Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

Н. Н. Осипов

НЕРАВЕНСТВО ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ–РУБИО ДЕ ФРАНСИА В ПРОСТРАНСТВАХ МОРИ–КАМПАНАТО: АНОНС

§1. История вопроса

Настоящая заметка представляет собой анонс, за доказательствами можно обратиться к препринту [10].

Пусть $\Delta_m = [a_m, b_m]$ – попарно непересекающиеся интервалы на прямой $\mathbb{R}$ с длинами $l_m = b_m - a_m$. Здесь индекс m пробегает некоторое не более чем счетное множество $\mathcal{M}$. Введём операторы M_{Δ_m} формулой

$$M_{\Delta_m} f = (\widehat{f}\chi_{\Delta_m})^{\vee}.$$

В 1983 году Рубио де Франсиа доказал (см. [11]), что

$$\Big\| \Big(\sum_m |M_{\Delta_m} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 2 \leqslant p < \infty, \tag{1}$$

где константа C_p не зависит ни от функции f, ни от интервалов Δ_m. Из соображений двойственности вытекает, что эта оценка эквивалентна следующему неравенству:

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C_p \Big\| \Big(\sum_m |f_m|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{2}$$

где $\{f_m\}$ – последовательность функций, таких что $\operatorname{supp} \widehat{f}_m \subset \Delta_m$. В 1984 году Бургейн (см. [3]) доказал, используя иную технику, что оценка (2) остается верной при $p = 1$. Однако в 2005 году Кисляков и Парилов, применив технику, сходную с той, которую использовал Рубио де Франсиа, установили (см. [2]), что оценка (2) выполняется для всех $0 < p \leqslant 2$. Для $p \leqslant 1$ это скорее H^p- чем L^p-оценка: идея упомянутого доказательства в значительной мере опиралась на свойства

Ключевые слова: неравенство Литлвуда–Пэли, классы Гёльдера, пространства Мори–Кампанато.

Поддержано лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026), РФФИ (грант No. 11-01-00526) и стипендией им. Рохлина.

операторов типа Кальдерона–Зигмунда, действующих на “вещественных” классах Харди H^p (см., например, [7,12]).

Как известно, в качестве пространства, двойственного к классу H^1, выступает BMO, а пространствами, двойственными к классам H^p при $p<1$, являются классы Гёльдера (см. [6,12]). Возникает естественный вопрос: существует ли двойственный вариант оценки (2) для показателей $p \in (0,1]$? В отличие от случая $1<p\leqslant 2$, прямое доказательство “по двойственности” здесь не работает: в доказательстве неравенства (2) классы H^p возникают непрямым образом. Функция f, спектр которой лежит в интервале $[a,b]$, естественным образом порождает по крайней мере две функции из класса H^p – функцию $e^{-2\pi i\,ax}f(x)$ и функцию $e^{-2\pi i\,bx}f(x)$ (одна из них является “аналитической”, другая – “антианалитической”). Обе эти функции используются в доказательстве оценки (2) для $p\in(0,1]$.

В [1,2,11] фактически рассматривались операторы вида

$$S^1 f(x) = \left\{e^{-2\pi i\,a_m x} M_{\Delta_m} f(x)\right\}_{m\in\mathcal{M}},$$

$$S^2 f(x) = \left\{e^{-2\pi i\,b_m x} M_{\Delta_m} f(x)\right\}_{m\in\mathcal{M}}$$

(или сопряженные к ним). Но хорошо известно (и легко проверяется), что эти операторы не ограничены на пространствах, двойственных к классам H^p при $0<p\leqslant 1$. Объяснение для пространства $\mathrm{BMO} = (H^1)^*$, кстати, приведено в [10].

§2. Предварительная формулировка

Оказывается, что после небольшого исправления операторы S^1 и S^2 все же становятся ограниченными на пространстве BMO и на классах Гёльдера. Нужно лишь сгладить каждый мультипликатор χ_{Δ_m} на *одном* из концов отрезка Δ_m.

Сначала мы сформулируем упрощенную версию основной теоремы. Для этого потребуются некоторые новые объекты. Пусть ψ^1 и ψ^2 – функции из $C^\infty([0,1])$, такие что

$$\operatorname{supp}\psi^1 \subset \left[0,\tfrac{2}{3}\right], \quad \operatorname{supp}\psi^2 \subset \left[\tfrac{1}{3},1\right],$$

$$\psi^1+\psi^2 \equiv 1 \quad \text{на} \quad [0,1].$$

Продолжим эти функции нулем на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$. Используя сдвиги и растяжения, мы можем построить функции ψ_m^1 и ψ_m^2, такие что $\psi_m^1 + \psi_m^2 \equiv \chi_{\Delta_m}$:

$$\psi_m^\sigma(\xi) = \psi^\sigma\left(\frac{\xi - a_m}{l_m}\right), \quad \sigma = 1, 2.$$

Каждая такая функция – гладкая на одном из концов соответствующего интервала. Переопределим операторы S^1 и S^2, используя вместо мультипликаторов χ_{Δ_m} функции ψ_m^σ:

$$S^1 f(x) = \left\{e^{-2\pi i\, a_m x}\big(\widehat{f}\psi_m^1\big)^{\vee}(x)\right\}_{m\in\mathcal{M}},$$

$$S^2 f(x) = \left\{e^{-2\pi i\, b_m x}\big(\widehat{f}\psi_m^2\big)^{\vee}(x)\right\}_{m\in\mathcal{M}}.$$

Теорема 1. *Если* $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$, *то* $S^\sigma f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ *и*

$$\|S^\sigma f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}, \quad \sigma = 1, 2.$$

Утверждение останется верным, если заменить пространство BMO *на любой из классов Гёльдера* $\mathrm{Lip}_s(\mathbb{R})$, $0 < s < 1$, *норма в котором определяется формулой*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_s} = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}.$$

Замечание. Более того, если функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка s, $0 < s < 1$, лишь в одной точке, то функция $S^\sigma f$ удовлетворяет некоему интегральному аналогу условия Гёльдера в той же точке.

§3. Окончательная формулировка

Для формулирования окончательного варианта теоремы нам потребуется некоторая подготовка. Через $\mathcal{P}_i$ мы обозначим пространство алгебраических полиномов степени строго меньше чем i и положим $\mathcal{P}_0 = \{0\}$. Для l^2-значных полиномов будем использовать обозначение $\mathcal{P}_i(l^2)$. Дадим определение пространств Мори–Кампанато $\dot{C}_p^{s,i}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. *Рассмотрим параметры*[1] $i \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [1, \infty)$ *и* $s \in (-n/p, i]$. *Пусть* f *– локально суммируемая функция на* $\mathbb{R}^n$ *(скалярная*

[1] С этого момента мы считаем, что если специально не оговорено иное, то числа i, p и s лежат в указанных пределах.

или l^2-значная). Мы говорим, что $f \in \dot{C}_p^{s,i}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|f\|_{i,p,s} = \sup_Q \inf_P \frac{1}{|Q|^{s/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left| f - P \right|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

где супремум берется по всем кубам в $\mathbb{R}^n$, а инфимум – по всем полиномам из $\mathcal{P}_i$ (или из $\mathcal{P}_i(l^2)$).

Оказывается, что меняя показатель p, мы будем получать эквивалентные нормы. Также хорошо известно, что при неотрицательных s пространства Мори–Кампанато совпадают либо с BMO, либо с классами гладких функций. Сформулируем соответствующий результат для $s \in [0, 1]$.

Лемма 1. *Зафиксируем любое $p \in [1, \infty)$. Тогда*

- *пространство $\dot{C}_p^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ (в смысле эквивалентности норм);*
- *если $0 < s \leqslant 1$, то пространство $\dot{C}_p^{s,1}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классом Гёльдера $\mathrm{Lip}_s(\mathbb{R}^n)$.*

Первая часть леммы является хорошо известным следствием неравенства Джона–Ниренберга. Доказательство второй части можно найти в работах [4,9] (также см. §1.1.2 в книге [8]). Отметим, что на самом деле все пространства Кампанато (пространства $\dot{C}_p^{s,i}$ при $s > 0$) могут быть перенормированы в терминах конечных разностей (подробности см. в §4.1.1 книги [8]).

Поскольку окончательный вариант теоремы будет описывать поточечные свойства интересующих нас объектов, нам понадобятся максимальные функции, соответствующие нормам Мори–Кампанато.

Определение 2. *Пусть h – локально суммируемая функция на $\mathbb{R}^n$ (скалярная или l^2-значная). Тогда максимальная функция $M_{i,p,s}h$ определяется по формуле*

$$M_{i,p,s}h(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_P \frac{1}{|Q|^{s/n}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left| h - P \right|_{l^2}^p \right)^{1/p},$$

где супремум берется по всем кубам, содержащим x, а инфимум – по всем полиномам из $\mathcal{P}_i$ (или из $\mathcal{P}_i(l^2)$).

Такие максимальные операторы были подробно изучены в [5].

Следующая лемма, неявно доказанная в §4.4.1 книги [8], поможет нам избавиться от требования $f \in L^2$, которое фигурировало в теореме 1.

Лемма 2. *Пусть β – положительное число, такое что*

$$\beta > \max\{s, i-1\}.$$

Рассмотрим локально суммируемую на $\mathbb{R}^n$ функцию f (скалярную или l^2-значную), такую что функция $M_{i,p,s}f$ конечна хотя бы в одной точке. При перечисленных условиях функция

$$|f(x)|(1+|x|^{n+\beta})^{-1}$$

окажется суммируемой.

Теперь рассмотрим локально суммируемую функцию f, такую что соответствующая максимальная функция $M_{i,p,s}f$ конечна хотя бы в одной точке. Пусть φ – функция из класса Шварца $\mathcal{S}$. Тогда из леммы 2 вытекает следующее: преобразование Фурье функции f корректно определено, $f*\varphi \in C^\infty$, $f*\varphi \in \mathcal{S}'$ и $\widehat{f*\varphi} = \widehat{f}\,\widehat{\varphi}$. Теперь мы готовы сформулировать нашу основную теорему в окончательном варианте, в котором отсутствует требование $f \in L^2$, а вместо оценок на нормы фигурируют поточечные оценки максимальных функций.

Теорема 2. *Рассмотрим интервалы $\{\Delta_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ и функции ψ_m^σ, $\sigma = 1,2$, введенные ранее. Пусть f – функция из пространства $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, такая что максимальная функция $M_{i,2,s}f$ конечна в некоторой точке. Тогда для каждого индекса m существуют две последовательности функций $\psi_{m,\nu}^\sigma \in \mathcal{S}$ (выбор которых не зависит от f) и две последовательности полиномов $p_{m,\nu}^\sigma \in \mathcal{P}_r$ (которые зависят от f)[2], такие что*

1) *последовательности $\psi_{m,\nu}^\sigma$ сходятся к функциям ψ_m^σ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ при $\nu \to \infty$;*
2) *существуют две функции $g^\sigma = \{g_m^\sigma\}_{m\in\mathcal{M}}$ из пространства $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, l^2)$, такие что*

$$\Big\{e^{-2\pi i\, a_m x}\big(\widehat{f}\psi_{m,\nu}^1\big)^\vee(x) - p_{m,\nu}^1(x)\Big\}_{m\in\mathcal{M}} \to g^1,$$
$$\Big\{e^{-2\pi i\, b_m x}\big(\widehat{f}\psi_{m,\nu}^2\big)^\vee(x) - p_{m,\nu}^2(x)\Big\}_{m\in\mathcal{M}} \to g^2$$

[2] Здесь мы не требуем, чтобы $\{p_{m,\nu}^\sigma\}_{m\in\mathcal{M}} \in \mathcal{P}_r(l^2)$.

при $\nu \to \infty$, *где пределы могут быть взяты в пространстве* $L^2(I, l^2)$ *для любого отрезка* I;

3) *положив*

$$\widetilde{S}^\sigma f = g^\sigma,$$

мы придем к оценкам

$$M_{r,2,s}\big(\widetilde{S}^\sigma f\big) \leqslant C M_{i,2,s} f,$$

где константа C *не зависит ни от функции* f, *ни от интервалов* Δ_m.

Нетрудно понять, что из теоремы 2 сразу же вытекает теорема 1 и замечание к ней. Доказательство теоремы 2, как уже говорилось, доступно в препринте [10].

Литература

1. С. В. Кисляков, *Теорема Литлвуда-Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **355** (2008), 180–198.
2. С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **327** (2005), 98–114.
3. J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system.* — Bull. Soc. Math. Belg. **37**, No. 1 (1985), 20–26.
4. S. Campanato, *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni.* — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 175–188.
5. Ronald A. DeVore, Robert C. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness.* — Mem. of the Amer. Math. Soc. **47**, No. 293 (1984).
6. P. L. Duren, B. W. Romberg, and A. L. Shields, *Linear functionals on* H^p *spaces with* $0 < p < 1$. — J. reine angew. Math. **238** (1969), 32–60.
7. C. Fefferman and E. M. Stein, H^p *spaces of several variables.* — Acta Math. **129** (1972), 137–193.
8. Sergey Kislyakov and Natan Kruglyak, *Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney-Besicovitch Coverings, and Singular Integrals.* Monografie Matematyczne, Instytut Matematyczny PAN, Vol. 74 (New Series), Birkhäuser, 2013.
9. G. N. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity.* — Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 1964, 717–721.
10. Nikolay N. Osipov, *Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality in Morrey–Campanato spaces*, http://arxiv.org/abs/1211.0696
11. José L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.* — Rev. Mat. Iberoamer. **1**, No. 2 (1985), 1–14.
12. Elias M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton, New Jersey (1993).

Osipov N. N. Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality in Morrey–Campanato spaces: an announcement.

A one-sided Littlewood–Paley-type L^p-inequality, $2 \leqslant p < \infty$, for arbitrary intervals was proved in 1983 by Rubio de Francia. By a refinement of his methods, it is possible to prove an analog of this inequality for “exponents beyond infinity”, i.e., for BMO and Hölder classes.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nicknick@pdmi.ras.ru

Поступило 7 июля 2013 г.