Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

И. Р. Каюмов, А. В. Каюмова

СХОДИМОСТЬ МНИМЫХ ЧАСТЕЙ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$ ПРИ $p<1$

§1. Введение и основной результат

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2, \dots, z_n = x_n + iy_n$ – точки на комплексной плоскости. Наипростейшей дробью называется выражение

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t - z_k},$$

т.е. логарифмическая производная некоторого многочлена с нулями в точках z_k.

Наипростейшие дроби обладают рядом замечательных свойств, в частности они могут быть использованы при аппроксимации различных функций в неограниченных областях (см., например [1, 2]), что дает им некоторое преимущество по сравнению с обычными полиномами. Еще одним важным свойством наипростейших дробей является их принадлежность пространству $L_p(\mathbb{R})$ при $p > 1$, что позволяет ставить задачи аппроксимации различных классов функций в этом же пространстве без добавления веса.

В работе [3] В. Ю. Протасовым исследована сходимость наипростейших дробей и поставлена задача найти необходимые и достаточные условия сходимости ряда g_∞ в $L_p(\mathbb{R})$.

В работе [4] (см. также [5]) было показано, что в случае $p > 1$ достаточным условием сходимости является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < +\infty,$$

которое и необходимо, если дополнительно предположить, что, во-первых, $|x_k| < C|y_k|$ для всех k, а во-вторых, что последовательность $\{|y_k|\}$ монотонно возрастает.

Ключевые слова: наипростейшие дроби, неравенство Харди, сходимость в L_p.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00762а и 12-01-97013-р-поволжье а).

Этот результат без дополнительных предположений на последовательность x_k не может быть улучшен. Однако, например, в случае, когда последовательность x_k достаточно разрежена, В. И. Данченко [6] показал, что необходимым и достаточным условием сходимости ряда $g_\infty(t)$ в $L_p(\mathbb{R})$ является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|y_k|^{p-1}} < +\infty.$$

В. Ю. Протасовым [3] было доказано, что сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{t - z_k} \right|$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равносильны в случае $p > 1$. Этот факт был успешно использован в работе [4].

При $p < 1$ наипростейшие дроби не принадлежат L_p, однако, как было замечено С. В. Кисляковым, в этом пространстве имеет смысл рассматривать ряды из мнимых частей наипростейших дробей. В самом деле, мнимая часть наипростейшей дроби принадлежит L_p при $p > 1/2$. Случай $p = 1$ тривиален, так как ряд расходится для любой бесконечной последовательности $\{z_k\}$.

Хорошо известно, что в случае $p \in (0, 1)$ класс $L_p(\mathbb{R})$ является полным метрическим пространством с метрикой

$$\rho(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^p \, dt.$$

Итак, наша задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{t - z_k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \tag{1}$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in (1/2, 1)$. Для удобства будем считать, что все y_k строго положительны.

Пусть f и g – неотрицательные функции из $L_p(\mathbb{R})$. Нам понадобятся два классических интегральных неравенства для случая $p < 1$, см. [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f + g)^p dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f^p \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} g^p \, dt, \tag{2}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}(f+g)^p dt\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^p\,dt\right)^{1/p}. \qquad (3)$$

Из этих неравенств следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}\right)^p dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}\right)^p dt = \gamma_p\sum_{k=1}^{n} y_k^{1-p}, \qquad (4)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}\right)^p dt\right)^{1/p} \geqslant \gamma_p^{1/p}\sum_{k=1}^{n} y_k^{(1-p)/p}, \qquad (5)$$

где

$$\gamma_p = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^p}.$$

Из (4) вытекает достаточное условие сходимости для ряда (1) в пространстве $L_p(\mathbb{R})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{1-p} < +\infty. \qquad (6)$$

Отметим, что это условие является необходимым условием сходимости ряда (1) в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ в случае $p>1$ (см. [6]).

Теорема 1. *Пусть $p\in(1/2,1)$. Условие* (6) *является достаточным для сходимости ряда* (1) *в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. Если $\inf_{i,j}|x_i-x_j|>0$, то условие* (6) *является также и необходимым.*

Доказательство. Достаточность очевидна ввиду неравенства (4).

Пусть теперь $\inf|x_i-x_j| = a > 0$. Из неравенства (5) следует необходимое условие сходимости ряда (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(1-p)/p} < +\infty. \qquad (7)$$

Из (7), в частности, следует, что $y_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому найдется s такое, что все y_k не превосходят $a/2$ при $k \geqslant s$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \geqslant \sum_{j=s}^{n} \int\limits_{x_j - a/2}^{x_j + a/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt$$

$$\geqslant \sum_{j=s}^{n} \int\limits_{x_j - y_j}^{x_j + y_j} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(t-x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt \geqslant \sum_{j=s}^{n} \int\limits_{x_j - y_j}^{x_j + y_j} \left(\frac{y_j}{(t-x_j)^2 + y_j^2} \right)^p dt$$

$$\geqslant \sum_{j=s}^{n} \int\limits_{x_j - y_j}^{x_j + y_j} \left(\frac{y_j}{y_j^2 + y_j^2} \right)^p dt = 2^{1-p} \sum_{j=s}^{n} y_j^{1-p},$$

что доказывает необходимость условия (6) при сделанном предположении.

Теорема 1 доказана. □

Исследуем теперь случай, когда последовательность $\{x_k\}$ имеет одну точку сгущения. Пусть, например, $x_k \to a$, $k \to \infty$. В этом случае, если не накладывать ограничений на последовательность $\{y_k\}$, достаточное условие сходимости (6) является неулучшаемым. Однако, если предположить, что полюсы z_k лежат в некотором угле $|x_k - a| < Cy_k$, требование (6) можно ослабить.

Если ряд (1) сходится в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, то он сходится безусловно ввиду положительности его членов. Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что последовательность y_k упорядочена по убыванию. Кроме того, так как ряд (7) сходится, то обязан сходиться и ряд $\sum y_k$. Это значит, что определены значения $E_k = \sum\limits_{j=k}^{\infty} y_j$.

Прежде чем сформулировать основной результат нашей работы, приведем одно неравенство Харди–Литтлвуда ([7, Теорема 346]).

Пусть $\alpha \in (0,1)$, $0 < c < 1$. Тогда выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} E_k^{\alpha} \geqslant K \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} (k y_k)^{\alpha}$$

с некоторой константой K, зависящей от c и α.

Оказывается, если предположить, что последовательность y_n монотонно стремится к нулю, то верно и обратное неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} E_k^{\alpha} \leqslant \frac{1}{1-2^{c-1}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} (k y_k)^{\alpha}, \tag{8}$$

которое, по-видимому, известно. По крайней мере, для случая $\alpha = c = 1/2$ с несколько лучшей константой неравенство вида (8) приведено (без доказательства) в [8].

Неравенство (8) может быть легко обосновано, например так:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} E_k^{\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} \left(k y_k + E_{2k}\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} (k y_k)^{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} E_{2k}^{\alpha}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} (k y_k)^{\alpha} + 2^c \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{-c} E_{2k}^{\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c} (k y_k)^{\alpha} + 2^{c-1} S.$$

Теорема 2. *Предположим, что* $|x_k - a| < C y_k$ *и последовательность* $\{y_k\}$ *упорядочена по убыванию. Пусть* $p \in (1/2, 1)$*. Тогда ряд* (1) *сходится в* $L_p(\mathbb{R})$ *в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y_k}{k}\right)^{1-p} < \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$. Далее, ввиду тривиальных оценок

$$\frac{t^2 + y_k^2}{2 + C^2} \leqslant (t - x_k)^2 + y_k^2 \leqslant (2 + C^2)(t^2 + y_k^2),$$

можно предполагать, что $x_k = 0$ для всех k.

Покажем сначала необходимость условия (9). С этой целью оценим снизу интеграл

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2}\right)^p dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{t^2 + y_j^2}\right)^{p-1} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2}\, dt$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{2y_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{t^2 + y_j^2}\right)^{p-1} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2}\, dt \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{2y_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{y_k^2 + y_j^2}\right)^{p-1} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2}\, dt$$

$$\geqslant \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{y_k^2+y_j^2}\right)^{p-1} \geqslant \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{y_j}{y_k^2+y_j^2}+\sum_{j=k}^{\infty}\frac{y_j}{y_k^2+y_j^2}\right)^{p-1}$$

$$\geqslant \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{y_k}+\sum_{j=k}^{\infty}\frac{y_j}{y_k^2}\right)^{p-1} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k^2}{(k-1)y_k+E_k}\right)^{1-p}.$$

Пусть $A>1$. Тогда

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{t^2+y_k^2}\right)^p dt \geqslant \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k^2}{Aky_k+E_k}\right)^{1-p}$$

$$\geqslant \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{2(1-p)}}{(Aky_k)^{1-p}+E_k^{1-p}} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{2(1-p)}}{(Aky_k)^{1-p}(1+(Aky_k)^{p-1}E_k^{1-p})}$$

$$\geqslant \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{2(1-p)}}{(Aky_k)^{1-p}}\Bigl(1-(Aky_k)^{p-1}E_k^{1-p}\Bigr)$$

$$= \frac{A^{p-1}}{5}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{1-p}}{k^{1-p}} - A^{p-1}\sum_{k=1}^{n}k^{-2(1-p)}E_k^{1-p}\right)$$

$$\geqslant \frac{A^{p-1}}{5}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{1-p}}{k^{1-p}} - \frac{A^{p-1}}{1-2^{1-2p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{1-p}}{k^{1-p}}\right).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (8) для случая $\alpha=1-p$, $c=2(1-p)$. Положим

$$A^{p-1}=\frac{1}{2}\Bigl(1-2^{1-2p}\Bigr).$$

Тогда

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{t^2+y_k^2}\right)^p dt \geqslant \frac{A^{p-1}}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^{1-p}}{k^{1-p}}.$$

Предельный переход $n\to\infty$ завершает доказательство необходимого условия сходимости.

Покажем теперь достаточность условия (9). Для этого оценим сверху интеграл

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{t^2+y_k^2}\right)^p\, dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{t^2+y_j^2}\right)^{p-1}\frac{y_k}{t^2+y_k^2}\, dt$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{y_j}{t^2 + y_j^2} \right)^{p-1} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2}\, dt$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{y_k^2}{y_j(t^2 + y_k^2)} \right)^{p-1} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2}\, dt.$$

Здесь мы воспользовались простым неравенством

$$\frac{y_j}{t^2 + y_j^2} \geqslant \frac{y_k^2}{y_j(t^2 + y_k^2)},$$

справедливым для всех вещественных t.

Таким образом,

$$\int_{0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{y_j} \right)^{p-1} \frac{y_k^{2p-1}}{(t^2 + y_k^2)^p}\, dt$$

$$= \gamma_p \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{y_j} \right)^{p-1} \leqslant \gamma_p \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=[k/2]+1}^{k} \frac{1}{y_j} \right)^{p-1}$$

$$\leqslant \gamma_p \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=[k/2]+1}^{k} \frac{1}{y_{[k/2]+1}} \right)^{p-1} = \gamma_p \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k - [k/2]}{y_{[k/2]+1}} \right)^{p-1},$$

где $[k/2]$ – целая часть $k/2$.

Ввиду монотонности последовательности $\{y_k\}$, отсюда нетрудно вывести неравенство

$$\int_{0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{t^2 + y_k^2} \right)^{p} dt \leqslant C\gamma_p \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{y_k}{k} \right)^{1-p}, \tag{10}$$

где C – абсолютная константа. В силу полноты $L_p(\mathbb{R})$ отсюда следует сходимость ряда (1) в этом пространстве.

Теорема 2 доказана. $\square$

§2. Дополнение

Что будет, если последовательность $\{x_k\}$ имеет несколько предельных точек? Если этих точек конечное число, то наш ряд можно разбить на конечное число рядов и применить теорему 2 к каждому ряду в отдельности. Пусть, например, последовательность $\{x_k\}$ ограничена и имеет две различные предельные точки a и b. В этом случае последовательность $\{x_k\}$ можно разбить на две подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$ и $\{x_{n_k}\}$, такие, что $x_{m_k} \to a$, $x_{n_k} \to b$ при $k \to \infty$. Естественно, ряд (1) можно разбить на сумму двух рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(t-x_k)^2+y_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{m_k}}{(t-x_{m_k})^2+y_{m_k}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{n_k}}{(t-x_{n_k})^2+y_{n_k}^2}. \quad (11)$$

В силу интегральных неравенств (2) и (3), ряд, стоящий слева в (11), сходится в $L_p(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда сходятся в этом же пространстве ряды, стоящие справа в (11). Если теперь предположить, что найдется константа C такая, что $|x_{m_k} - a| < Cy_{m_k}$ и $|x_{n_k} - b| < Cy_{n_k}$ для всех k, то теорема 2, примененная к двум рядам по отдельности, даст критерий сходимости ряда (11):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{m_k}^{1-p} + y_{n_k}^{1-p}}{k^{1-p}} < \infty,$$

который эквивалентен условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y_{m_k} + y_{n_k}}{k} \right)^{1-p} < \infty.$$

Последнее условие, в силу очевидных, ввиду монотонности y_k, неравенств

$$y_{2k} \leqslant y_{m_k} + y_{n_k} \leqslant 2y_k,$$

эквивалентно условию (9). Таким образом, теорема 2 остается верной и в случае, когда последовательность $\{x_k\}$ имеет две предельные точки.

Аналогичным образом, нетрудно распространить результат теоремы 2 на случай, когда последовательность $\{x_k\}$ имеет конечное число предельных точек.

В случае же бесконечного числа предельных точек ситуация является более сложной. В этом случае, достаточность условия (9) не гарантирована. По-видимому, условие (9) является необходимым для любой последовательности z_k (при условии, что y_k монотонно стремятся к нулю).

Интересно также отметить тот факт, что если ряд (1) сходится в $L_p(\mathbb{R})$ для некоторого $p < 1$, то он обязательно расходится в $L_q(\mathbb{R})$ для любого $q > 1$. Верно и обратное: если ряд (1) сходится в $L_p(\mathbb{R})$ для некоторого $p > 1$, то он всегда расходится в $L_q(\mathbb{R})$ для любого $q < 1$. Это следует из того, что условие $y_k \to \infty$ является необходимым условием сходимости ряда (1) в $L_p(\mathbb{R})$ при $p > 1$, условие $y_k \to 0$ является необходимым условием сходимости ряда (1) в $L_p(\mathbb{R})$ при $p < 1$.

Литература

1. В. И. Данченко, *Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей.* — Матем. сб. **185:8** (1994), 63–80.
2. П. А. Бородин, О. Н. Косухин, *О приближении наипростейшими дробями на действительной оси.* — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Матем., мех. **1** (2005), 3–8.
3. В. Ю. Протасов, *Приближение наипростейшими дробями и преобразование Гильберта.* — Изв. РАН, Сер. матем. **73:2** (2009), 123–140.
4. И. Р. Каюмов, *Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.* — Матем. сб. **202:10** (2011), 87–98.
5. И. Р. Каюмов, *Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.* — Матем. заметки **92:1** (2012), 149–152.
6. В. И. Данченко, *О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.* — Матем. сб. **201:7** (2010), 53–66.
7. Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* Изд-во иностранной литературы. Москва, 1948.
8. С. Б. Стечкин, *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов.* — Докл. АН СССР **102:1** (1955), 37–40.

Kayumov I. R., Kayumova A. V. Convergence of the imaginary parts of simplest fractions in $L_p(\mathbb{R})$ for $p < 1$.

For $p \in (1/2, 1)$, the $L_p(\mathbb{R})$-convergence of the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Im}(t - z_k)^{-1}|$ is studied, where the z_k are some points on the complex plane. The problem is solved completely in the case where the sequence $\{\mathrm{Re}\, z_k\}$ has no limit points. Also, the case where this sequence has finitely many limit points is studied.

Казанский федеральный университет,
Кремлевская 18, 420008 Казань, Россия
E-mail: ikayumov@gmail.com
E-mail: anvas@inbox.ru

Поступило 12 марта 2013 г.