тем, что носители функций из разбиения единицы покрывают $\partial\Omega$, причём можно считать, что $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} \widetilde{Q}_{k,\varepsilon}$. Пусть значение $t > 0$ достаточно мало, чтобы можно было выбрать покрытие куба $(1-\varepsilon)Q_1$ непересекающимися кубами с длиной стороны t, и пусть

$$(1-\varepsilon)Q \subset \bigcup Q_t^j \subset Q.$$

Рассмотрим многочлен P_m покоординатной степени m, определённый на Q_t^j. Отметим, что $\|1/\chi_k\|_{C^\infty(\widetilde{Q}_{k,\varepsilon})} < \infty$ и функция $(P_m/\chi_k)\circ\psi_k$ гладкая на $\widetilde{Q}_{k,\varepsilon}$ и, если параметр $t > 0$ достаточно мал, то аналогично предыдущему случаю найдётся многочлен $\widetilde{P}_m$ степени m такой, что

$$\|(P_m/\chi_k)\circ\psi_k - \widetilde{P}_m\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} \lesssim \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} t^{m+1},$$

откуда

$$\begin{aligned}\|f - \widetilde{P}_m\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} &\lesssim \|f - (P_m/\chi_k)\circ\psi_k\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} t^{m+1} \\ &\lesssim \|(f\chi_k)\circ\varphi_k - P_m\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_t^j)} t^{m+1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left(\sum_j E_m(f, \widetilde{Q}_t^j)_p^p\right)^{1/p} &\lesssim \left(\sum_j E_m((f\chi_k)\circ\varphi_k, Q_t^j)_p^p\right)^{1/p} + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_k)} t^{m+1} \\ &\lesssim \omega^{m+1}((f\chi_k)\circ\varphi_k, t)_p + \|f\|_{L^p(\widetilde{Q}_k)} t^{m+1}.\end{aligned}$$

Осталось немного доработать левую часть этого неравенства, и мы получим требуемую оценку. Пусть $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} F_j$, причём $\widetilde{Q}_{j,t/2} \subset F_j \subset \widetilde{Q}_{j,t}$, заметим, что куб $\widetilde{Q}_{j,t}$, сопоставленный множеству F_j, может пересекать только конечное число кубов, сопоставленных остальным множествам F_l, точнее $\#\{k : \widetilde{Q}_{j,t} \cap \widetilde{Q}_{k,t} \neq \varnothing\} \leqslant 4^d$, значит,

$$\begin{aligned}\omega_{m+1}(f,t)_p = \sup\left(\sum_j E_m(f, F_j)_p^p\right)^{1/p} &\lesssim \sup\left(\sum_j E_m(f, \widetilde{Q}_{j,t})_p^p\right)^{1/p} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{N} \omega^{m+1}((f\chi_k)\circ\varphi_k, t)_p + \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} t^{m+1}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказательство неравенств (3.5) и (3.6) завершено, а вместе с ним и доказательство теоремы. □

Замечание 3.5. Заметим, что в определении величины $\omega_m(f,h)_p$ можно рассматривать разбиения на множества F_j такие, что $Q_{h/2}(\zeta_1) \subset \mathrm{pr}_\xi F_j \subset Q_h(\zeta_2)$ для некоторой точки $\xi \in \partial\Omega$ и точек $\zeta_1, \zeta_2 \in T^{\mathbb{R}}_\xi$, где pr_ξ – проекция на касательную в точке $\xi \in F_j$ плоскость. Это возможно в силу гладкости границы $\partial\Omega$ и поскольку $\|\mathrm{pr}_{\xi_1} \circ \mathrm{pr}^{-1}_{\xi_2}\|_{C^\infty} < c(\Omega) < \infty$ для любых точек $\xi_1,\ \xi_2 \in \partial\Omega$. В дальнейшим будем пользоваться этим определением величины $\widetilde{c}_{pq}(f)$.

§4. Построение почти наилучшего локального приближения

Результат предыдущего раздела позволил перейти от понятия оператора взятия разности к локальным наилучшим приближениям. В этом разделе мы рассмотрим интерполяционную конструкцию, доставляющую почти наилучшее приближение на множестве $K \subset \partial\Omega$ таком, что $Q_h \subset \mathrm{pr}_\xi(K) \subset Q_{2h}$ для некоторой точки $\xi \in \partial\Omega$ и $h > 0$. Пусть многочлен P_0 от одной вещественной переменной степени m таков, что

$$\int_0^1 P_0(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 x^k P_0(x)\,dx = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{4.1}$$

а многочлен $P_1(z)$ также степени m от одной комплексной переменной таков, что

$$\int_Q P_1(z)\,d\mu_2(z) = 1, \quad \int_Q z^k P_1(z)\,d\mu_2(z) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{4.2}$$

где $Q = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y \in [0,1]\}$ – единичный куб в $\mathbb{C}$, а μ_2 – мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}^d$, введём следующие обозначения: $z = (z', w)$, где $z' = (z_1, \dots, z_{d-1}) \in \mathbb{C}^{d-1}$, $w \in \mathbb{C}$.

Зафиксируем точку $\xi \in \partial\Omega$, с помощью аналитически-линейной замены координат мы можем сделать $\xi = 0$ и

$$T^{\mathbb{R}}_\xi = \{z \in \mathbb{C}^d : \mathrm{Im}\, z_d = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^d : z_d \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда в этих обозначениях

$$\mathrm{pr}_\xi(z) = (z', \mathrm{Re}\, w), \quad \pi_\xi(z) = (z', 0),$$

где, как и раньше, pr_ξ, π_ξ – проекторы на касательную и комплексную касательную гиперплоскости, соответственно.

Пусть $u \in T_\xi^{\mathbb{R}}$, $h, h_1 > 0$, рассмотрим в касательной гиперплоскости параллелепипед

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_u = u + \{z \in \mathbb{C}^d : z = (z', w),\ z' \in [0,h]^{2d-2} \subset \mathbb{C}^{d-1},\\ w = z_{d-1},\ \operatorname{Re} w \in [0, h_1],\ \operatorname{Im} w = 0\}.\end{aligned}$$

Поскольку область регулярна, оператор проекции на касательную гиперплоскость локально обратим в окрестности точки ξ, и считая, что параллелепипед $\widetilde{J}_u$ достаточно мал и близок к точке ξ, обозначим

$$J_u = \mathrm{pr}_\xi^{-1}(\widetilde{J}_u), \quad (u', w_0) = \mathrm{pr}_\xi^{-1}(u), \quad (z', w_1(z')) = \mathrm{pr}_\xi^{-1}(z', u_d + h_1),$$

где $(z', 0) \in \pi_\xi(J)$, при этом, очевидно, $\operatorname{Re} w_0 = u_d$ и $\operatorname{Re} w_1(z') = u_d + h_1$.

Кроме того, рассмотрим отрезок, соединяющий точки u и $(z', u_d + h_1)$, и кривую $\widetilde{\gamma}_{z'}$, соединяющую точки (u', w_0) и $(z', w_1(z'))$, получаемую при обратной проекции pr_ξ^{-1} на границу области Ω этого отрезка, то есть

$$\widetilde{\gamma}_{z'} = \mathrm{pr}_\xi^{-1}\bigl\{(1-t)u + t(z', u_d + h_1)\bigr\}.$$

Окончательно, сопоставим кривой $\widetilde{\gamma}_{z'}$ кривую $\gamma_{z'}$ в комплексной плоскости, которую описывает последняя координата кривой $\widetilde{\gamma}_{z'}$. Также введём вспомогательное обозначение $J'_u = \pi_\xi(J_u)$.

Определим функцию

$$\begin{aligned}P_{J_u}(z) &= P_{J_u}(z', w)\\ &= \frac{1}{h^{2(d-1)}} \frac{1}{w_1(z') - w_0} P_d\left(\frac{z' - u'}{h}\right) P_0\left(\frac{w - w_0}{w_1(z') - w_0}\right), \qquad (4.3)\end{aligned}$$

где $P_d(z') = P_1(z_1) \cdot \ldots \cdot P_1(z_{d-1})$.

Это не многочлен и даже не аналитическая функция, но эта функция восстанавливает значение любого многочлена, покоординатная степень которого не больше m, в точке $z_0 = (u', w_0) \in \partial\Omega$ посредством следующей операции:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{J'_u} d\mu_{2d-2}(z') \int\limits_{\gamma_{z'}} T(z',w) P_{J_u}(z',w)\,dw \\
&= \int\limits_{J'_u} \frac{d\mu_{2d-2}(z')}{h^{2d-2}} P_d\left(\frac{z'-u'}{h}\right) \int\limits_{\gamma_{z'}} T(z',w) P_0\left(\frac{w-w_0}{w_1(z')-w_0}\right) \frac{dw}{w_1(z')-w_0} \\
&= \int\limits_{J'_u} \frac{d\mu_{2d-2}(z')}{h^{2(d-1)}} P_d\left(\frac{z'-u'}{h}\right) \int\limits_0^1 T(z'+z'_0, w_0 + v(w_1(z')-w_0)) P_0(v)\;dv \\
&= \int\limits_{J'_u} P_d\left(\frac{z'-u'}{h}\right) T(z',w_0) \frac{d\mu_{2d-2}(z')}{h^{2(d-1)}} = T(u',w_0) = T(z_0).
\end{aligned}$$

Переход от кривой $\gamma_{z'}$, соединяющей точки w_0 и $w_1(z')$, к интегралу по отрезку $[0,1]$ возможен благодаря замене $v = \frac{w-w_0}{w_1(z')-w_0}$ и тому, что подынтегральная функция аналитична. Отметим, что интегрирование ведётся по половине проекции параллелепипеда $\widetilde{J}_u$, заметаемой кривыми $\widetilde{\gamma}_{z'}$, при этом $|dw|\,d\mu_{2d-2}(z') \asymp d\sigma(z',w)$.

Опишем, наконец, оператор локального почти наилучшего приближения. Пусть множество K таково, что $Q_h(\zeta_1) \subset \mathrm{pr}_\xi(K) \subset Q_{2h}(\zeta_2)$ для некоторых точек $\zeta_1, \zeta_2 \in T_\xi$, и $f \in L^1(K)$. Рассмотрим разбиение куба $Q_h = Q_h^{d-1} \times [0,h]$ на сдвиги параллелепипедов вида

$$Q^{(m)} = \Big\{(z',w) : x_j, y_j \in [0, h/(\sqrt{m+1}+1)^2+1],\ x_d \in [0,h/m]\Big\} \subset T_\xi$$

и разобъём аналогичным образом куб $Q_h(\zeta)$. Пронумеруем элементы разбиения произвольным образом, допустим, по диагонали, тогда $\bigcup\limits_{j=1}^{(m+1)^d} \widetilde{Q}_j(z_j) \subset K$, где $\widetilde{Q}_j(z_j)$ – обратные проекции соответствующих элементов разбиения. Пусть $Q'_j = \pi_\xi(\widetilde{Q}_j(z_j))$, через $\mathcal{P}_K(f)$ обозначим многочлен такой, что

$$\mathcal{P}_K(f)(z_j) = \int\limits_{Q'_j} d\mu_{2d-2}(z') \int\limits_{\gamma_{z'}} P_{Q_j(z_j)}(z',w) f(z',w)\;dw, \qquad j = 1,\dots,(m+1)^d. \tag{4.4}$$

Тогда $\mathcal{P}_K$ – проектор на пространство многочленов покоординатной степени не больше m, и $\mathcal{P}_K(T) = T$ для любого многочлена, степень которого по каждой координате не превосходит m, при этом

$$\max_{\operatorname{dist}(z,\ K)\leqslant\lambda h} |\mathcal{P}_K(f)(z)| \leqslant \frac{c}{\sigma(K)} \int\limits_K |f|\ d\sigma, \tag{4.5}$$

поскольку $\max\limits_{z\in Q_{\lambda h}} |P_{Q_h}(z)| < \frac{c(\lambda,\Omega)}{h^{2d-1}}$; константа c зависит только от параметров $\lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и области Ω и не зависит от K и f. Отсюда вытекает, что

$$\|f - \mathcal{P}_K f\|_{L^p(K)} \leqslant (c+1)E_m(f,\ K)_p,$$

значит, $\mathcal{P}_K f$ можно использовать вместо многочлена наилучшего приближения.

Замечание 4.1. Пусть $f \in H^p(\partial\Omega)$ и пусть $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} F_j$, где множества F_j такие, что $Q_h \subset \operatorname{pr}_\xi(F_j) \subset Q_{2h}$. Определим кусочно-полиномиальную функцию T_h, совпадающую на F_j с многочленом $\mathcal{P}_{F_j}$, тогда

$$\omega_m(f,h)_p \asymp \sup \|f - T_h\|_{L^p(\partial\Omega)},$$

где верхняя грань берётся по всем разбиениям этого типа.

Замечание 4.2. Отметим полезное неравенство, связывающее локальные полиномиальные приближения для разных показателей p:

$$E_m(f,K)_1 \leqslant \sigma(K)^{1-\frac{1}{p}} E_m(f,K)_p. \tag{4.6}$$

§5. Два способа псевдоаналитического продолжения

5.1. Продолжение с помощью локальных приближений. Пусть $f \in H^1(\Omega)$, m – целое число и $z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega$. Положим

$$E(f,z) = E_m(f,J(z))_1, \tag{5.1}$$

где

$$J(z) = \big\{\xi \in \partial\Omega : \pi_{z*}(\xi) \in Q_{\rho(z)/10}(z^*)\big\}. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Пусть*

$$E(f,z)\rho(z)^{-2d} \in L^p(\mathbb{C}^d \setminus \Omega) \tag{5.3}$$

при некотором $p \geqslant 1$. *Тогда* $f \in L^p(\partial\Omega)$ *и существует псевдоаналитическое продолжение* $\mathbf{f}$ *функции* f *такое, что*

$$|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \lesssim E(f,z)\rho(z)^{-2d}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Для начала покажем, что $f \in L^p(\partial\Omega)$, считая, что $p > 1$. Пусть множество $J \subset \partial\Omega$ таково, что $Q_h \subset \mathrm{pr}_\xi J \subset Q_{2h}$ для некоторой точки $\xi \in \partial\Omega$ и некоторого значения $h > 0$, сопоставим этому множеству область в $\mathbb{C}^d \setminus \Omega$:

$$L(J) = \Big\{ z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega : \mathrm{dist}(z,\ J) < h/10,\ \mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega) > h/100 \Big\}.$$

Очевидно, что $\mu_{2d}(L(J)) \asymp h^{2d}$ и $E(f,z) \geqslant E_m(f,J)_1,\ z \in L(J)$.

Рассмотрим последовательность разбиений границы области Ω:

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{2^{dn}} J_k^n, \quad \mathrm{diam}\ (J_k^n) \asymp 2^{-n}, \quad \sigma J_k^n \asymp 2^{-(2d-1)n},$$

причём каждое последующее разбиение получается из предыдущего делением всех его элементов на 2^d частей.

Определим функцию T_n на $\partial\Omega$, положив $T_n(z) = \mathcal{P}_{J_k^n} f(z)$ при $z \in J_k^n$, где $\mathcal{P}_{J_k^n}$ – полиномиальный проектор, определённый в предыдущей главе. Тогда $f = T_{n_0} + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (T_{n+1} - T_n)$ почти всюду на $\partial\Omega$, и остаётся проверить, что $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \|T_{n+1} - T_n\|_{L^p(\partial\Omega)} < \infty$.

Заметим, что при $z \in J_k^{n+1}$ справедливы соотношения

$$|T_{n+1}(z) - T_n(z)| = |\mathcal{P}_{J_k^{n+1}} f(z) - \mathcal{P}_{J_k^n} f(z)| \lesssim \frac{1}{\sigma(J_k^{n+1})} \int\limits_{J_k^{n+1}} |f - \mathcal{P}_{J_k^n} f|\, d\sigma$$

$$\lesssim 2^{-(2d-1)n} E_m(f, J_k^n)_1 \lesssim 2^{-(2d-1)n} \inf \big\{ E(f,z) : z \in L(J_k^n) \big\}.$$

Так как $\rho(z) \asymp 2^{-dn}$, то

$$\int\limits_{J_k^{n+1}} |T_{n+1} - T_n|^p\, d\sigma \lesssim 2^{-n(p-1)} \int\limits_{J_k^n} E(f,z)^p \rho(z)^{-2dp}\, d\mu_{2d}(z).$$

Рассмотрим область $L_n = \{z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega : 2^{-n-10} < \operatorname{dist}(z,\ \Omega) < 2^{-n}\}$, $n \geqslant n_0$, тогда $L(J_n^k) \subset L_n$ и

$$\|T_{n+1} - T_n\|_{L^p(\partial\Omega)} \lesssim 2^{-n(1-1/p)} \Biggl(\int\limits_{L_n} E(f,z)^p \rho(z)^{-2dp}\, d\mu_{2d}(z) \Biggr)^{1/p},$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \|T_{n+1} - T_n\|_{L^p(\partial\Omega)} \leqslant \Biggl(\int\limits_{\mathbb{C}^d\setminus\Omega} E(f,z)^p \rho(z)^{-2dp}\, d\mu_{2d}(z) \Biggr)^{1/p} < \infty.$$

Перейдём к построению продолжения функции f. Рассмотрим разбиение Уитни в области $\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}$, $\sum \chi_k = 1$, $|\operatorname{grad}\, \chi_k(z)| \lesssim \rho(z)^{-1}$. Пусть $z_k \in \operatorname{supp}\, \chi_k$, а $J_k = Q_{\rho(z_k)/100}(z_k^*)$. Положим

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(z) \mathcal{P}_{J_k} f(z), \quad z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega.$$

Заметим, что для произвольного многочлена $T(z)$ выполнено

$$\mathbf{f}(z) = T(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(z)(\mathcal{P}_{J_k} f(z) - T(z)), \quad z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega,$$

$$\overline{\partial}\mathbf{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{P}_{J_k} f(z) - T(z)) \overline{\partial}\chi_k(z), \quad z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega.$$

Пусть теперь $T = \mathcal{P}_{J(z)} f$, заметим, что $J_k \subset J(z)$, если $\chi_k(z) \neq 0$, поэтому благодаря оценке (4.5) имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_{J_k} f(z) - T(z)| &= |\mathcal{P}_{J_k}(f - T)(z)| \\ &\lesssim \sigma(J(z))^{-1} E(f,z) \lesssim \rho(z)^{-(2d-1)} E(f,z), \end{aligned}$$

и, кроме того, $\operatorname{supp}\, \mathbf{f} \subset \Omega_1$ и

$$|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \lesssim E(f,z)\rho(z)^{-2d} \in L^p(\mathbb{C}^d \setminus \Omega).$$

Теорема доказана. □

В доказательстве этой теоремы многочлены использовались для построения продолжения функции f. Обратно, пусть задано псевдоаналитическое продолжение функции f на пространство $\mathbb{C}^d$ и пусть

$J \subset \{\xi \in \partial\Omega : v(\xi, z_0) < h/A\}$ для некоторой точки $z_0 \in \partial\Omega$, где постоянная A выбрана согласно лемме 2.3. Рассмотрим многочлен степени m:

$$P_J(z) = \int\limits_{v(\xi,z_0)>2h} \overline{\partial}\mathbf{f}(\xi) \wedge \omega(\xi) K_m^{\mathrm{loc}}(\xi, z, z_0),$$

где форма $\omega(\xi)$ определена в (2.3), а ядро K_m^{loc} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} K(\xi, z) &= \frac{1}{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d} = \frac{1}{(\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle + \langle \partial\rho(\xi),\, z_0 - z\rangle)^d} \\ &= \frac{1}{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle^d}\left(1 + \frac{\langle \partial\rho(\xi),\, z_0 - z\rangle}{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle}\right)^{-d} \\ &= \frac{1}{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle^d}\Bigg(1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle \partial\rho(\xi),\, z_0 - z\rangle^k}{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle^k} \\ &\qquad + O\left(\frac{|\langle \partial\rho(\xi),\, z_0 - z\rangle|}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle|}\right)^{m+1}\Bigg) \\ &= K_m^{\mathrm{loc}}(\xi, z, z_0) + O\left(\frac{|\langle \partial\rho(\xi),\, z_0 - z\rangle|^{d+1}}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z_0\rangle|^{m+d+1}}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Заметим, что аналогично (2.5), при $|v(\xi, z_0)| > Ah$ и $|v(z, z_0)| < h$ имеем

$$|K(\xi, z) - K_m^{\mathrm{loc}}(\xi, z, z_0)| \lesssim \frac{v(z, z_0)^{\frac{m+1}{2}}}{v(\xi, z)^{d + \frac{m+1}{2}}}. \tag{5.6}$$

Многочлен P_J можно использовать вместо многочлена наилучшего приближения, при этом из оценки (5.6) следует, что

$$\begin{aligned} |f(z) - P_J(z)| \lesssim &\int\limits_{v(\xi,z_0)<2h} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)|\, d\mu_{2d}(z)}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle|^d} \\ &+ \int\limits_{v(\xi,z_0)>2h} |\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \frac{h^{\frac{m+1}{2}}}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle|^{d + \frac{m+1}{2}}}\, d\mu_{2d}(z) \end{aligned} \tag{5.7}$$

при $z \in J$.

5.2. Продолжение с помощью глобальных приближений.

Пусть функция $f \in H^1(\Omega)$ приближается в $L^1(\partial\Omega)$ последовательностью многочленов $P_1(z), P_2(z), \dots$ степени $1, 2, \dots$, соответственно. Положим

$$\lambda(z) = \rho(z)^{-1}|P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z)|, \quad 2^{-n} < \rho(z) < 2^{-n+1}.$$

Теорема 5.2. *Пусть $\lambda \in L^p(\mathbb{C}^d \setminus \Omega)$ при некотором $p \geqslant 1$. Тогда $f \in L^p(\partial\Omega)$ и существует псевдоаналитическое продолжение $\mathbf{f}$ функции f такое, что*

$$|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \lesssim \lambda(z), \quad z \in \mathbb{C}^d \setminus \Omega. \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть функция $\chi \in C^\infty(0, \infty)$ такова, что $\chi(t) = 1$ при $t \leqslant 1$ и $\chi(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Продолжение функции $\mathbf{f}$ определим по формуле

$$\mathbf{f}(z) = P_{2^n}(z) + \chi(2^n\rho(z))(P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z)), \quad 2^{-n} < \rho(z) < 2^{-n+1}.$$

Ясно, что функция $\mathbf{f}$ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{C}^d \setminus \overline{\Omega}$ и что $|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \lesssim \lambda(z)$. Введём теперь функцию $F_N(z)$ такую, что $F_N(z) = \mathbf{f}(z)$ при $\rho(z) > 2^{-N}$ и $F_N(z) = P_{2^{N+1}}(z)$ при $\rho(z) < 2^{-N}$. Тогда функция F_N бесконечно дифференцируема всюду и аналитична в области $\Omega_{2^{-N}}$, а вне её $|F_N(z)| \lesssim \lambda(z)$. Аналогично предыдущей теореме, получаем

$$P_{2^{n+1}}(z) = F_N(z) = \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\mathbb{C}^d \setminus \Omega} \frac{\overline{\partial}F_N(\xi) \wedge (\partial\rho(\xi) \wedge (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi), \xi - z\rangle^d}, \ z \in \Omega.$$

В этой формуле можно перейти к пределу по теореме о мажорируемой сходимости и, таким образом, продолжение построено. □

В приложениях (см. главу 7) P_n будут просто многочленами наилучшего приближения. Обратно, если задано продолжение с оценкой (5.8), то многочлены, дающие почти наилучшее приближение, получаются с помощью приближения ядра формулы Коши–Лере–Фантаппье, данного в лемме 2.10.

§6. Псевдоаналитическое продолжение функций из классов Бесова

Пусть $\mathbf{f}$ – псевдоаналитическое продолжение функции f, и пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим следующую характеристику функции $\mathbf{f}$:

$$S_p(\mathbf{f}, r) = \left(\int\limits_{\partial\Omega_r} |\overline{\partial}\mathbf{f}(z)|^p \, d\sigma_r(z) \right)^{1/p}, \quad r > 0. \tag{6.1}$$

Эта характеристика оказывается напрямую связянной с модулем гладкости функции f.

Теорема 6.1. *Пусть $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $s > 0$ и $f \in H^1(\Omega)$. Тогда $f \in A^s_{pq}(\Omega)$ в том и только том случае, когда существует псевдоаналитическое продолжение $\mathbf{f}$ функции f такое, что*

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{S_p(\mathbf{f}, r)}{r^{s-1}} \right)^q \frac{dr}{r} < \infty \tag{6.2}$$

при $q < \infty$, а при $q = \infty$

$$S_p(\mathbf{f}, r) \lesssim r^{s-1}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Пусть $f \in A^s_p(\Omega)$, воспользуемся конструкцией из теоремы 5.1 и построим продолжение функции f такое, что

$$|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \lesssim E(f, J(z))_1 \rho(z)^{-2d},$$

откуда, учитывая оценку $E(f, J(z))_1 \leqslant \sigma(J(z))^{1-\frac{1}{p}} E_m(f, J(z))_p$, выводим

$$S_p(\mathbf{f}, r)^p \lesssim r^{-(2d-1)-p} \int\limits_{\partial\Omega_r} E_m(f, J(z))_p^p \, d\sigma_r(z).$$

Оценим интеграл в правой части. Множества $J(z)$ образуют покрытие границы $\partial\Omega$, и можно выбрать такой конечный набор множеств $J_k = \{\xi \in \partial\Omega : \mathrm{pr}_{z_k^*}(\xi) \in Q_r(z_k^*)\}$, что для любой точки $z \in \partial\Omega_r$ окажется, что $J(z) \subset J_k$ для некоторого k, а каждая точка покрыта не более чем 5^{2d} интервалами. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial\Omega_r} E_m(f, J(z))_p^p \, d\sigma_r(z) \lesssim r^{2d-1} \sum_{k=1}^{N} E_m(f, J_k)_p^p \lesssim r^{2d-1} \omega_m(f, 10r)_p^p,$$

откуда $S_p(\mathbf{f}, r) \lesssim \omega_m(f, 10r)_p/r$ и условие (6.2) следует из определения пространства Бесова.

Обратно, пусть задано продолжение функции f, для которого выполняется оценка (6.2), не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{supp} \mathbf{f} \subset \Omega_2$. В силу неравенства (5.7) и поскольку произвольный куб $\widetilde{Q}_t$ содержится в эллипсоиде Хёрмандера $\{\xi \in \partial\Omega : v(\xi, z_0) < Ct\}$, где $z_0 \in \partial\Omega$, а $C > 0$ некоторая постоянная, зависящая только от области Ω, заключаем, что модуль непрерывности оценивается следующим образом:

$$\omega_m(f, c\delta)_p \lesssim \|g\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|h\|_{L^p(\partial\Omega)}$$

для некоторой постоянной $c > 0$, где

$$g(z) = \int\limits_{v(\xi,z)<2\delta} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle|^d}\, d\mu_{2d}(\xi), \qquad z \in \partial\Omega;$$

$$h(z) = \int\limits_{v(\xi,z)>\delta} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|\delta^{\frac{m+1}{2}}}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle|^{d+\frac{m+1}{2}}}\, d\mu_{2d}(\xi), \quad z \in \partial\Omega.$$

Введём в рассмотрение следующие функции:

$$g_r(z) = \int\limits_{\xi\in\partial\Omega_r,\ v(\xi,z)<2\delta} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle|^d}\, d\sigma_r(\xi), \qquad z \in \partial\Omega;$$

$$h_r(z) = \int\limits_{\xi\in\partial\Omega_r,\ v(\xi,z)>\delta} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|\delta^{\frac{m+1}{2}}}{|\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle|^{d+\frac{m+1}{2}}}\, d\sigma_r(\xi), \quad z \in \partial\Omega.$$

Тогда

$$\omega_m(f, c\delta)_p \lesssim \int\limits_0^{2\delta} \|g_r\|_{L^p(\partial\Omega)}\, dr + \int\limits_0^1 \|h_r\|_{L^p(\partial\Omega)}\, dr.$$

Мы покажем, что

$$\begin{aligned}
\|g_r\|_{L^p(\partial\Omega)} &\lesssim S_p(\mathbf{f}, r)\log\frac{2\delta}{r}, \quad 0 < r < 2\delta;\\
\|h_r\|_{L^p(\partial\Omega)} &\lesssim S_p(\mathbf{f}, r), \qquad\quad 0 < r < \delta;\\
\|h_r\|_{L^p(\partial\Omega)} &\lesssim S_p(\mathbf{f}, r)\frac{\delta^{\frac{m+1}{2}}}{r^{\frac{m+1}{2}}}, \quad r > \delta.
\end{aligned}$$

Эти оценки достаточно проверить при $p = 1$ и $p = \infty$, а при $1 < p < \infty$ они вытекают из интерполяционной теоремы Рисса–Торина. Благодаря оценкам леммы 2.7, при $p = 1$ имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} |g_r(z)|\, d\sigma(z) = \int\limits_{\partial\Omega_r} |\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|\, d\sigma(\xi) \int\limits_{\substack{z\in\partial\Omega,\\ v(\xi,z)<2\delta}} \frac{d\sigma(z)}{|\,\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle\,|^d}$$
$$\lesssim S_1(\mathbf{f}, r)\log\frac{\delta}{r},$$

при $p = \infty$ находим

$$|g_r(z)| \lesssim S_\infty(\mathbf{f}, r) \int\limits_{\substack{\xi\in\partial\Omega_r,\\ v(\xi,z)<2\delta}} \frac{d\sigma(\xi)}{|\,\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle\,|^n} \lesssim S_\infty(\mathbf{f}, r)\log\frac{\delta}{r},$$

что доказывает первую оценку. Оценки для функции h_r устанавливаются аналогично, следуя оценкам леммы 2.8.

Таким образом, мы показали, что

$$\omega_m(f, c\delta)_p \lesssim \int\limits_0^{2\delta} S_p(\mathbf{f}, r)\frac{\delta^\varepsilon}{r^\varepsilon}\, dr + \delta^{\frac{m+1}{2}} \int\limits_\delta^1 S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{r^{\frac{m+1}{2}}} \tag{6.4}$$

для любого $\varepsilon > 0$, и условие

$$\left(\int\limits_0^1 \omega_m(f, \delta)_p^q \delta^{-1-sq} d\delta\right)^{1/q} < \infty$$

при $1 \leqslant q < \infty$ будет следовать из неравенства Харди. Действительно, оценим первое слагаемое в правой части формулы (6.4), возьмём $\varepsilon = s/2$, положим

$$F_1(\delta) = \int\limits_0^\delta S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{r^\varepsilon},$$

тогда

$$\int_0^1 (\delta^\varepsilon F_1(\delta))^q \delta^{-1-sq} d\delta \lesssim \int_0^1 r^{-1-sq+\varepsilon q} \left(S_p(\mathbf{f}, r) r^{-\varepsilon} r\right)^q \, dr$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{S_p(\mathbf{f}, r)}{r^{s-1}}\right)^q \frac{dr}{r} < \infty.$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в правой части формулы (6.4), в предположении, что $s < (m+1)/2$ (заметим, что мы можем выбрать сколь угодно большое значение m, поскольку условие (1.5) не зависит от $m > s$). Далее,

$$F_2(\delta) = \int_0^\delta S_p(\mathbf{f}, r) \frac{dr}{r^{\frac{m+1}{2}}},$$

тогда

$$\int_0^1 (\delta^{\frac{m+1}{2}} F_2(\delta))^q \delta^{-1-sq} d\delta \lesssim \int_0^1 r^{-1-sq+\frac{m+1}{2}q} \left(S_p(\mathbf{f}, r) r^{-\frac{m+1}{2}} r\right)^q \, dr$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{S_p(\mathbf{f}, r)}{r^{s-1}}\right)^q \frac{dr}{r} < \infty.$$

При $q = \infty$ оценка $\omega_m(f, \delta)_p \lesssim \delta^s$ также легко получается из неравенства (6.4) и того, что $S_p(\mathbf{f}, r) \lesssim r^{s-1}$. Таким образом, доказательство теоремы завершено. □

§7. Конструктивная характеристика классов Бесова

Пусть P_n – последовательность многочленов наилучшего приближения. Согласно теореме 5.2, можно построить псевдоаналитическое продолжение $\mathbf{f}$ функции f такое, что

$$|\overline{\partial}\mathbf{f}(z)| \lesssim \rho(z)^{-1} |P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z)|, \quad 2^{-n} \leqslant \rho(z) \leqslant 2^{-n+1}. \tag{7.1}$$

Допустим, что $0 \in \Omega$. Любую точку $z \in \mathbb{C}^d$ можно представить в виде $z = uv$, где $u = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ и

$$v \in C = \{(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{C}^d : v_1 \in [0,1],\ v_1^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_d|^2 = 1\}.$$

Запишем в этих координатах границу области Ω_δ, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Заметим, что каждый вектор $v \in C$ порождает комплексную плоскость $T_v = \{uv : u \in \mathbb{C}\}$, причем сечение области Ω_δ этой плоскостью является выпуклой областью с гладкой границей $\Omega_{v,\delta}$, а граница области зависит от параметров v и δ непрерывным образом. Следовательно,

$$\partial\Omega_\delta = \{r_\delta e^{i\varphi} v \in \mathbb{C}^d, r_\delta = r(\delta, \varphi, v)\} = \{r(\delta, \varphi, v) e^{i\varphi} v, \varphi \in [0, 2\pi],\ v \in C\},$$

и параметры $(\varphi, v) \in [0, 2\pi] \times C$ задают на $\partial\Omega_\delta$ гладкие координаты, причём поскольку r_δ также зависит гладким образом от параметра δ, соотношение $d\sigma_\delta \asymp |du|\, d\mu_{2d-2}(v_2, \dots, v_d)$ выполнено равномерно по $\delta \in [0,1]$. Последнее, очевидно, справедливо в случае сферы $\mathbb{S}_{2d-1} = \{z \in \mathbb{C}^d : |z| = 1\}$, но строго выпуклая область диффеоморфна сфере посредством отображения $z \to \frac{z}{|z|}$ и, следовательно, утверждение верно и в общем случае. Равномерность по $\delta \in [0,1]$ следует из глакости функции $r(\delta, \varphi, v)$.

Зафиксируем теперь вектор $v \in C$, как и выше ему сопоставлено семейство областей $\Omega_{v,\delta} = \{uv \in \Omega_\delta : u \in \mathbb{C}\}$, отождествим плоскость T_v с пространством $\mathbb{C}$ и рассмотрим области вида

$$\widetilde{\Omega}_{v,\delta} = \{u \in \mathbb{C} : uv \in \Omega_{v,\delta}\}.$$

Рассмотрим конформное отображение ψ_v области $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\Omega}_{v,0}$ на дополнение к диску $\{u \in \mathbb{C} : |u| > 1\}$, нормированное условием $\psi_v'(\infty) > 0$. Ввиду гладкости границы отображение ψ_v продолжается до конформного отображения замкнутых областей и непрерывно зависит от $v \in C$, откуда $|\psi_v(u)| \asymp 1 + \operatorname{dist}(u,\ \widetilde{\Omega}_{v,0}) \asymp 1 + \rho(uv)$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_v(u) = \frac{P_{2^{n+1}}(uv) - P_{2^n}(uv)}{\psi_v(u)^{2^{n+2}}},$$

аналитическую в $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\Omega}_{v,0}$, и при этом $|u|\Phi_v(u) \to 0,\ u \to \infty$, следовательно,

$$\|\Phi_v\|_{H^p(\mathbb{C}\setminus\widetilde{\Omega}_{v,0})} \asymp \sup_{0<\delta<\infty}\Biggl(\int\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_{v,\delta}} |\Phi_v(u)|^p|du|\Biggr)^{1/p}$$

$$\lesssim c(\Omega_{v,0})\Biggl(\int\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_{v,0}} |\Phi_v(u)|^p|du|\Biggr)^{1/p}.$$

Константа $c(\Omega_{v,0}) > 0$ определяется из геометрии области $\Omega_{v,0}$ и зависит от v непрерывно, следовательно, $c(\Omega_{v,0}) < c < \infty$.

Заметим, что $|\psi_v(u)|^{2^{n+2}} \asymp (1+2^{-n})^{2^{n+2}} \asymp 1$ при $u \in \Omega_{v,2^{-n}}\setminus\Omega_{v,2^{-n-1}}$ и $|\psi_v(u)| = 1$ при $u \in \partial\Omega_{v,0}$, откуда

$$\Biggl(\int\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_{v,\delta}} |P_{2^{n+1}}(uv) - P_{2^n}(uv)|^p|du|\Biggr)^{1/p}$$

$$\lesssim \Biggl(\int\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_{v,\delta}} |\Phi_v(u)|^p|du|\Biggr)^{1/p} \lesssim \Biggl(\int\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_{v,0}} |\Phi_v(u)|^p|du|\Biggr)^{1/p}$$

$$= \Biggl(\int\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_{v,0}} |P_{2^{n+1}}(uv) - P_{2^n}(uv)|^p|du|\Biggr)^{1/p}, \quad 2^{-n} \leqslant \delta < 2^{-n+1},$$

причём все оценки равномерны, что вместе с соотношением $d\sigma_\delta \asymp |du|\,d\mu_{2d-2}$ даёт оценку интегралов по границам областей $\partial\Omega_\delta$:

$$\Biggl(\int\limits_{\partial\Omega_\delta} |P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z)|^p\,d\sigma_\delta(z)\Biggr)^{1/p}$$

$$\lesssim \Biggl(\int\limits_{\partial\Omega} |P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z)|^p\,d\sigma(z)\Biggr)^{1/p}, \quad 2^{-n} \leqslant \delta < 2^{-n+1}.$$

Таким образом, учитывая свойство (7.1) продолжения $\mathbf{f}$, получаем оценку

$$S_p(\mathbf{f},\delta) \lesssim 2^n E_{2^n}(f)_p, \quad 2^{-n} < \delta \leqslant 2^{-n+1}. \qquad (7.2)$$

Теорема 7.1. *Пусть* $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty,\ s > 0$ *и* $f \in H^p(\partial\Omega)$. *Тогда* $f \in A^s_{pq}(\Omega)$ *в том и только том случае, если*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^s E_n(f)_p)^q\right)^{1/q} < \infty \tag{7.3}$$

при $q < \infty$, *а при* $q = \infty$

$$E_n(f)_p \lesssim n^{-s}, \quad n = 1, \ldots, \infty.$$

Доказательство. Заметим, что $E_n(f)_p$ монотонно убывает с ростом n, поэтому условие (7.3) эквивалентно условию

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nsq} E_{2^n}(f)_p^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Пусть выполнено условие (7.3), тогда, воспользовавшись конструкцией из теоремы 5.2, можно построить псевдоаналитическое продолжение $\mathbf{f}$ функции f такое, что

$$S_p(\mathbf{f}, r) \lesssim 2^n E_{2^n}(f)_p, \quad 2^{-n} \leqslant r \leqslant 2^{-n+1},$$

и

$$\left(\int_0^1 \left(\frac{S_p(\mathbf{f}, r)}{r^{s-1}}\right)^q \frac{dr}{r}\right)^{1/q} \lesssim \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{ns} E_{2^n}(f)_p^q\right)^{1/q} < \infty, \tag{7.4}$$

откуда $f \in A^s_{pq}(\Omega)$ согласно теореме 6.1.

Обратно, пусть $f \in A^s_{pq}(\Omega)$, тогда существует псевдоаналитическое продолжение функции f с оценкой (6.2). Мы докажем более точную оценку наилучших приближений

$$E_n(f)_p \lesssim \int_0^{1/n} S_p(\mathbf{f}, r) \frac{dr}{(nr)^{\varepsilon}}\, dr + \int_{1/n}^{\infty} S_p(\mathbf{f}, r) \frac{dr}{(nr)^{\alpha}}, \tag{7.5}$$

где значение параметра α сколь угодно велико, а значение параметра $\varepsilon > 0$ мало. Построим многочлены, приближающие функцию f. Для этого воспользуемся приближением ядра Коши–Лере–Фантаппье из леммы 2.10 и положим

$$P_n(z) = \int_{\mathbb{C}^d \setminus \Omega} \overline{\partial}\mathbf{f} \wedge \omega(\xi) K_n^{\mathrm{glob}}(\xi, z),$$

тогда

$$|f(z)-P_n(z)| \lesssim \int\limits_{\mathbb{C}^d\setminus\Omega} |\overline{\partial}\mathbf{f}| \left| \frac{1}{\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d} - K_n^{\mathrm{glob}}(\xi,z) \right| d\mu_{2d}(\xi)$$
$$\leqslant U(z)+V(z)+W_1(z)+W_2(z),$$

где μ_{2d} – мера Лебега в $\mathbb{C}^d$ и

$$U(z) = \int\limits_{v(\xi,z)<1/n} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|}{|\,\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle\,|^d}\, d\mu_{2d}(\xi),$$

$$V(z) = n^d \int\limits_{v(\xi,z)<1/n} |\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|\, d\mu_{2d}(\xi),$$

$$W_1(z) = \frac{1}{n^\alpha} \int\limits_{\substack{v(\xi,z)<1/n,\\ \rho(z)<1/n}} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|}{|\,\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle\,|^{d+\alpha}}\, d\mu_{2d}(\xi),$$

$$W_2(z) = \frac{1}{n^\alpha} \int\limits_{\rho(z)>1/n} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|}{|\,\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle\,|^{d+\alpha}}\, d\mu_{2d}(\xi),$$

где α – некоторое фиксированное число, большее показателя s.

Отметим, что $V(z) \leqslant U(z)$. Далее,

$$U(z) \lesssim \int\limits_0^{1/n} dr \int\limits_{\partial\Omega_r} \frac{|\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)|\, d\sigma_r(\xi)}{|\,\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle\,|^d} = \int\limits_0^{1/n} g_r(z)\, dr.$$

Легко показать, что $\|g_r\|_{L^p(\partial\Omega)} \lesssim \int\limits_0^{1/n} S_p(\mathbf{f},r) \log\frac{2}{nr}\, dr$, откуда по интегральному неравенству Минковского

$$\|U\|_p \lesssim \int\limits_0^{1/n} S_p(\mathbf{f},r) \log\frac{2}{nr}\, dr.$$

Аналогично получаем оценки

$$\|W_1\|_p \lesssim \int\limits_0^{1/n} S_p(\mathbf{f},r)\, dr; \quad \|W_2\|_p \lesssim \int\limits_{1/n}^{\infty} S_p(\mathbf{f},r) \frac{dr}{(nr)^\alpha},$$

что завершает доказательство неравенства (7.5).

Итоговая оценка (7.3) при $1 \leqslant q < \infty$ будет следовать из неравенства Харди. Действительно, положим $F(t) = \int\limits_0^t S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{r^\varepsilon}$ и пусть $\varepsilon < s$, тогда в силу монотонности функции F имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1}\left(\int\limits_0^{1/n} S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{(nr)^\varepsilon}\right)^q \lesssim \int\limits_0^\infty t^{(\varepsilon-s)q-1}F(t)^q\,dt$$
$$\lesssim \int\limits_0^\infty r^{(\varepsilon-s)q-1}(S_p(\mathbf{f}, r)r^{1-\varepsilon})^q\,dr = \int\limits_0^\infty S_p(\mathbf{f}, r)^q r^{-q(s-1)-1}\,dr < \infty. \quad (7.6)$$

Пусть

$$G(t) = \int\limits_t^\infty S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{r^\alpha},$$

при этом $\alpha > s$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1}\left(\int\limits_{1/n}^{\infty} S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{(nr)^\alpha}\right)^q \lesssim \int\limits_0^\infty t^{(\alpha-s)q-1}G(t)^q\,dt$$
$$\lesssim \int\limits_0^\infty r^{(\alpha-s)q-1}(S_p(\mathbf{f}, r)r^{1-\alpha})^q\,dr = \int\limits_0^\infty S_p(\mathbf{f}, r)^q r^{-q(s-1)-1}\,dr < \infty. \quad (7.7)$$

Таким образом, из оценок (7.5)–(7.7) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^s E_n(f)_p)^q \lesssim \int\limits_0^\infty \left(\frac{S_p(\mathbf{f}, r)}{r^{s-1}}\right)^q \frac{dr}{r} < \infty.$$

При $q = \infty$, очевидно, получаем $E_n(f)_p \lesssim n^{-s}$, и доказательство теоремы завершено. $\square$

§8. Ограниченность оператора Коши–Лере–Фантаппье в пространствах Бесова

Теорема 6.1 имеет много интересных применений, так, из её доказательства можно вывести непрерывность оператора Коши–Лере–Фантаппье в некоторых пространствах Бесова.

Теорема 8.1. *Пусть* $1 < p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty$ *и* $0 < s < 1$, *тогда оператор* K_d *непрерывно отображает пространство* $B^s_{pq}(\partial\Omega)$ *на пространство* $A^s_{pq}(\Omega)$ *и*

$$\|K_d f\|_{A^s_{pq}(\Omega)} \leqslant c(\Omega, p, q, s)\|f\|_{B^s_{pq}(\partial\Omega)}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Напомним, что $\|f\|_{B^s_{pq}(\partial\Omega)} = \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} + \widetilde{c}_{pq}(f)$, где $\widetilde{c}_{pq}(f)$ определяется в теореме 3.4. Оператор K_d ограничен на $L^p(\partial\Omega)$ согласно работе [7], следовательно, $K_d f \in L^p(\partial\Omega)$. Пусть теперь $f \in B^s_{pq}(\partial\Omega)$, тогда в конструкции главы 3 можно, пользуясь только локальными приближениями постоянными, построить продолжение $\mathbf{f}$ функции f такое, что $|\overline{\partial}\mathbf{f}| \leqslant E(f,z)\rho(z)^{-2d}$. Следовательно, аналогично теореме 6.1, $S_p(\mathbf{f}, r) \lesssim \omega_m(f, 10r)/r$. Кроме того, аналогично формуле (2.2),

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{r\to 0+} \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\partial\Omega_r} \frac{\mathbf{f}(\xi)\partial\rho(\xi)\wedge(\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d} \\ &= \lim_{r\to 0+} \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\mathbb{C}^d\setminus\Omega_r} \frac{\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)\wedge\partial\rho(\xi)\wedge(\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\limits_{\mathbb{C}^d\setminus\Omega} \frac{\overline{\partial}\mathbf{f}(\xi)\wedge\partial\rho(\xi)\wedge(\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^{d-1}}{\langle\partial\rho(\xi),\, \xi - z\rangle^d}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

откуда, как и в теореме 6.1, повторяя рассуждение оценки (5.7), получаем неравенство

$$\omega_m(K_d f, \delta)_p \lesssim \int\limits_0^{2\delta} S_p(\mathbf{f}, r)\frac{\delta^\varepsilon}{r^\varepsilon}\, dr + \delta^{\frac{m+1}{2}} \int\limits_\delta^\infty S_p(\mathbf{f}, r)\frac{dr}{r^{\frac{m+1}{2}}}, \tag{8.3}$$

откуда уже

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{pq}(K_d f)^q &= \int\limits_0^1 \left(\frac{\omega_m(K_d f, \delta)_p}{\delta^s}\right)^q \frac{d\delta}{\delta} \lesssim \int\limits_0^1 \left(\frac{S_p(\mathbf{f}, r)_p}{r^{s-1}}\right)^q \frac{dr}{r} \\ &\lesssim \int\limits_0^1 \left(\frac{\omega_m(f, r)_p}{r^s}\right)^q \frac{dr}{r} \lesssim \widetilde{c}_{pq}(f)^q, \end{aligned} \tag{8.4}$$

что вместе с непрерывностью оператора K_d на $L^p(\partial\Omega)$ заканчивает доказательство теоремы. □

Заметим, что, согласно работе [6], оператор K_d также ограничен в пространстве Гёльдера $\Lambda^s(\partial\Omega) = B^s_\infty(\partial\Omega)$ при $0 < s < 1$.

§9. Заключение

Полученная в теореме 7.1 характеристика в целом схожа с характеристикой классов Бесова, полученной Е. М. Дынькиным в [5], однако по формулировке она ближе к аналогичному утверждению для периодических классов Бесова на $[-\pi, \pi]$. Причина такого упрощения условия заключается в гладкости области, необходимой для применения формулы Коши–Лере–Фантаппье. Отметим, что и в одномерном случае, если предположить гладкость границы области, то мы придём к условию (7.3). Окончательный результат можно сформулировать в виде общего утверждения.

Теорема 9.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ *– область с гладкой границей, строго выпуклая в смысле* (1.1) *и пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $s > 0$, *и* $f \in H^p(\partial\Omega)$. *Тогда* $f \in A^s_{pq}(\Omega)$ *в том и только том случае, если*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^s E_n(f)_p)^q\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leqslant q < \infty; \tag{9.1}$$

и

$$E_n(f)_p \lesssim n^{-s}, \quad q = \infty. \tag{9.2}$$

Отметим также, что предложенные в §5 методы псевдоаналитического продолжения важны сами себе, поскольку позволяют изучать гладкость граничных значений аналитических функций и получать условия, аналогичные теореме 6.1.

Литература

1. Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в комплексном анализе.* Наука, М. 1979.
2. Ю. А. Брудный, *Пространства, определяемые с помощью локальных приближений.* — Тр. ММО, **24**, Изд-во Московского ун-та, М., 1971, 69–132.
3. Ю. А. Брудный, И. П. Иродова, *Нелинейная сплайн-аппроксимация функций многих переменных и B-пространства.* — Алгебра и анализ **4:4** (1992), 45–79.
4. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
5. Е. М. Дынькин, *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова.* — Спектральная теория функций и операторов. II, Сборник статей, Тр. МИАН СССР **155** (1981), 41–76.

6. А. С. Роткевич, *Формула Айзенберга в невыпуклых областях и некоторые её приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **389** (2011), 206–231.
7. А. С. Роткевич, *Интеграл Коши–Лере–Фантаппье в линейно выпуклых областях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **401** (2012), 172–188.
8. Г. Г. Харди, Дж. И. Литлвуд, Д. Пойа, *Неравенства.* ИЛ, М., 1948.
9. Н. А. Широков, *Прямая теорема в строго выпуклой области в* $\mathbb{C}^n$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **206** (1993), 152–175.
10. Н. А. Широков, *Равномерные полиномиальные приближения в выпуклых областях в* $\mathbb{C}^n$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **333** (2006), 98–112.
11. K. Adachi, *Several complex variables and integral formulas.* World Scientific, 2007.
12. F. Beatrous Jr., *Estimates for extensions of holomorphic functions.* — Michigan Math. J. **32** (1985), 361-380.
13. Bloom T. et al. *Polynomial interpolation and approximation in* $\mathbb{C}^d$, (2011) `arXiv preprint arXiv:1111.6418`.
14. C. Fefferman, E. M. Stein, H^p *spaces of several variables.* — Acta Math. **129**, No. **1** (1972), 137–193.
15. J. Leray, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe.* (*Problème de Cauchy.* III). — Bulletin de la Société mathématique de France **87** (1959), 81–180.
16. N. Levenberg, *Approximation in* $\mathbb{C}^N$. — Surv. Appr. Theory **2** (2006), 92-140.
17. R. M. Range, *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* Springer-Verlag, 1986.
18. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^d$. Springer-Verlag, 1980.
19. M. Simon Salamon, *Hermitian geometry.* — in: Invitations to Geometry and Topology, Oxf. Grad. Texts Math **7** (2002), pp. 233–291.
20. N. A. Shirokov, *Jackson–Bernstein theorem in strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$. — Constructive Approximation **5**, No. 1 (1989), 455–461.
21. E. L. Stout, H^p*-functions on strictly pseudoconvex domains.* — Amer. J. Math. **98**, No. **3** (Autumn, 1976), 821–852.
22. H. Triebel, *Theory of function spaces.* III, Birkhauser Basel **3** (2006).

Rotkevich A. S. Constructive description of the Besov classes in convex domains in $\mathbb{C}^d$.

The method of pseudoanalytic continuation developed by E. M. Dyn'kin is extended to convex domains in $\mathbb{C}^d$ and is used to give a constructive description of the Besov classes in such domains.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `rotkevichas@gmail.com`

Поступило 21 мая 2013 г.