Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

О. Л. Виноградов, В. В. Жук

ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ЧЕТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§1. Введение

1.1. Обзор результатов. Далее $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x, S_h – оператор Стеклова, т.е.

$$S_h f(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x-t)\,dt.$$

Многочлены Бернулли B_n и числа Бернулли $\mathcal{B}_n$ определяются равенствами

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi, \quad \mathcal{B}_n = B_n(0);$$

периодические ядра Бернулли d_n – равенствами $d_0(t) = -1$,

$$d_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikt}}{(ik)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при $u \in (0, 2\pi)$ имеем

$$d_n(2\pi u) = -\frac{(2\pi)^n}{n!} B_n(u).$$

Известна (см. [1, с. 73–74, следствие 1]) формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} h^{2k} \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{(2k)!} S_h f^{(2k)}(x) + \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f^{(m)}(x-t) \times \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \left\{ d_m\left(\frac{2\pi t}{h}\right) - d_m(\pi) \right\} dt. \tag{1}$$

Ключевые слова: второй модуль непрерывности, наилучшее приближение, неравенства Джексона.

Равенство (1) – частный случай разложения функции по многочленам Бернулли. Для нас будет удобнее смотреть на него как на разложение функции по разностям первого порядка ее последовательных производных, начиная с первообразной. В теории приближений с помощью этой формулы удалось получить точное в равномерной метрике неравенство Джексона для первого модуля непрерывности производной нечетного порядка:

$$A_{\sigma-0}(f) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2r+1}}{2\sigma^{2r+1}}\,\omega_1\left(f^{(2r+1)}, \frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{2}$$

Здесь $\sigma > 0$, $A_{\sigma-0}$ – наилучшее приближение целыми функциями степени меньше σ,

$$\mathcal{K}_m = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(2\nu+1)^{m+1}}$$

– константы Фавара. Для периодических функций при $r = 0$ неравенство (2) установил В. В. Жук [2], при $r \in \mathbb{N}$ – А. А. Лигун [3]; см. [1, с. 198, следствие 4; 4, с. 271, теорема 6.2.7]; для непериодических функций, заданных на всей оси, – А. Ю. Громов [5].

В настоящей работе выводится аналог формулы (1) для разностей второго порядка. Затем с его помощью устанавливаются оценки функционалов через второй модуль непрерывности производных четного порядка. Как частные случаи получаются неравенства типа Джексона для приближений целыми функциями конечной степени и сплайнами с лучшими, чем было известно ранее, постоянными.

1.2. Обозначения. Как обычно, символами $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ обозначаются множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, $[a:b] = [a,b]\cap\mathbb{Z}$. Рассматриваются следующие пространства функций: $UCB(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерными нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$; если $p \in [1, +\infty)$, то $L_p(E)$ и L_p – пространства измеримых, суммируемых с p-й степенью (на промежутке E или, соответственно, на $E = [-\pi, \pi]$, 2π-периодических) функций f с нормами $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}$, $L(E) = L_1(E)$, $L = L_1$; $L_\infty(E)$ – пространство измеримых существенно ограниченных на E функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in E}|f(x)|,$$

L_∞ – подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$. Далее, $C^{(s)}$ – множество s раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций; $W_p^{(s)}$ – множество 2π-периодических функций f, таких что производная $f^{(s-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(s)} \in L_p$; $W_p^{(s)}(E)$ – множество функций f из $L_p(E)$, таких что производная $f^{(s-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(s)} \in L_p(E)$. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, +\infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ при $p = +\infty$, P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$, и выполняются следующие условия.

1) Пространство $(\mathfrak{M}, P)$ инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$.

2) Существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$.

Тогда будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются: $\bigl(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\bigr)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ при $p \in [1, +\infty)$, пространства периодических функций $\bigl(C, \|\cdot\|_p\bigr)$ при $p \in [1, +\infty]$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций, показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами. Через $\mathfrak{M}^{(s)}$ обозначим множество функций f из $\mathfrak{M}$, таких что производная $f^{(s-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(s)} \in \mathfrak{M}$.

Центральные разности и модули непрерывности порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ определяются равенствами

$$\delta_t^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(x + \frac{mt}{2} - kt\right), \quad \omega_m(f, h)_P = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} P(\delta_t^m f).$$

Далее, $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ – множества целых функций степени не больше (меньше) $\sigma > 0$; наилучшее приближение функции f по полунорме P определяется равенством

$$A_\sigma(f)_P = \inf_{\substack{g \in \mathbf{E}_\sigma \\ f-g \in \mathfrak{M}}} P(f - g)$$

($\inf \varnothing = +\infty$), аналогично определяется величина $A_{\sigma-0}(f)_P$. Индекс p у величины означает, что $P(f) = \|f\|_p$. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности, в других случаях полагаем $\frac{0}{0} = 0$. Свертка двух функций f и g определяется равенством

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt,$$

если интеграл существует.

§2. Разложение функции по разностям второго порядка и оценки функционалов через второй модуль непрерывности

2.1. Разложение функции по вторым разностям ее производных.

Лемма 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $f \in W_1^{(2r)}[x-h, x+h]$. *Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} h^{2k}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} S_h^2 f^{(2k)}(x) + \frac{1}{h^2}\int\limits_{-h}^{h} f^{(2r)}(x-t)$$
$$\times \left\{ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r} d_{2r}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)(h-|t|) + 2r\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r+1} d_{2r+1}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)\operatorname{sign} t \right\} dt. \tag{3}$$

Доказательство проведем по индукции. Обозначим

$$p_n(t) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^n d_n\left(\frac{2\pi t}{h}\right)(h-t) + n\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{n+1} d_{n+1}\left(\frac{2\pi t}{h}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

а интеграл в правой части равенства (3) – через R_{2r}. Нам понадобятся соотношения $p'_{n+1} = p_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $p'_1(t) = t - h$ $(0 < t < h)$, $p_{2r+2}(h) = 0$,

$$p_{2r+1}(h) = p_{2r+1}(0) = -(2r+1)h^{2r+2}\frac{\mathcal{B}_{2r+2}}{(2r+2)!}, \quad r \in \mathbb{N},$$
$$p_1(0+) = \frac{h^2}{2} - \frac{\mathcal{B}_2 h^2}{2}, \quad p_1(h-) = -\frac{\mathcal{B}_2 h^2}{2}.$$

База индукции – случай $r = 1$. Дважды проинтегрируем по частям в определении второй функции Стеклова:

$$
\begin{aligned}
-S_h^2 f(x) &= -\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} f(x-t)\bigl(h-|t|\bigr)\,dt \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^h \bigl(f(x-t)+f(x+t)\bigr)p_1'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{h^2}\bigl(f(x-h)+f(x+h)\bigr)p_1(h-) \\
&- \frac{2}{h^2}f(x)p_1(0+) - \frac{1}{h^2}\int_0^h \bigl(f'(x+t)-f'(x-t)\bigr)p_1(t)\,dt \\
&= -f(x) - \frac{\mathcal{B}_2}{2}\delta_h^2 f(x) + R_2,
\end{aligned}
$$

что равносильно равенству (3) при $r = 1$.

Для индукционного перехода от r к $r+1$ запишем формулу (3) для номера r и дважды проинтегрируем по частям в интеграле R_{2r}:

$$
\begin{aligned}
R_{2r} &= \frac{1}{h^2}\int_0^h \bigl(f^{(2r)}(x-t)+f^{(2r)}(x+t)\bigr)p_{2r}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^h \bigl(f^{(2r)}(x-t)+f^{(2r)}(x+t)\bigr)p_{2r+1}'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{h^2}\bigl(f^{(2r)}(x-h)+f^{(2r)}(x+h)\bigr)p_{2r+1}(h) - \frac{2}{h^2}f^{(2r)}(x)p_{2r+1}(0) \\
&- \frac{1}{h^2}\int_0^h \bigl(f^{(2r+1)}(x+t)-f^{(2r+1)}(x-t)\bigr)p_{2r+1}(t)\,dt \\
&= -h^{2r+2}(2r+1)\frac{\mathcal{B}_{2r+2}}{(2r+2)!}S_h^2 f^{(2r+2)}(x) + R_{2r+2}.
\end{aligned}
$$

Присоединяя внеинтегральный член к сумме, получаем требуемое. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $f \in W_1^{(2r)}[x-h, x+h]$. *Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} h^{2k}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}S_h^2 f^{(2k)}(x) + \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \delta_t^2 f^{(2r)}(x)$$
$$\times \left\{ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r} d_{2r}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)(h-t) + 2r\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r+1} d_{2r+1}\left(\frac{2\pi t}{h}\right) \right\} dt.$$

При $r = 0$ равенство очевидно из определения функции Стеклова, а при $r \in \mathbb{N}$ следует из леммы 1, если учесть равенство $\int\limits_0^h p_{2r} = 0$.

Из леммы 1 вытекает любопытное тождество для ядер Бернулли.

Следствие 2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi]$. *Тогда*

$$d_{2r}(t) - \sum_{k=0}^{r} h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\delta_h^2 d_{2r+2-2k}(t)$$
$$= \begin{cases} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r} d_{2r}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)\frac{2\pi}{h^2}(h-|t|)+ & \\ \quad +\frac{4r\pi}{h^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2r+1} d_{2r+1}\left(\frac{2\pi t}{h}\right)\operatorname{sign} t, & |t| \leqslant h, \\ 0, & h < |t| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим левую и правую части доказываемого равенства через $\Lambda(t)$ и $\Pi(t)$. Функцию f будем считать 2π-периодической. Перенесем сумму в равенстве (3) в левую часть и выразим каждое слагаемое в виде свертки функции $f^{(2r)}$ с некоторым ядром по формулам

$$f = c_0(f) + f^{(n)} * d_n,$$

где $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f$. Ввиду того, что $c_0(S_h^2 f) = c_0(f)$, а $c_0(f^{(n)}) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, внеинтегральные члены уничтожаются и равенство (3) принимает вид

$$f^{(2r)} * \Lambda = f^{(2r)} * \Pi.$$

Поскольку $c_0(\Lambda) = c_0(\Pi) = 0$, отсюда следует, что $\Lambda = \Pi$. □

2.2. Оценки функционалов.

Лемма 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $K \in L(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} K \subset [-h, h]$, *функция* K *четна,* $\int_{-h}^{h} K = 0$, $\varphi \in \mathfrak{M}$. *Тогда*

$$P(\varphi * K) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^h |K| \cdot \omega_2(\varphi, h)_P.$$

Доказательство. Имеем:

$$\varphi * K = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^h \delta_t^2 \varphi\, K(t)\, dt,$$

откуда и вытекает требуемое. $\square$

При $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$ обозначим

$$K_{h,2r}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{h}{2\pi}\right)^{2r} d_{2r}\left(\dfrac{2\pi t}{h}\right) \dfrac{2\pi}{h^2}(h - |t|) + \\ \quad + \dfrac{4r\pi}{h^2}\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)^{2r+1} d_{2r+1}\left(\dfrac{2\pi t}{h}\right) \operatorname{sign} t, & |t| \leqslant h, \\ 0, & |t| > h, \end{cases}$$

и определим функции ψ_{2r} на $[0, 1]$ равенством

$$K_{h,2r}(t) = 2\pi h^{2r-1} \psi_{2r}\left(\frac{t}{h}\right), \quad t \in [0, h]. \tag{4}$$

Другими словами,

$$\psi_{2r}(u) = -\frac{B_{2r}(u)}{(2r)!}(1 - u) - 2r\frac{B_{2r+1}(u)}{(2r+1)!}, \quad u \in [0, 1]. \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^h |K_{h,2r}| = h^{2r} \int\limits_0^1 |\psi_{2r}|.$$

Функция ψ_{2r} уже не зависит от h.

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ множество полуаддитивных функционалов $\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}_+$, т.е. таких, что $\Phi(f + g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$ для всех $f, g \in \mathfrak{M}$. Величины

$$m_s(\Phi)_P = \sup_{f \in \mathfrak{M}^{(s)}} \frac{\Phi(f)}{P(f^{(s)})}$$

называются *моментами* функционала Φ относительно полунормы P.

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $m_{2k}(\Phi)_P < +\infty$ *при всех* $k \in [0 : r+1]$, $f \in \mathfrak{M}^{(2r)}$. *Тогда*

$$\Phi(f) \leqslant \Bigg(h^{2r}\int\limits_0^1 |\psi_{2r}| m_0(\Phi)_P + \sum_{k=0}^{r}(-1)^k h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} m_{2r+2-2k}(\Phi)_P\Bigg)\omega_2\big(f^{(2r)}, h\big)_P.$$

Доказательство. Записывая f по лемме 1, учитывая знак чисел Бернулли и пользуясь определением моментов, леммой 2 и равенством $(S_h^2 g)'' = h^{-2}\delta_h^2 g$, получаем

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &\leqslant \Phi\big(f^{(2r)} * K_{h,2r}\big) + \sum_{k=0}^{r}\Phi\left(h^{2k}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}S_h^2 f^{(2k)}\right) \\
&\leqslant P\big(f^{(2r)} * K_{h,2r}\big) m_0(\Phi)_P \\
&+ \sum_{k=0}^{r}(-1)^k h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} P\big(\delta_h^2 f^{(2r)}\big) m_{2r+2-2k}(\Phi)_P \\
&\leqslant \Bigg(h^{2r}\int_0^1 |\psi_{2r}| m_0(\Phi)_P \\
&+ \sum_{k=0}^{r}(-1)^k h^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} m_{2r+2-2k}(\Phi)_P\Bigg)\omega_2\big(f^{(2r)}, h\big)_P.
\end{aligned}$$

$\square$

2.3. Оценки наилучших приближений. Конкретизируем теорему 1 для наилучших приближений целыми функциями конечной степени и сплайнами, положив при этом $h = \frac{\gamma\pi}{\sigma}$.

Известны ([6, с. 241, п. 101] и [7, лемма 5]) неравенства Ахиезера–Крейна–Фавара

$$\begin{aligned}
A_{\sigma-0}(f)_P &\leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{\sigma^s} P\big(f^{(s)}\big), \\
A_{\sigma-0}(f)_P &\leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{\sigma^s} A_{\sigma-0}\big(f^{(s)}\big)_P.
\end{aligned} \tag{6}$$

В этих неравенствах $A_{\sigma-0}$ можно заменить на A_σ.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\sigma, \gamma > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in \mathfrak{M}^{(2r)}$. *Тогда*

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{\pi^{2r}}{\sigma^{2r}} \left(\gamma^{2r} \int\limits_0^1 |\psi_{2r}| \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \gamma^{2k-2} (1-2k) \frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} \frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}} \right) \omega_2 \left(f^{(2r)}, \frac{\gamma\pi}{\sigma} \right)_P .$$

Для доказательства надо применить теорему 1 к функционалу наилучшего приближения и воспользоваться неравенствами Ахиезера–Крейна–Фавара.

Замечание 1. Справедлива более тонкая оценка, в которой модуль непрерывности берется относительно полунормы $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$. Для доказательства надо воспользоваться неравенствами (6) или применить уже доказанное неравенство к полунорме $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$. Аналогичное утверждение выполняется, когда в обеих частях участвует полунорма $A_\sigma(\cdot)_P$.

Замечание 2. Неравенства теоремы 2 и замечания 1 стандартным образом (например, с помощью интегралов Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $\omega_m(\cdot, u)_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$. Как частные случаи при $\sigma \in \mathbb{N}$ получаются оценки приближений периодических функций тригонометрическими многочленами степени меньше σ.

Далее при $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbf{S}_{2n,\mu}$ обозначается $2n$-мерное пространство 2π-периодических сплайнов порядка $\mu \in \mathbb{Z}_+$ дефекта 1 по равномерному разбиению $\frac{k\pi}{n}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Другими словами, при $\mu \in \mathbb{N}$ это множество функций из $C^{(\mu-1)}$, являющихся на каждом интервале $\left(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$ алгебраическим многочленом степени не выше μ, а при $\mu = 0$ – множество функций, постоянных на каждом таком интервале. Известно [4, с.77, следствие 2.3.6], что $\mathbf{S}_{2n,\mu}$ – множество функций вида

$$s(t) = \beta + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j d_{\mu+1} \left(t - \frac{j\pi}{n} \right), \quad \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j = 0,$$

где $d_{\mu+1}$ – ядро Бернулли порядка $\mu+1$. Множество сплайнов из $\mathbf{S}_{2n,\mu}$, для которых $\sum\limits_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0$, обозначим через $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\mu}$. Размерность пространства $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\mu}$ равна $2n-1$. При $\mu \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $E_{n,\mu}$ и $E^{\times}_{n,\mu}$ наилучшие приближения пространствами $\mathbf{S}_{2n,\mu}$ и $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\mu}$; положим $E_{n,-1}(f)_p = E^{\times}_{n,-1}(f)_p = \|f\|_p$.

Поскольку для наилучших приближений сплайнами нам в полной мере известны неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара лишь применительно к классам $W_p^{(s)}$ периодических функций, мы ограничимся приложениями теоремы 1 к этим случаям. Применим ее к функционалам $E_{n,\mu}(\cdot)_p$ и $E^{\times}_{n,\mu}(\cdot)_p$, $p \in [1,+\infty]$. При применении можно считать, что эти функционалы заданы на множествах достаточно гладких функций, а затем распространить полученные неравенства на классы $W_p^{(s)}$.

Известно [4, 8], что

$$E_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{n^s}\|f^{(s)}\|_p, \quad \mu \geqslant s-1, \tag{7}$$

$$E^{\times}_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{n^s}\|f^{(s)}\|_p, \quad \mu \geqslant s. \tag{8}$$

Неравенство (7) при $p=1$ и $p=+\infty$ содержится в [4, с. 221–225, п. 5.2.4 и с. 246, предложение 5.4.9]; там же см. историю вопроса; неравенство (8) при $p=1$ и $p=+\infty$ см. в [9]; общий случай разобран в [8, лемма 7].

Теорема 3. *Пусть* $p \in [1,+\infty]$, $\gamma > 0$, $n, r, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant 2r+1$, $f \in W_p^{(2r)}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} E_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{\pi^{2r}}{n^{2r}} \Bigg(& \gamma^{2r} \int_0^1 |\psi_{2r}| \\ & + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \gamma^{2k-2} (1-2k) \frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} \frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}} \Bigg) \omega_2 \left(f^{(2r)}, \frac{\gamma\pi}{n} \right)_p . \end{aligned}$$

Если $\mu \geqslant 2r+2$, *то* $E_{n,\mu}$ *можно заменить на* $E^{\times}_{n,\mu}$.

2.4. Реализация неравенств линейными методами. Неравенства в теоремах 2 и 3 могут быть получены с помощью линейных методов приближения.

Обозначим через $\mathcal{X}_{\sigma,s}$ операторы Ахиезера–Крейна–Фавара [6, п. 87, 101–103], [1, с. 147], то есть линейные операторы со значениями в $\mathbf{E}_\sigma$, для которых

$$P(f - \mathcal{X}_{\sigma,s} f) \leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{\sigma^s} P\big(f^{(s)}\big).$$

Положим

$$\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}f=\sum_{k=0}^{r}h^{2k}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\mathcal{X}_{\sigma,2r+2-2k}S_h^2f^{(2k)}.$$

Теорема 4. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $\sigma,\gamma>0$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in\mathfrak{M}^{(2r)}$. *Тогда*

$$P\big(f-\mathcal{Y}_{\sigma,\frac{\gamma\pi}{\sigma},2r}f\big)\leqslant\frac{\pi^{2r}}{\sigma^{2r}}\Bigg(\gamma^{2r}\int_0^1|\psi_{2r}|$$

$$+\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\gamma^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}}\Bigg)\omega_2\left(f^{(2r)},\frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P.$$

Доказательство. Записывая f по лемме 1, учитывая знак чисел Бернулли и пользуясь неравенствами Ахиезера–Крейна–Фавара и леммой 2, получаем

$$P\big(f-\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}f\big)\leqslant P\big(f^{(2r)}*K_{h,2r}\big)$$

$$+\sum_{k=0}^{r}(-1)^kh^{2k}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}P\Big(S_h^2f^{(2k)}-\mathcal{X}_{\sigma,2r+2-2k}S_h^2f^{(2k)}\Big)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^h|K_{h,2r}|\sum_{k=0}^{r}(-1)^kh^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\sigma^{2r+2-2k}}\right)\omega_2\big(f^{(2r)},h\big)_P.$$

Остается подставить $h=\frac{\gamma\pi}{\sigma}$ и выразить $K_{h,2r}$ через ψ_{2r}. □

Замечание 3. Если функция f имеет период $\frac{2\pi}{\rho}$ $(\rho>0)$, то $\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}f$ — тригонометрический многочлен степени меньшей, чем $\frac{\sigma}{\rho}$. В частности, если $\rho\geqslant\sigma$, то $\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}f$ — постоянная. Если же функция f является почти-периодической, то $\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}f$ — тоже почти-периодическая функция, показатели которой принадлежат функции f.

Если $f\perp\mathbf{E}_\sigma$, то $\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}f=0$. Поэтому для данного класса функций левую часть неравенства теоремы 4 можно заменить на $P(f)$.

Перечисленные свойства операторов $\mathcal{Y}_{\sigma,h,2r}$ следуют из аналогичных свойств операторов $\mathcal{X}_{\sigma,s}$, см. [7, с. 241, п. 101], [10].

Замечание 4. Неравенства теоремы 4 стандартным образом (например, с помощью интегралов Фейера) переносятся на пространства $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p при $p\in[1,+\infty]$.

При $n, s, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant s$ обозначим через $\mathcal{X}_{n,s,\mu}$ линейные операторы, действующие из L в $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\mu}$, для которых

$$\left\|f - \mathcal{X}_{n,s,\mu} f\right\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{n^s} \|f^{(s)}\|_p \tag{9}$$

при всех $p \in [1, +\infty]$, $f \in W^{(s)}_p$. Через $\mathcal{X}_{n,s,s-1}$ обозначим линейные операторы со значениями в $\mathbf{S}_{2n,\mu}$, для которых верна оценка (9). Хорошо известно [4, с. 221–225, п. 5.2.4], что в качестве $\mathcal{X}_{n,s,s-1}$ можно взять интерполяционные операторы. Операторы $\mathcal{X}_{n,s,\mu}$ при $\mu \geqslant s$ построены в [9], оценки (9) для этих операторов получены в [9] при $p = 1, +\infty$ и [8, лемма 7] при $p \in (1, +\infty)$.

При $\mu \geqslant 2r + 1$ положим

$$\mathcal{Y}_{n,h,2r,\mu} f = \sum_{k=0}^{r} h^{2k}(1 - 2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\mathcal{X}_{n,2r+2-2k,\mu} S^2_h f^{(2k)}.$$

Теорема 5. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $\gamma > 0$, $n, r, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant 2r+1$, $f \in W^{(2r)}_p$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\left\|f - \mathcal{Y}_{n,\frac{\gamma\pi}{n},2r,\mu} f\right\| \leqslant \frac{\pi^{2r}}{n^{2r}}\biggl(\gamma^{2r}\int\limits_0^1 |\psi_{2r}| \\ + \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \gamma^{2k-2}(1 - 2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}}\biggr)\omega_2\left(f^{(2r)}, \frac{\gamma\pi}{n}\right)_p.\end{aligned}$$

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4.

Замечание 5. В работе [11, замечание 4] было построено такое $(2n - 1)$-мерное подпространство $\mathbf{Q}^{\times}_{2n-1}$ пространства L_∞, что если $f \perp \mathbf{Q}^{\times}_{2n-1}$, то $\mathcal{X}_{n,s,\mu} f = 0$ для всех $s \in [1 : \mu]$. Поэтому при $\mu \geqslant 2r + 2$ для таких функций f левую часть неравенства теоремы 5 можно заменить на $\|f\|_p$.

Замечание 6. Известно, что $\mathcal{X}_{n,s,\mu} \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{X}_{n,s}$, например, по норме операторов из L в C [9, замечание 11]. Поэтому оценки приближений тригонометрическими многочленами в пространствах L_p могут быть получены предельным переходом из оценок приближений сплайнами.

§3. Упрощение записи констант и сопоставление результатов

3.1. Упрощение записи констант. Для точного вычисления интегралов $\int_0^1 |\psi_{2r}|$ требуется знать точки перемены знака функций ψ_{2r}. Установим некоторые свойства этих функций. Функции ψ_{2r} – многочлены, заданные на $[0,1]$. Будем считать, что они заданы на $\mathbb{R}$. Ясно, что $\psi_{2r}(1) = 0$.

Лемма 3. 1. $\psi_{2r}(1+v) = -\psi_{2r}(1-v)$.

2. *Функция* $(-1)^r\psi_{2r}$ *на отрезке* $[0,1]$ *меняет знак один раз с "+" на "−".*

Доказательство. 1. Действительно [12, с. 51, формула (6)],

$$B_n(1+z) = (-1)^n B_n(1-z) + nz^{n-1}.$$

Поэтому

$$\psi_{2r}(1+v) = -\Big(-\frac{1}{(2r)!}v(B_{2r}(1-v) + 2rv^{2r-1}) \\ + \frac{2r}{(2r+1)!}(-B_{2r+1}(1-v) + (2r+1)v^{2r})\Big) = -\psi_{2r}(1-v).$$

2. Доказательство проведем по индукции. Обозначим

$$g_n(\tau) = d_n(\tau)(2\pi-\tau) + nd_{n+1}(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi].$$

Тогда $(2\pi)^{2r+1}\psi_{2r}(u) = g_{2r}(2\pi u)$, и заменой переменной доказываемое утверждение сводится к аналогичному утверждению для функции $(-1)^r g_{2r}$ на $[0, 2\pi]$.

База индукции – случай $r = 1$ – следует из равенства

$$g_2(2\pi u) = (2\pi)^3\psi_2(u) = -(2\pi)^3\frac{1}{12}(1-u)(1-4u+2u^2).$$

Сделаем индукционный переход. Пользуясь равенством $d'_{n+1} = d_n$, находим:

$$g'_{2r+2}(\tau) = d_{2r+1}(\tau)(2\pi-\tau) + (2r+1)d_{2r+2}(\tau), \quad g''_{2r+2}(\tau) = g_{2r}(\tau).$$

По индукционному предположению функция $(-1)^{r+1}g''_{2r+2}$ меняет знак один раз с "−" на "+". Поскольку

$$(-1)^{r+1}g'_{2r+2}(0) = (-1)^{r+1}g'_{2r+2}(2\pi) = (-1)^{r+1}(2r+1)d_{2r+2}(0) > 0,$$

функция $(-1)^{r+1}g'_{2r+2}$ меняет знак два раза: с "+" на "−", а затем с "−" на "+". Учитывая еще, что

$$(-1)^{r+1}g_{2r+2}(0) = 2\pi(-1)^{r+1}d_{2r+2}(0) > 0, \quad (-1)^{r+1}g_{2r+2}(2\pi) = 0,$$

получаем требуемое. $\square$

Положим $\varphi_{2r}(u) = \frac{(-1)^r}{1-u}\psi_{2r}(u)$. Приведем явные выражения функций φ_{2r} при $r \in [1:4]$.

$$\begin{aligned}
\varphi_2(u) &= \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}(1-4u+2u^2),\\
\varphi_4(u) &= \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{45}(1+4u-26u^2+24u^3-6u^4),\\
\varphi_6(u) &= \frac{1}{2^6}\cdot\frac{2}{945}(1+6u-15u^2-36u^3+69u^4-36u^5+6u^6),\\
\varphi_8(u) &= \frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{4725}\Big(1+8u-12u^2-\frac{136}{3}u^3+\frac{74}{3}u^4\\
&\qquad +\frac{200}{3}u^5-\frac{220}{3}u^6+\frac{80}{3}u^7-\frac{10}{3}u^8\Big).
\end{aligned}$$

Обозначим через x_r единственный корень функции ψ_{2r} на $(0,1)$, положим $y_r = 1 - x_r$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\psi_{2r}| &= \frac{1}{(2\pi)^{2r+2}}\int_0^{2\pi}|g_{2r}| = \frac{2}{(2\pi)^{2r+2}}\left|\int_0^{2\pi x_r} g_{2r}\right|\\
&= \frac{2}{(2\pi)^{2r+2}}\left|g_{2r+1}(2\pi x_r) - g_{2r+1}(0)\right|\\
&= \frac{2}{(2r)!}\left|(1-x_r)\frac{B_{2r+1}(x_r)}{2r+1} + \frac{B_{2r+2}(x_r)-\mathcal{B}_{2r+2}}{2r+2}\right|\\
&= \frac{2}{(2r)!}\left|y_r\frac{B_{2r+1}(y_r)}{2r+1} + \frac{\mathcal{B}_{2r+2}-B_{2r+2}(y_r)}{2r+2}\right|.
\end{aligned}$$

Свойство симметрии позволяет свести уравнение $\varphi_{2r}(u) = 0$ к уравнению степени r. При $r \in [1:4]$ оно решается в радикалах. Выражения

x_3 и x_4 довольно громоздки, поэтому приведем результаты вычислений лишь при $r = 1, 2$. Имеем: $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{7}}{6}}$,

$$\int_0^1 |\psi_2| = \frac{1}{48}, \quad \int_0^1 |\psi_4| = \frac{10+7\sqrt{7}}{38880}. \tag{10}$$

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$\pi^{2r}\int_0^1 |\psi_{2r}| \leqslant \frac{1}{2^{2r-1}}\left(\mathcal{K}_{2r} + \frac{2r+1}{\pi}\mathcal{K}_{2r+1}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\pi^{2r}\int_0^1 |\psi_{2r}| &= \frac{1}{2^{2r-1}\pi^2}\bigl|g_{2r+1}(2\pi x_r) - g_{2r+1}(0)\bigr| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{2r-1}\pi^2}\Bigl(2\pi\bigl|d_{2r+1}(\pi/2)\bigr| + (2r+1)\bigl|d_{2r+2}(\pi) - d_{2r+2}(0)\bigr|\Bigr) \\ &= \frac{1}{2^{2r-1}}\left(\mathcal{K}_{2r} + \frac{2r+1}{\pi}\mathcal{K}_{2r+1}\right).\end{aligned}$$

□

Для дальнейших вычислений укажем еще значения нескольких первых констант Фавара и Бернулли: $\mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8}$, $\mathcal{K}_4 = \frac{5\pi^4}{384}$, $\mathcal{K}_6 = \frac{61\pi^6}{46080}$, $\mathcal{B}_0 = 1$, $\mathcal{B}_2 = \frac{1}{6}$, $\mathcal{B}_4 = -\frac{1}{30}$.

Следствие 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\sigma, \gamma > 0$, $f \in \mathfrak{M}^{(2)}$. *Тогда*

$$P\bigl(f - \mathcal{Y}_{\sigma,\frac{\gamma\pi}{\sigma},2}f\bigr) \leqslant \frac{\pi^2}{\sigma^2}\left(\frac{\gamma^2}{48} + \frac{1}{96} + \frac{5}{384\gamma^2}\right)\omega_2\left(f'', \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P.$$

В частности,

$$P\bigl(f - \mathcal{Y}_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},2}f\bigr) \leqslant \frac{17\pi^2}{384\sigma^2}\,\omega_2\left(f'', \frac{\pi}{\sigma}\right)_P.$$

Следствие 4. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $\gamma > 0$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant 3$, $f \in W_p^{(2)}$. *Тогда*

$$\bigl\|f - \mathcal{Y}_{n,\frac{\gamma\pi}{n},2,\mu}f\bigr\|_p \leqslant \frac{\pi^2}{n^2}\left(\frac{\gamma^2}{48} + \frac{1}{96} + \frac{5}{384\gamma^2}\right)\omega_2\left(f'', \frac{\gamma\pi}{n}\right)_p.$$

В частности,

$$\left\|f-\mathcal{Y}_{n,\frac{\pi}{n},2,\mu}f\right\|_p \leqslant \frac{17\pi^2}{384n^2}\,\omega_2\left(f'',\frac{\pi}{n}\right)_p.$$

Следствие 5. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $\sigma,\gamma>0$, $f\in\mathfrak{M}^{(4)}$. *Тогда*

$$P\big(f-\mathcal{Y}_{\sigma,\frac{\gamma\pi}{\sigma},4}f\big) \leqslant \frac{\pi^4}{\sigma^4}\left(\frac{10+7\sqrt{7}}{38880}\gamma^4+\frac{\gamma^2}{1920}+\frac{5}{4608}+\frac{61}{46080\gamma^2}\right)\omega_2\left(f^{(4)},\frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P.$$

В частности,

$$P\big(f-\mathcal{Y}_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},4}f\big)\leqslant\left(\frac{10+7\sqrt{7}}{38880}+\frac{3}{1024}\right)\frac{\pi^4}{\sigma^4}\,\omega_2\left(f^{(4)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_P.$$

Следствие 6. *Пусть* $p\in[1,+\infty]$, $\gamma>0$, $n,\mu\in\mathbb{N}$, $\mu\geqslant5$, $f\in W_p^{(4)}$. *Тогда*

$$\left\|f-\mathcal{Y}_{n,\frac{\gamma\pi}{n},4,\mu}f\right\|_p \leqslant \frac{\pi^4}{n^4}\left(\frac{10+7\sqrt{7}}{38880}\gamma^4+\frac{\gamma^2}{1920}+\frac{5}{4608}+\frac{61}{46080\gamma^2}\right)\omega_2\left(f^{(4)},\frac{\gamma\pi}{n}\right)_p.$$

В частности,

$$\left\|f-\mathcal{Y}_{n,\frac{\pi}{n},4,\mu}f\right\|_p\leqslant\left(\frac{10+7\sqrt{7}}{38880}+\frac{3}{1024}\right)\frac{\pi^4}{n^4}\,\omega_2\left(f^{(4)},\frac{\pi}{n}\right)_p.$$

Замечание 7. При $r=0$ теоремы §2 сохраняют силу и хорошо известны. Оценки функционалов и отклонений линейных полиномиальных методов в периодическом случае см. в [1, с. 203, теорема 3, с. 326, лемма 6], аналогичные оценки в пространствах класса $\mathcal{B}$ – в [13, теоремы 2.4, 3.1.4 и 3.2.4]; в случае сплайнов – в [14, следствие 8]. Для определенности сформулируем результат, аналогичный теореме 4. В этой ситуации $\mathcal{Y}_{\sigma,h,0}=\mathcal{X}_{\sigma,2}S_h^2$, и неравенство теоремы 4 принимает вид

$$P\big(f-\mathcal{Y}_{\sigma,\frac{\gamma\pi}{\sigma},0}f\big)\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8\gamma^2}\right)\omega_2\left(f,\frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P.$$

3.2. Сопоставление результатов. Для $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$ обозначим через $\zeta_q(\gamma)_P$ точную константу в неравенстве

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{K}{\sigma^q}\,\omega_2\left(f^{(q)}, \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P,$$

т.е. положим

$$\zeta_q(\gamma)_P = \sup_{f\in\mathfrak{M}^{(q)}} \frac{\sigma^q A_{\sigma-0}(f)_P}{\omega_2\left(f^{(q)}, \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right)_P}.$$

Ясно, что величина $\zeta_q(\gamma)_P$ не зависит от $\sigma > 0$, что и отражено в обозначении. Из возрастания модуля непрерывности следует, что функция ζ_q убывает.

Утверждение теоремы 2 можно записать в виде $\zeta_{2r}(\gamma)_P \leqslant A_{2r}(\gamma)$, где

$$A_{2r}(\gamma) = \pi^{2r}\left(\gamma^{2r}\int_0^1 |\psi_{2r}| + \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\gamma^{2k-2}(1-2k)\frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!}\frac{\mathcal{K}_{2r+2-2k}}{\pi^{2r+2-2k}}\right).$$

Замечание 8. Функция A_{2r} строго выпукла на $(0,+\infty)$ и бесконечно велика в нуле и на бесконечности. Следовательно, существует единственная точка γ^*_{2r}, в которой функция A_{2r} принимает свое наименьшее значение. Поскольку функция ζ_{2r} убывает, справедливо неравенство

$$\zeta_{2r}(\gamma)_P \leqslant A^*_{2r}(\gamma) = \begin{cases} A_{2r}(\gamma), & 0 < \gamma \leqslant \gamma^*_{2r}, \\ A_{2r}(\gamma^*_{2r}), & \gamma > \gamma^*_{2r}. \end{cases}$$

Вычисления позволяют предположить, что $A'_{2r}(1) > 0$ и, следовательно, $\gamma^*_{2r} < 1$. Мы не будем доказывать эту гипотезу, так как полагаем, что получение лучшей оценки остаточного члена в лемме 2 сделает ее проверку ненужной.

Перечислим известные нам оценки констант $\zeta_{2r}(\gamma)_P$, исключая случай метрики L_2, о котором известно больше.

Справедлива оценка

$$\zeta_{2r}(\gamma)_P \leqslant D_{2r}(\gamma) = \frac{\mathcal{K}_{2r}}{2} + \frac{\mathcal{K}_{2r+2}}{\gamma^2\pi^2}. \tag{11}$$

Способ доказательства неравенства (11) описан в [6, с. 253, п. 105], но явно там сформулировано не само неравенство (11), а его следствие; см. также [13, теорема 3.1.3].

В [15], см. также [1, с. 167–168, теорема 2], для пространств периодических функций получена оценка

$$\zeta_{2r}(\gamma)_P \leqslant C_{2r}(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{(r+1)(2r+3)}{r(2r+1)} \dfrac{1}{\pi \sin^2 \frac{\gamma\pi}{2}}, & 0 < \gamma \leqslant 1, \\ C_{2r}(1), & \gamma > 1. \end{cases} \tag{12}$$

В [16], см. также [1, с. 265, теорема 4], для пространств периодических функций получена оценка

$$\zeta_{2r}(\gamma)_P \leqslant Q_{2r}(\gamma)_P = \begin{cases} \dfrac{r+1}{2r} \dfrac{\|R_{2r+2}\|_P}{\sin^2 \frac{\gamma\pi}{2}}, & 0 < \gamma \leqslant 1, \\ Q_{2r}(1)_P, & \gamma \geqslant 1, \end{cases} \tag{13}$$

где R_{2r+2} – семейство операторов Рисса (см., например, [1, с. 258] и разъяснения в [13]). Отметим, что оценки вида (12) и (13) содержатся в указанных источниках для модулей непрерывности и производных любого порядка, но здесь мы формулируем только их частные случаи для второго модуля непрерывности четных производных.

Если пространство $(\mathfrak{M}, P)$ таково, что $\|R_{2r+2}\|_P \geqslant 1$ (в пространствах C и L_p это верно), то при $r \geqslant 2$ оценка (13) слабее, чем (12). При $r = 1$ в пространствах C и L из более тонкой оценки величины $\|R_4\|$ снизу (см. комментарии в [13]) также следует, что $C_2(\gamma) < Q_2(\gamma)$.

Учитывая сказанное, сравним величины $A_{2r}(\gamma)$ с $C_{2r}(\gamma)$ и $D_{2r}(\gamma)$.

Лемма 5. *При всех $r \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1]$ выполняются неравенства*

$$A_{2r}(\gamma) < C_{2r}(\gamma), \quad A_{2r}(1) < \frac{\mathcal{K}_{2r}}{2}, \quad A_{2r}(\gamma) < D_{2r}(\gamma).$$

Доказательство. 1. Поскольку $\mathcal{K}_{2\nu} < \frac{4}{\pi}$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$, верна оценка

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k (\gamma\pi)^{2k-2} (1-2k) \frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} \mathcal{K}_{2r+2-2k} <$$
$$< \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\gamma\pi)^{2k-2} (1-2k) \frac{\mathcal{B}_{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{\gamma\pi}{2}}.$$

Осталось получить оценку интеграла

$$\pi^{2r} \gamma^{2r} \int_0^1 |\psi_{2r}| \leqslant \left(\frac{(r+1)(2r+3)}{r(2r+1)} - 1 \right) \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{\gamma\pi}{2}}.$$

Так как левая часть этого неравенства возрастает, а правая убывает по γ, достаточно доказать его при $\gamma = 1$, то есть доказать неравенство

$$\pi^{2r} \int_0^1 |\psi_{2r}| \leqslant \left(\frac{(r+1)(2r+3)}{r(2r+1)} - 1 \right) \frac{1}{\pi}.$$

При $r = 1, 2$ оно проверяется сразу; см. равенства (10). Пусть $r \geqslant 3$. Приводя правую часть к общему знаменателю, умножая обе части на π и пользуясь леммой 4 и неравенствами $\mathcal{K}_{2r} < \frac{4}{\pi}$, $\mathcal{K}_{2r+1} < \frac{3}{2}$, заключаем, что достаточно выполнения неравенства

$$\frac{1}{2^{2r-1}} \left(3r + \frac{11}{2} \right) \leqslant \frac{4r+3}{r(2r+1)}.$$

Последнее легко устанавливается по индукции.

2. При $r = 1, 2$ неравенство $A_{2r}(1) < \frac{\mathcal{K}_{2r}}{2}$ проверяется сразу; см. следствия 3 и 5. При $r \geqslant 3$ верно неравенство $C_{2r}(1) < \frac{\mathcal{K}_{2r}}{2}$, так как оно верно при $r = 3$, его левая часть убывает, а правая возрастает по r. По доказанному

$$A_{2r}(1) < C_{2r}(1) < \frac{\mathcal{K}_{2r}}{2} < D_{2r}(1), \quad r \geqslant 3.$$

3. Перепишем доказываемое неравенство $A_{2r}(\gamma) < D_{2r}(\gamma)$ в виде

$$A_{2r}(\gamma) - \frac{\mathcal{K}_{2r+2}}{\gamma^2 \pi^2} < \frac{\mathcal{K}_{2r}}{2}.$$

Левая часть последнего неравенства возрастает по γ, так как представляет собой многочлен от γ с неотрицательными коэффициентами. Правая же часть не зависит от γ. Поэтому достаточно доказать неравенство при $\gamma = 1$, что уже сделано. □

Замечание 9. Положим $A_{2r}^{**}(\gamma) = A_{2r}(\gamma)$ при $\gamma \in (0, 1]$, $A_{2r}^{**}(\gamma) = A_{2r}(1)$ при $\gamma > 1$. По определению $A_{2r}^{*}(\gamma) \leqslant A_{2r}^{**}(\gamma)$ и, значит,

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{A_{2r}^{**}(\gamma)}{\sigma^{2r}} \omega_2 \left(f^{(2r)}, \frac{\gamma\pi}{\sigma} \right)_P.$$

Из леммы 5 следует, что $A_{2r}^{**}(\gamma) < C_{2r}(\gamma)$, $A_{2r}^{**}(\gamma) < D_{2r}(\gamma)$ при всех $r \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$.

Из неравенств типа Джексона для наилучших приближений сплайнами и старших модулей непрерывности производных с явно указанными постоянными нам известен лишь аналог оценки (11) [13, теорема 5.1.3].

Таким образом, постоянные в неравенствах настоящей работы меньше, чем ранее известные.

Литература

1. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л. (1982).
2. В. В. Жук, *О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности.* — Сиб. мат. журн. **12**, No. 6 (1971), 1283–1297.
3. А. А. Лигун, *О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций.* — Мат. заметки **14**, No. 1 (1973), 21–30.
4. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М. (1987).
5. А. Ю. Громов, *О точных константах приближений целыми функциями дифференцируемых функций.* — В сб. Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск. Вып. 7 (1976), 17–21.
6. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М. (1965)
7. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17**, No. 4 (2005), 56–111.
8. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные неравенства типа Колмогорова для модулей непрерывности и наилучших приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **290** (2002), 5–26.
9. О. Л. Виноградов, *Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта.* — Проблемы мат. анализа. Вып. 25 (2003), 29–56.
10. М. Г. Крейн, *О наилучшей аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси.* — Докл. АН СССР **18**, No. 9 (1938), 619–623.
11. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства для приближений классов периодических сверток подпространствами сдвигов нечетной размерности.* — Мат. заметки **85**, No. 4 (2009), 569–584.
12. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1. М. (1965).
13. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона.* — Алгебра и анализ **24**, No. 5 (2012), 1–43.
14. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные оценки отклонений линейных методов приближения периодических функций посредством линейных комбинаций модулей непрерывности различных порядков.* — Проблемы мат. анализа. Вып. 25 (2003), 57–98.
15. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *О константах в прямых теоремах теории приближения.* — Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат., мех. астр. **7** (1980), 5–9.
16. В. В. Жук, *О точности представления непрерывной 2π-периодической функции при помощи линейных методов аппроксимации.* — Изв. ВУЗов. Математика **123**, No. 8 (1972), 46–59.

Vinogradov O. L., Zhuk V. V. Estimates of functionals by the second moduli of continuity of even derivatives.

We establish an expansion of a function in terms of the second order differences of its derivatives. This expansion generalizes the well-known expansion in terms of the first order differences. Then, with the help of this expansion, we estimate some functionals by the second moduli of continuity. As particular cases of the estimates obtained, we have Jackson-type inequalities for approximations by entire fuctions of exponential type, trigonometric polynomials and splines in various function spaces. The constants in the new inequalities are smaller than those known before.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28
198504, Санкт-Петербург,
Россия,
E-mail: olvin@math.spbu.ru, zhuk@math.spbu.ru

Поступило 11 апреля 2013 г.