Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

А. В. Гладкая

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ С ВЕСОМ

П. Л. Чебышевым была решена задача о нахождении полинома степени n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля в равномерной метрике, в том числе, в некоторых весовых пространствах.

Возьмем весовую функцию $\omega(x) = 1/\rho_m(x)$, где ρ_m – алгебраический полином степени m, положительный на $[-1, 1]$, с единичным старшим коэффициентом. Пусть $n > m$. Положим $z = e^{i\varphi}$, $x = \cos\varphi$,

$$T_n(x) = \operatorname{Re}\left\{z^{-n} g_m^2(z)\right\},$$

где g_m – полином степени m с корнями вне круга $|z| \leqslant 1$, такой что $|g_m(e^{i\varphi})|^2 = \rho_m(\cos\varphi)$ при $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда T_n является экстремальным в задаче нахождения величины

$$\min_{a_i} \max_{x\in[-1,1]} |(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)\omega(x)|.$$

В случае $\omega(x) \equiv 1$ решением поставленной задачи будут многочлены Чебышева первого рода $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$. Этот результат вошел в книгу [1, Прил. I, п. 14]. Форма записи ответа взята из [2].

В данной работе представленный результат обобщен на целые функции экспоненциального типа. Сформулируем постановку задачи для целых функций.

Определение 1. *Целыми функциями класса A, согласно* [3, гл. V]*, будем называть целые функции, ненулевые корни которых a_k удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right| < \infty.$$

Этот класс является естественным обобщением класса функций, все корни которых вещественны, т.е. “почти все” корни лежат в “окрестности” вещественной оси.

Ключевые слова: целые функции, наименьшее уклонение от нуля.

Замечание 1. Из критерия Линделёфа (см. [3, гл. I]) непосредственно следует, что целая функция конечной степени, все корни которой лежат в одной из полуплоскостей $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ или $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, есть функция класса A.

Везде далее будем считать весовую функцию ω неотрицательной на вещественной оси.

Определение 2. *Пусть f_σ – целая функция степени $\sigma > 0$. Говорят, что функция f_σ наименее уклоняется от нуля с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q степени меньше σ, такой что*

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f_\sigma - Q)\,\omega| < \sup_{\mathbb{R}} |f_\sigma \omega|\,.$$

Определение 3. *Пусть f_σ – целая функция степени $\sigma > 0$. Будем говорить, что функция f_σ строго наименее уклоняется от нуля с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q степени меньше σ, не равной нулю тождественно, такой что*

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f_\sigma - Q)\,\omega| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f_\sigma \omega|\,.$$

Далее будем говорить о функциях, строго наименее уклоняющихся от нуля в классе A.

Определение 4. *Пусть f_σ – целая функция степени $\sigma > 0$. Будем говорить, что функция f_σ строго наименее уклоняется от нуля в классе A с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q класса A степени меньше σ, не равной нулю тождественно, такой что*

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f_\sigma - Q)\,\omega| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f_\sigma \omega|\,.$$

Другими словами, для функции f_σ элементом наилучшего приближения среди функций, принадлежащих классу A, степени меньше σ (в [1] это множество обозначено символом $\mathbf{E}_{\sigma-0}$) является тождественный ноль:

$$\inf_{Q \in A \cap \mathbf{E}_{\sigma-0}} \sup_{\mathbb{R}} |(f - Q)\,\omega| = \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Более того, элемент наилучшего приближения единственнен.

Пусть даны функция ρ_m класса A, степени m, четная, положительная на вещественной оси, и число $\sigma > m$. Найдем целую функцию степени σ, строго наименее уклоняющуюся от нуля в классе A с весом $\frac{1}{\rho_m}$ в равномерной метрике.

В [2] для представления весового полинома использовалась теорема Фейера–Рисса. Здесь для представления весовой функции воспользуемся обобщением теоремы для целых функций из [3, приложение V, теорема 1].

Теорема 1 (Теорема Ахиезера). *Для того, чтобы целая функция f конечной степени k представлялась в форме*

$$f(x) = |\varphi(x)|^2 \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{R},$$

где φ – целая функция конечной степени $\frac{k}{2}$ с корнями в одной из полуплоскостей $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ или $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы f была функцией класса A, неотрицательной на вещественной оси.

Так как весовая функция ρ_m удовлетворяет условиям теоремы, то существует целая функция h_m степени $\frac{m}{2}$ с корнями в нижней полуплоскости, такая что

$$\rho_m(x) = |h_m(x)|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из доказательства теоремы Ахиезера в [3] видно, что четность функции ρ_m влечет равенство $\overline{h_m(x)} = h_m(-x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и симметричность корней a_k функции h_m относительно мнимой оси.

Положим $g_m(z) = e^{\frac{imz}{2}} h_m(z)$. Тогда $\rho_m(x) = |g_m(x)|^2$ и $\overline{g_m(x)} = g_m(-x)$ на $\mathbb{R}$.

Положим

$$f_\sigma(z) := \frac{1}{2}\left(e^{-i\sigma z} g_m^2(z) + e^{i\sigma z} g_m^2(-z)\right)$$

и покажем, что функция f_σ решает нашу задачу.

Очевидно, что это целая функция. Её степень не превосходит σ, так как не превосходит σ степень функций $e^{\pm i(\sigma-m)z} h_m^2(\pm z)$. То, что ее степень не меньше σ, будет ясно далее.

В полиномиальном случае для доказательства используется теорема Валле Пуссена и подсчет количества точек альтернанса. В случае функций класса A можно говорить лишь о плотности точек.

Определение 5. *Пусть $\{x_\alpha\}$ – семейство точек на комплексной плоскости, $N(R)$ – количество точек семейства в круге радиуса R с* *центром в нуле. Будем говорить, что плотность точек* $\{x_\alpha\}$ *равна*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{N(R)}{R}.$$

Таким образом, при подсчете точек мы будем учитывать кратность элементов в $\{x_\alpha\}$.

Замечание 2. В [4, Lect. 17] показано, что корни целой функции степени σ класса A имеют плотность $\frac{2\sigma}{\pi}$.

Будем исследовать плотность точек весового альтернанса функции f_σ, то есть точек, в которых $f_\sigma = \pm\rho_m$, чтобы воспользоваться следующим аналогом теоремы Валле Пуссена.

Теорема 2. *Пусть* $\rho : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *– возрастающая последовательность точек вещественной оси, имеющая плотность* $\frac{\sigma}{\pi}$. *Рассмотрим непрерывную функцию* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *принимающую в точках* x_n *отличные от нуля значения с чередующимися знаками, и пусть* $\lambda_n = |f(x_n)|$. *Тогда для каждой целой функции* Q *класса* A, *отличной от тождественного нуля и степени меньше* σ *имеет место неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{f-Q}{\rho}\right| > \inf_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_n}{\rho(x_n)}.$$

Доказательство. Если $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_n}{\rho(x_n)} = 0$, то доказывать нечего.

Пусть

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_n}{\rho(x_n)} > 0.$$

Допустим, что некоторая функция Q описанного вида удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{f-Q}{\rho}\right| \leqslant \inf_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_n}{\rho(x_n)}.$$

Рассмотрим разность

$$\Delta(x) = \frac{f(x)}{\rho(x)} - \frac{f(x)-Q(x)}{\rho(x)} = \frac{Q(x)}{\rho(x)}.$$

Очевидно, $\Delta(x_n)\cdot f(x_n) \geqslant 0$ для любого $n\in\mathbb{Z}$. Пусть в точках x_{n_0} и x_{n_0+2} выполняется неравенство $\Delta > 0$. Если между этими точками существует точка, в которой $\Delta < 0$, то функция Q имеет на промежутке (x_{n_0}, x_{n_0+2}) две перемены знака и, следовательно, два корня. Если такой точки не существует, то на этом промежутке у функции Q имеется корень второй кратности. В случае, если в точках x_{n_0}

или x_{n_0+2} функция Δ обращается в ноль, то, рассматривая знаки Δ в соседних точках последовательности, аналогичным образом получим либо две перемены знака, либо корни второй кратности.

Таким образом, функция Q имеет на промежутке $(-R,\, R)$ в среднем $\frac{2R\sigma}{\pi}$ нулей, что невозможно, так как степень функции Q меньше σ. □

Замечание 3. Для единичного веса близкое к теореме утверждение установлено С. Н. Бернштейном (см., например, [5, гл. VI, §1, теорема 6.1.11]).

Приведем f_σ к удобному для исследования точек альтернанса виду. На вещественной оси имеет место равенство $f_\sigma(x) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\sigma x} g_m^2(x)\right)$, следовательно, функция f_σ четна и вещественна.

Заметим, что

$$e^{-i\sigma x} g_m^2(x) = e^{-i\sigma x} \frac{g_m(x)}{g_m(-x)} \rho_m(x).$$

Положим

$$\Phi(z) = e^{-i\sigma z} \frac{g_m(z)}{g_m(-z)}.$$

Тогда Φ мероморфна и на вещественной оси $|\Phi| = 1$.

Далее заметим, что $f_\sigma(x) = \rho_m(x) \operatorname{Re}\Phi(x)$ на $\mathbb{R}$, откуда следует, что $|f_\sigma| \leqslant \rho_m$ на $\mathbb{R}$, а соотношения $f_\sigma(x) = \rho_m(x)$ и $f_\sigma(x) = -\rho_m(x)$ равносильны, соответственно, соотношениям $\Phi(x) = 1$ и $\Phi(x) = -1$.

Таким образом, чтобы исследовать плотность точек, в которых $f_\sigma^2(x) = \rho_m^2(x)$, достаточно исследовать плотность нулей функции $\operatorname{Im}\Phi$ на $\mathbb{R}$.

Заметим, что при изменении аргумента функции Φ на π функция $\operatorname{Im}\Phi$ получает ноль, т.е. достаточно проследить за изменением аргумента функции Φ при движении точки x по вещественной оси.

Из [3, приложение V] мы знаем, что целая функция h_m представляется в виде бесконечного произведения

$$h_m(z) = e^{b - iz\gamma} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}},$$

где a_k – корни функции h_m, $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{a_k}$, $b \in \mathbb{R}$. Следовательно, поскольку $h_m(-x) = \overline{h_m(x)}$, справедлива формула

$$\Phi(x) = e^{-i\sigma x} \frac{e^{i\frac{m}{2}x}}{e^{-i\frac{m}{2}x}} \frac{e^{b-ix\gamma} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{x}{a_k}\right) e^{\frac{x}{a_k}}}{e^{b+ix\gamma} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{x}{\overline{a_k}}\right) e^{\frac{x}{\overline{a_k}}}}.$$

Заметим, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty} e^{\frac{x}{a_k} - \frac{x}{\overline{a_k}}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} e^{2ix \operatorname{Im} \frac{1}{a_k}} = e^{2ix \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{a_k}} = e^{2ix\gamma}$. Следовательно,

$$\Phi(x) = e^{-i\sigma x} e^{imx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{x}{a_k}}{1 - \frac{x}{\overline{a_k}}}.$$

Положим $\varphi_k(x) = \frac{1 - \frac{x}{a_k}}{1 - \frac{x}{\overline{a_k}}}$.

Нас интересует изменение аргумента функции при прохождении точкой x интервала $(-R; R)$. Будем обозначать это изменение символом $\Delta_{(-R;R)} \arg$. Воспользовавшись тем, что аргумент произведения равен сумме аргументов множителей, получаем:

$$\Delta_{(-R;R)} \arg \Phi(x)$$
$$= \Delta_{(-R;R)} \arg e^{-i\sigma x} + \Delta_{(-R;R)} \arg e^{imx} + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{(-R;R)} \arg \varphi_k(x).$$

Далее заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{(-R;R)} \arg \varphi_k(x)$$
$$= \sum_{|a_k|<R} \Delta_{(-\infty;\infty)} \arg \varphi_k(x) - \sum_{|a_k|<R} \Delta_{(-\infty;-R)\cup(R;\infty)} \arg \varphi_k(x)$$
$$+ \sum_{|a_k|>R} \Delta_{(-R;R)} \arg \varphi_k(x) + \sum_{|a_k|=R} \Delta_{(-R;R)} \arg \varphi_k(x).$$

Последняя сумма есть $o(R)$, так как количество слагаемых есть $o(R)$, а каждое слагаемое по модулю не больше 2π.

Теперь исследуем слагаемые по отдельности.

Утверждение 1. $\Delta_{(-R;R)} \arg e^{-i\sigma x} = -2\sigma R + o(R)$.

Доказательство. При движении точки x по вещественной оси в положительном направлении точка $e^{-i\sigma x}$ описывает единичную окружность в отрицательном направлении, причем одной полной окружности соответствует промежуток длины $\frac{2\pi}{\sigma}$ на оси. Таким образом, при прохождении промежутка длины $2R$ количество окружностей равно $\frac{R\sigma}{\pi}$, что соответствует изменению аргумента на $2\sigma R$ в среднем. □

Утверждение 2. $\Delta_{(-R;R)} \arg e^{imx} + \sum\limits_{|a_k|<R} \Delta_{(-\infty;\infty)} \arg \varphi_k(x) = o(R).$

Доказательство. При прохождении точки x по оси в положительном направлении дробь $\dfrac{1-\frac{x}{a_k}}{1-\frac{x}{\overline{a_k}}}$ описывает окружность, содержащую ноль, в отрицательном направлении.

Из [4, lect. 17] известно, что функция класса A в круге радиуса R имеет в среднем $\frac{2R\alpha}{\pi}$ корней, где α – степень функции. Таким образом, так как степень функции h_m равна $\frac{m}{2}$, то количество ее корней a_k, удовлетворяющих соотношению $|a_k| < R$, в среднем равно $\frac{mR}{\pi}$.

Применяя утверждение 1 при $\sigma = -m$, получим, что изменения аргумента суммы φ_k в среднем компенсируются изменением аргумента функции e^{imx}. □

Утверждение 3. $\sum\limits_{|a_k|<R} \Delta_{(-\infty;-R)\cup(R;\infty)} \arg \varphi_k(x) = o(R).$

Доказательство. Запишем

$$\varphi_k(x) = \frac{\overline{a_k}}{a_k} \frac{1-\frac{a_k}{x}}{1-\frac{\overline{a_k}}{x}}.$$

Множитель $\frac{\overline{a_k}}{a_k}$ не влияет на изменение аргумента. Оценим приращение аргумента на $(-\infty,\, -R)$ и $(R,\, \infty)$ по отдельности. Для определенности рассмотрим только промежуток $(R,\, \infty)$.

Пусть $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $|a_k| < R$, $z = z_k = \frac{a_k}{R}$, $w = \frac{1-z}{1-\bar{z}}$. Тогда $|z| < 1$, $|w| = 1$. При z, лежащих в круге радиуса $q < 1$, w суть точки дуги единичной окружности, не содержащей точку -1 вместе с некоторой окрестностью, зависящей от q. При этом каждая из дуг, соответствующих точкам с положительной и отрицательной вещественными частями, не превосходит полуокружности, так как они разделены точкой 1. В этой точке $\arg w = 0$, что означает, что приращение аргумента на $(R,\, \infty)$ равно длине дуги, не превосходящей полуокружности, которая оценивается через длину хорды, то есть

$$\left|\Delta_{(R;\infty)} \arg w\right| \leqslant \frac{\pi}{2}|1-w|.$$

Заметим, что в наших обозначениях

$$|1-w| = \left|\frac{2\operatorname{Im} z}{1-\overline{z}}\right| = \frac{2|\beta_k|}{R\left|1-\frac{\overline{a_k}}{R}\right|}.$$

Докажем, что

$$T(R) = \sum_{|a_k|<R} \frac{2|\beta_k|}{R^2\left|1-\frac{a_k}{R}\right|} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Разобьем эту сумму на две. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $q \in (0,1)$, что

$$\sum_{qR<|a_k|<R} \frac{2|\beta_k|}{R^2\left|1-\frac{a_k}{R}\right|} < \varepsilon$$

одновременно для всех достаточно больших R. Это можно сделать, так как

$$\frac{2|\beta_k|}{R\left|1-\frac{a_k}{R}\right|} \leqslant 2,$$

а количество слагаемых в среднем пропорционально $(1-q)R$ (см. замечание 2). Для оставшихся слагаемых $\left|1-\frac{a_k}{R}\right| \geqslant 1-q$, и поэтому

$$\sum_{|a_k|\leqslant qR} \frac{2|\beta_k|}{R^2\left|1-\frac{a_k}{R}\right|} \leqslant \frac{2}{1-q} \sum_{|a_k|\leqslant qR} \frac{|\beta_k|}{|a_k|^2}\frac{|a_k|^2}{R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{a_k} \frac{|\beta_k|}{|a_k|^2}$ и теоремы Лебега. Таким образом, $\varlimsup\limits_{R\to+\infty} T(R) \leqslant \varepsilon$, и в силу произвольности ε предел $T(R)$ равен нулю. $\square$

Утверждение 4. $\sum\limits_{|a_k|>R} \Delta_{(-R;R)} \arg\varphi_k(x) = o(R).$

Доказательство. Пусть $|a_k| > R$, $z = z_k = \frac{R}{a_k}$, $w = \frac{1-z}{1-\overline{z}}$. Тогда $|z| < 1$, $|w| = 1$. Аналогично предыдущему доказательству имеет место оценка $|\Delta_{(0;R)} \arg w| \leqslant \frac{\pi}{2}|1-w|$.

Далее,

$$|1-w| = \frac{2R\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right|}{\left|1-\frac{R}{a_k}\right|}.$$

Докажем, что

$$T(R) = \sum_{|a_k|>R} \frac{2\left|\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}\right|}{\left|1 - \frac{R}{a_k}\right|} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Разобьем эту сумму на две. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $q > 1$, что

$$\sum_{R<|a_k|<qR} \frac{2\left|\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}\right|}{\left|1 - \frac{R}{a_k}\right|} < \varepsilon$$

одновременно для всех достаточно больших R. Это можно сделать, так как

$$\frac{2R\left|\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}\right|}{\left|1 - \frac{R}{a_k}\right|} \leqslant 2,$$

а количество слагаемых в среднем пропорционально $(q-1)R$ (см. замечание 2). Для оставшихся слагаемых $\left|1 - \frac{R}{a_k}\right| \geqslant \frac{q-1}{q}$, и поэтому

$$\sum_{|a_k|\geqslant qR} \frac{2\left|\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}\right|}{\left|1 - \frac{R}{a_k}\right|} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{a_k} \left|\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}\right|$ и теоремы Лебега. Таким образом, $\varlimsup\limits_{R\to+\infty} T(R) \leqslant \varepsilon$, и в силу произвольности ε предел $T(R)$ равен нулю. □

Теорема 3. *Для любой целой функции Q класса A, отличной от тождественного нуля и степени, меньшей σ, выполняется неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{f_\sigma - Q}{\rho_m}\right| > \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{f_\sigma}{\rho_m}\right|.$$

Доказательство. Из утверждений 1–4 следует, что количество перемен знака функции $\operatorname{Im}\Phi$ на промежутке $(-R; R)$ в среднем равно $\frac{2R\sigma}{\pi}$. Следовательно, такую же плотность имеют точки весового альтернанса функции f_σ. Тогда, в силу теоремы 2, получаем требуемое неравенство. □

Замечание 4. Поскольку тригонометрический полином есть целая функция конечной степени, принадлежащая классу A, результат, сформулированный в начале работы, является частным случаем теоремы 3.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, М., 1965.
2. A. Kroo, F. Peherstorfer, *Asymptotic representation of weighted L_∞- and L_1-minimal polynomials.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2008), 241–254.
3. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* М., 1956.
4. B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions.* AMS, 1996.
5. И. И. Ибрагимов, *Теория приближения целыми функциями.* ЭЛМ, Баку, 1979.

Gladkaya A. V. Entire functions that have the smallest deviation from zero with respect to the uniform norm with weight.

P. L. Chebyshev solved the problem of finding a polynomial of degree n with leading coefficient one that has the smallest deviation from zero with respect to the maximum norm. A similar problem can be solved for some classes of entire functions. We find the entire function of exponential type σ such that for any nonzero entire function Q of type less than σ and of class A we have

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\sigma - Q}{\rho_m} \right| > \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\sigma}{\rho_m} \right|.$$

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: anna.v.gladkaya@gmail.com

Поступило 14 марта 2013 г.