Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

С. Л. Гефтер, Т. Е. Стулова

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ОДНОГО НЕЯВНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Пусть E – комплексное банахово пространство и A – замкнутый линейный оператор в пространстве E, область определения которого не обязательно является плотной в E. В заметке изучаются целые решения экспоненциального типа следующего простейшего дифференциально-разностного уравнения:

$$w'(z) = Aw(z-h) + f(z). \tag{1}$$

Здесь $h \in \mathbb{C}$ и f – E-значная целая функция экспоненциального типа. Отметим, что при $h = 0$ мы получаем классическое линейное дифференциальное уравнение

$$w'(z) = Aw(z) + f(z). \tag{2}$$

Исследованию этого уравнения на полуоси посвящены многочисленные работы (см., например, монографии [1, 2] и литературу в них). Случай неплотно определенного оператора рассмотрен в работах [3,4]. Голоморфные и целые решения явных и неявных линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах изучались, в частности, в работах [5–8]. В [6] в предположении ограниченной обратимости оператора A была доказана корректность дифференциального уравнения (2) в специальном пространстве целых функций экспоненциального типа. В настоящей работе этот результат обобщается на случай дифференциально-разностного уравнения (1) (см. теорему 2) и на некоторые другие уравнения (теорема 1). Доказательство основной теоремы 2 основано на изучении неявного дифференциального уравнения $Tw'(z+h) + g(z) = w(z)$ (см. теорему 1). По поводу общих результатов о непрерывно дифференцируемых решениях линейных дифференциально-разностных уравнений мы отсылаем читателя

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, голоморфные и целые решения, замкнутый линейный оператор, спектральный радиус.

к монографиям [9, 10] (в конечномерном случае) и [2, 11, 12] (в бесконечномерном случае).

2. Рассмотрим множество E_σ всех целых E-значных функций $f(z)$, для которых $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}(\|f(z)\|\ e^{-\sigma|z|}) < +\infty$. Тогда E_σ – банахово пространство относительно нормы $\|f\|_\sigma = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}(\|f(z)\|\ e^{-\sigma|z|})$. Для $0 < \sigma \le \infty$ положим $\tilde{E}_\sigma = \bigcup\limits_{\sigma_1<\sigma} E_{\sigma_1}$. Тогда $\tilde{E}_\sigma$ – пространство целых E-значных функций экспоненциального типа меньшего, чем σ (если $\sigma = \infty$, то $\tilde{E}_\infty$ – пространство всех функций экспоненциального типа). Будем рассматривать это пространство с естественной топологией индуктивного предела банаховых пространств.

В следующей лемме приводится в удобном для дальнейшего виде стандартная оценка для производных целых функций экспоненциального типа.

Лемма 1. *Пусть $f \in E_\sigma$. Тогда $f^{(n)} \in E_\sigma$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\|f^{(n)}(z)\| \le \frac{n!e^n}{n^n}\sigma^n e^{\sigma|z|}\|f\|_\sigma$, $z \in \mathbb{C}$, т.е. $\left\|f^{(n)}\right\|_\sigma \le \frac{n!e^n}{n^n}\sigma^n\|f\|_\sigma$.*

Пусть теперь $T : E \to E$ – ограниченный линейный оператор, $h \in \mathbb{C}$ и $g : \mathbb{C} \longrightarrow E$ – целая функция. Рассмотрим следующие неявное неоднородное линейное дифференциально-разностное уравнение

$$Tw'(z+h) + g(z) = w(z). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\rho(T)$ – спектральный радиус оператора T и $g(z)$ – целая функция экспоненциального типа σ. Если $\rho(T)\sigma e^{\sigma|h|} < 1$, то уравнение (3) имеет единственное целое решение экспоненциального типа σ,*

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n g^{(n)}(z+nh). \tag{4}$$

При этом, если $\rho(T) > 0$ и σ_0 – единственное решение уравнения $\tau e^{\tau|h|} = \frac{1}{\rho(T)}$, то решение (4) непрерывно зависит от функции g в топологии пространства $\tilde{E}_{\sigma_0}$. Если же $\rho(T) = 0$, то w непрерывно зависит от g в пространстве $\tilde{E}_\infty$ всех целых функций экспоненциального типа.

Доказательство. Пусть $\sigma_2 > \sigma$ и $\rho(T)\sigma_2 e^{\sigma_2|h|} < 1$. Тогда $g \in E_{\sigma_2}$. Положим $C_1 = \|g\|_{\sigma_2}$. Согласно лемме 1, $\|g^{(n)}(z)\| \le \frac{n!e^n}{n^n}C_1\sigma_2^n e^{\sigma_2|z|}$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому $\|g^{(n)}(z+nh)\| \le \frac{n!e^n}{n^n} C_1 \sigma_2^n e^{\sigma_2|z|} e^{\sigma_2 n|h|}$. Если $|z| \le R$, то

$$\|T^n g^{(n)}(z+nh)\| \le \|T^n\| \|g^{(n)}(z+nh)\| \le C_1 \|T^n\| \frac{n!e^n}{n^n} {\sigma_2}^n e^{\sigma_2 R} e^{\sigma_2 n|h|}.$$

Согласно формуле Гельфанда $\sqrt[n]{\|T^n\|\, \sigma_2^n e^{\sigma_2 n|h|}} \to \rho(T)\, \sigma_2 e^{\sigma_2|h|} < 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \frac{n!e^n}{n^n} {\sigma_2}^n e^{\sigma_2 R} e^{\sigma_2 n|h|}$ сходится. Таким образом, ряд (4) сходится равномерно в круге $|z| \le R$ и

$$\|w(z)\| \le e^{\sigma_2|z|} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {\sigma_2}^n \|T^n\| \frac{n!e^n}{n^n} e^{\sigma_2 n|h|} \right) \|g\|_{\sigma_2},$$

т.е. w – целая функция, $w \in E_{\sigma_2}$ и $\|w\|_{\sigma_2} \le C_2 \|g\|_{\sigma_2}$, где

$$C_2 = \sum_{n=0}^{\infty} {\sigma_2}^n \|T^n\| \frac{n!e^n}{n^n} e^{\sigma_2 n|h|}.$$

Последнее неравенство означает, что функция w непрерывно зависит от g в пространстве E_{σ_2}. Поскольку σ_2 – произвольная константа, меньшая σ_0, мы получаем непрерывную зависимость w от g и в пространстве $\tilde{E}_{\sigma_0}$. Нетрудно проверить, что $w(z)$ является решением уравнения (3). Так как σ_2 – произвольная константа, большая σ, то экспоненциальный тип функции $w(z)$ не превосходит σ. С другой стороны, $g(z) = w(z) - Tw'(z+h)$, поэтому он не может быть меньше σ. Следовательно, экспоненциальный тип функции $w(z)$ равен σ. Остается проверить единственность решения. Пусть $w(z)$ – целое решение однородного уравнения $Tw'(z+h) = w(z)$. Тогда $T^n w^{(n)}(z+nh) = w(z)$. Если $w \in \tilde{E}_{\sigma_0}$ и $w \in E_{\sigma_2}$, где $\sigma_2 < \sigma_0$, то мы получаем

$$\|w(0)\| \le \|T^n\| \|w^{(n)}(nh)\| \le \|T^n\| \frac{n!e^n}{n^n} {\sigma_2}^n e^{\sigma_2 n|h|} \|w\|_{\sigma_2}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\|w(0)\|} \right) \le \rho(T) \sigma_2 e^{\sigma_2|h|} < 1$, т.е. $w(0) = 0$. Так как функция $w^{(k)}$ также удовлетворяет однородному уравнению и $w^{(k)} \in E_{\sigma_2}$, мы имеем $w^{(k)}(0) = 0$ для $k \in \mathbb{N}$. Отсюда $w = 0$. Теорема полностью доказана. □

Замечание 1. Если $\rho(T)\sigma e^{\sigma|h|} = 1$, то заключение теоремы 1 неверно уже в скалярном случае. Действительно, пусть $h = e$ и $\sigma = \frac{1}{e}$.

Тогда однородное уравнение $w'(z+e) = w(z)$ имеет ненулевое решение $w(z) = e^{\frac{1}{e}z}$. Кроме того, если $g(z) = e^{\frac{z}{e}}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(z+nh)$ расходится при всех z.

Теорема 2. *Пусть замкнутый оператор* $A : D(A) \to E$ *имеет ограниченный обратный и* $f(z)$ *– целая функция экспоненциального типа* σ. *Если* $\sigma e^{\sigma|h|} < \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$, *то уравнение* (1) *имеет единственное целое решение экспоненциального типа не превосходящего* σ,

$$w(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(n)}((z+(n+1)h)).$$

При этом, если $\rho(A^{-1}) > 0$ *и* σ_0 *– единственный корень уравнения* $\tau e^{\tau|h|} = \frac{1}{\rho(A^{-1})}$, *то функция* $w(z)$ *непрерывно зависит от* f *в топологии пространства* $\tilde{E}_{\sigma_0}$. *Если же* $\rho(A^{-1}) = 0$, *то* w *непрерывно зависит от* f *в пространстве* $\tilde{E}_\infty$ *всех целых функций экспоненциального типа.*

Доказательство. Пусть $T = A^{-1}$ и $g(z) = -A^{-1}f(z+h)$. Тогда оператор T ограничен, $\rho(T)\sigma e^{\sigma|h|} < 1$ и $g(z)$ – целая функция экспоненциального типа, не превышающего σ, и уравнение (1) эквивалентно уравнению (3). По теореме 1 уравнение (3) имеет единственное целое решение, экспоненциальный тип которого не превосходит σ:
$w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n g^{(n)}(z+nh) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(n)}(z+(n+1)h).$ $\square$

Рассмотрим теперь пространство $\tilde{E}_0$ всех E-значных целых функций нулевого экспоненциального типа. Тогда $\tilde{E}_0 = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} E_\varepsilon$. Пространство $\tilde{E}_0$ с естественной топологией проективного предела банаховых пространств является пространством Фреше. Из теоремы 1 получаем утверждение о корректности уравнения (3) в этом пространстве.

Следствие 1. *Пусть* T *– произвольный ограниченный оператор и* $g(z)$ *–* E*-значная целая функция нулевого экспоненциального типа. Тогда уравнение* (3) *имеет единственное решение* (4) *в пространстве* $\tilde{E}_0$ *и это решение непрерывно зависит от функции* g *в топологии пространства* $\tilde{E}_0$.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{C}$ и $A = I$. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение $w' = w(z-h) + f(z)$. Если $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа σ и $\sigma e^{\sigma|h|} < 1$, то это уравнение имеет единственное целое решение экспоненциального типа σ, $w(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z+(n+1)h)$. При этом, если σ_0 – единственный корень уравнения $\tau e^{\tau|h|} = 1$, то решение $w(z)$ непрерывно зависит от f в топологии пространства $\tilde{E}_{\sigma_0}$.

Пример 2. Рассмотрим следующее дифференциально-разностное уравнение: $\ddot{x} + \omega^2 x(t-h) = f(t)$, где $\omega > 0, h \in \mathbb{R}$ и $f(t)$ – след целой функции экспоненциального типа σ на вещественной оси. Переходя к системе уравнений первого порядка, получаем, что при $\sigma e^{\sigma|h|} < \omega$ уравнение имеет единственное решение

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{2k+2}} f^{(2k)}(t+(k+1)h),$$

которое можно продолжить до целой функции экспоненциального типа σ.

Пример 3. Пусть $\dim E = 2$, и $\det T = 0$. Мы имеем сингулярную систему двух дифференциально-разностных уравнений $Tw'(z+h) + g(z) = w(z)$, где $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $g(z) = \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \end{pmatrix}$. Пусть $g(z)$ – целая функция экспоненциального типа σ. Так как $\det T = 0$, то $T^2 = \lambda T$, где $\lambda = a + d$ – собственное значение оператора T. Отсюда $T^n = \lambda^{n-1} T$, $n \geq 1$. Поэтому, если $|\lambda| \sigma e^{\sigma|h|} < 1$, то единственное целое решение экспоненциального типа σ этой системы имеет следующий вид: $w(z) = g(z) + T \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} g^{(n)}(z+nh)$.

Пример 4. Пусть $E = C[0,\, 1]$, $\quad A = \frac{d^2}{dx^2}$,

$$D(A) = \left\{ u \in C^2[0,\, 1] : u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Тогда оператор A обратим, $\left(A^{-1}v\right)(x) = \int\limits_0^1 G(x,\, y)\; v(y) dy$, где G – функция Грина соответствующей граничной задачи и $\rho\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\pi^2}$. В этом случае

$$\left(A^{-(n+1)}v\right)(x) = \int_0^1 G_{n+1}(x,\ y)\ v(y)\,dy,$$

где $G_1(x,\ y) = G(x,y)\,,\ G_{n+1}(x,\ y) = \int_0^1 G(x,\ s)\ G_n(s,\ y)\,ds.$

Пусть $h \in \mathbb{R}$. При переходе на вещественную ось уравнение (1) имеет вид уравнения теплопроводности на $(0,\ 1)$ с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t-h,x) + f(t,x)\,, & t \in \mathbb{R},\ x \in (0,\ 1)\,, \\ w(t,\ 0) = w(t,\ 1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $f(t,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)\ t^n$, где $c_n \in C[0,1]$. Если $\sigma = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\,\|c_n\|}$ и $\sigma e^{\sigma|h|} < \pi^2$, то задача (5) имеет решение

$$w(t,x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 G_{n+1}(x,y)\,\frac{\partial^n f}{\partial\, t^n}\,(t+(n+1)h,y)\ dy.$$

Литература

1. С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* Наука, М. (1967).
2. K. I. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer-Verlag, New York (2000).
3. G. Da Prato, E. Sinestrati, *Differential operators with non dense domain.* — Annali della scuola normale superiore. Di Pisa. **14** (1987), 285–344.
4. Ю. Т. Сильченко, П. Е. Соболевский, *Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью.* — Сиб. мат. ж. **27** (4) (1986), 93–104.
5. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* Наука, М. (1970).
6. С. Л. Гефтер, Т. Е. Стулова, *О корректности некоторого нерезонансного операторно-дифференциального уравнения в пространстве целых функций экспоненциального типа.* — Доклады НАН Украины, **9** (2012), 7–12.
7. М. Л. Горбачук, *О аналитических решениях операторно-дифференциальных уравнений.* — Украинский математический журнал **52** (5) (2000), 680–693.
8. S. Gefter, T. Stulova, *On holomorphic solutions of some implicit linear differential equation in a Banach space.* — Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland **191** (2009), 331–340.

9. Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*. Мир, М. (1967).
10. O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H. O. Walther, *Delay equations*. Springer-Verlag, New York (1995).
11. R. Datko, *Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space*. — J. Diff. Equations **25** (1977), 258–274.
12. Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. Мир, М. (1984).

Gefter S. L., Stulova T. E. On entire solutions of exponential type of some implicit linear differential-difference equation in a Banach space.

Let A be a closed linear operator in a Banach space E with a possibly nondense domain. Entire solutions of exponential type of the linear differential-difference equation $w'(z) = Aw(z-h) + f(z)$ are studied. Assuming that A has a bounded inverse, the well-posedness of this equation in a special space of entire E-valued functions is proved.

Харьковский
национальный университет
им. В. Н. Каразина,
механико-математический факультет,
пл. Свободы, 4,
г.Харьков, 61022, Украина
E-mail: gefter@univer.kharkov.ua,
stutestella@rambler.ru

Поступило 25 мая 2013 г.