Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

А. Н. Трефилов

η-ИНВАРИАНТ АТЬИ–ПАТОДИ–ЗИНГЕРА И ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

§1. Введение

Пусть X – компактное трёхмерное ориентированное риманово многообразие без края, Y – компактное четырёхмерное ориентированное риманово многообразие с краем X, изометричное $X\times\mathbb{R}^+$ вблизи края, R_Y – его форма кривизны ($R_Y \in \Omega^2(Y;\mathrm{End}(TY))$), определяемая связностью Леви-Чивиты. Дифференциальную 4-форму $(2\pi)^{-2}\operatorname{Tr}(R_Y^2)$ будем обозначать ω_Y. Положим

$$\eta(X) := \sigma(Y) - \frac{1}{3}\int\limits_Y \omega_Y.$$

Данное определение корректно, см. [1]. Очевидно, что функционал η является инвариантом изометрий. Он называется *η-инвариантом* (см. [1]).

Целью работы является вычисление степени η-инварианта и некоторых его "производных". Степень функционала мы определим следуя С. С. Подкорытову. Для определения нам потребуются некоторые обозначения.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Множество гладких ориентированных m-мерных подмногообразий в U, замкнутых в U и ограниченных, обозначим через $\Theta_m(U)$. В частности, множество $\Theta_m(\mathbb{R}^n)$ является множеством компактных (гладких, ориентированных, m-мерных) подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$. Множество многообразий из $\Theta_m(U)$, являющихся многообразиями без края, обозначим через $\widetilde{\Theta}_m(U)$.

Определение 1.1. *Пусть B – абелева группа,*

$$\chi : \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d) \to B$$

Ключевые слова: эта-инвариант Атьи–Патоди–Зингера, инварианты конечной степени.

– функционал. Говорят, что χ – функционал степени не выше k, *если для любого конечного открытого покрытия*

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i\in I} U_i$$

существует набор отображений $\{\chi_\alpha \mid \alpha \subset I, \#\alpha \leqslant k\}$,

$$\chi_\alpha : \widetilde{\Theta}_m\left(\bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) \to B,$$

такой, что для произвольного $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$ *выполняется равенство*

$$\sum_{\#\alpha\leqslant k} \chi_\alpha\left(X \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) = \chi(X).$$

Аналогично определяется функционал конечной степени в случае многообразий с краем. Если функционал конечной степени одновременно является инвариантом (например, изометрий), то его называют инвариантом конечной степени.

Подобный подход к определению инвариантов конечной степени используется в статьях [10] и [9]. В статье [10] установлена эквивалентность определений инвариантов конечной степени и инвариантов Васильева, а также выведено соотношение между их степенями. В статье [9] доказано, что полухарактеристика является инвариантом степени два.

Говоря об η-инварианте подмногообразий в $\mathbb{R}^d$, будем подразумевать, что на них задана риманова метрика, индуцированная евклидовой. Размерность d будем полагать достаточно большой (не меньше 10).

Было бы желательно для каждой аддитивной подгруппы $A \subset \mathbb{R}$ установить, является ли инвариант $\eta \bmod A\colon \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$ инвариантом конечной степени, и если да, то какой именно.

В настоящей работе нам удалось сделать это в двух случаях: $1 \notin A$ и $\frac{1}{3} \in A$.

Теорема 1.1. *При* $d > 8$ *функционал*

$$\eta \bmod A\colon \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$$

не является инвариантом конечной степени для любой аддитивной подгруппы $A \subset \mathbb{R}$, не содержащей 1. *В частности, η-инвариант не является инвариантом конечной степени.*

Теорема 1.2. *При каждом $d \in \mathbb{N}$ функционал*

$$\eta \bmod A\colon \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$$

является инвариантом степени 1 *для любой аддитивной подгруппы $A \subsetneq \mathbb{R}$, содержащей $\frac{1}{3}$.*

Ввиду результата статьи [3] кажется правдоподобной следующая гипотеза.

Гипотеза 1.1. *При достаточно больших d функционал*

$$\eta \bmod 1\colon \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$$

является инвариантом конечной степени.

Наряду с подмногообразиями в $\mathbb{R}^d$ можно было бы рассматривать подмногообразия, снабженные своей собственной римановой метрикой, и определить степени соответствующих функционалов. Оказывается, что такая постановка задачи не дает ничего нового по сравнению с исходной, см. §6.

Структура работы. В параграфе 2 дается предварительный материал, используемый на протяжении всей работы. Параграф 3 посвящен доказательству теоремы 1.1. Теорема 1.2 доказывается в параграфе 5 с использованием “леммы о фундаментальном цикле”, доказательству которой посвящен параграф 4. Содержание последнего, шестого параграфа описано в предыдущем абзаце.

§2. Предварительный материал: обозначения, определения и замечания

Основной комплекс цепей, который будет рассматриваться в работе – это комплекс гладких сингулярных симплексов. Для удобства мы будем использовать для него короткое обозначение $C_*(\cdot)$. Он квазиизоморфно вкладывается в комплекс цепей (не обязательно гладких) сингулярных симплексов (см. [7, Appendix A, Theorem 2.1]).

Локальной ориентацией m-мерного многообразия X в точке x называется каждая из двух образующих группы $H_m(X, X \setminus x; \mathbb{Z})$.

Ориентацией m-мерного многообразия с краем X называется функция, сопоставляющая каждой точке $x \in \mathrm{Int}(X) := X \setminus \partial X$ локальную ориентацию u_x, которая непрерывно зависит от x в следующем смысле: для каждой такой точки x должны существовать компактная окрестность $N \subset \mathrm{Int}(X)$ и класс $u_N \in H_m(X, X \setminus N)$ такие, что $\rho_y(u_N) = u_y$ для всех $y \in N$, где

$$\rho_y \colon H_*(X, X \setminus N) \to H_*(X, X \setminus y)$$

– естественный гомоморфизм, индуцированный тождественным отображением цепей.

Для компактного ориентированного многообразия с краем X его *фундаментальным гомологическим классом* мы будем называть класс $u \in H_m(X, \partial X)$, удовлетворяющий условию $\rho_x(u) = u_x$ для каждой точки $x \in \mathrm{Int}(X)$. Такой класс существует и единствен (см. [8, теорема A.8]). Представителя фундаментального класса мы будем называть *фундаментальным циклом*.

Пусть M – произвольное ориентированное многообразие. Через $-M$ будем обозначать то же самое многообразие с противоположной ориентацией.

Сигнатура σ компактного ориентированного многообразия X^m полагается равной нулю, если m не делится на 4; если же $m = 4k$, она определяется как сигнатура рациональной квадратичной формы

$$a \mapsto \langle a \smile a, u \rangle, \quad a \in H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q}),$$

где u – фундаментальный класс многообразия X^m. Непосредственно из определения вытекает, что $\sigma(-M) = -\sigma(M)$.

Многообразие $Y \in \Theta_m(\mathbb{R}^{d+1})$ мы будем называть *многообразием с прямым воротником*, если у его края X существует окрестность V_X (в Y) такая, что $V_X \subset \mathbb{R}^{d+1}_+$ и проекция V_X на $\mathbb{R}^d$ вдоль $(d+1)$-й координаты совпадает с X. Множество многообразий с прямым воротником мы будем обозначать $\widehat{\Theta}_m(\mathbb{R}^{d+1})$. Многообразия Y, затягивающие многообразия $X \in \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$, мы обычно будем считать многообразиями с прямым воротником.

В дальнейшем нам понадобится определение инварианта конечной степени не только для функционалов на $\widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$, но и для функционалов на $\Theta_4(\mathbb{R}^{d+1})$, и даже на $\widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})$. Следующее определение является обобщением определения из §1 на эти три случая.

Определение 2.1. *Пусть B – абелева группа, $\Xi \subset \Theta_m(\mathbb{R}^n)$ – произвольное подмножество, и пусть $\chi\colon \Xi \to B$ – функционал. Говорят, что χ –* функционал степени не выше k, *если для любого конечного открытого покрытия*

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i\in I} U_i$$

существует набор отображений $\{\chi_\alpha \mid \alpha \subset I, \#\alpha \leqslant k\}$,

$$\chi_\alpha\colon \Theta_m\left(\bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) \to B,$$

такой, что для каждого $X \in \Xi$ выполнено

$$\sum_{\#\alpha\leqslant k} \chi_\alpha\left(X \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) = \chi(X). \tag{$*$}$$

Если функционал конечной степени является инвариантом (например, изометрий), то он называется инвариантом конечной степени.

Замечание 2.1. При проверке конечности степени функционала χ достаточно определить значения отображений χ_α только на тех многообразиях

$$N \in \Theta_m\biggl(\bigcup_{i\in\alpha} U_\alpha\biggr),$$

для которых существует многообразие $X \in \Xi$ такое, что

$$N = X \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_\alpha.$$

На всех остальных многообразиях (в проверке свойства $(*)$ они не участвуют) значение χ_α можно положить равным нулю.

Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^d$ через $\Xi(U)$ мы в дальнейшем будем обозначать множество $\{X \cap U \mid X \in \Xi\}$.

Напоследок докажем два утверждения, касающихся η-инварианта.

Утверждение 2.1. *Пусть на многообразии $X \in \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$ существует изометрия, обращающая ориентацию. Тогда $\eta(X) = 0$.*

Доказательство. Поскольку η является инвариантом изометрий, то $\eta(X) = \eta(-X)$, с другой стороны, из определения η-инварианта следует, что $\eta(-X) = -\eta(X)$. Это возможно только если $\eta(X) = 0$. $\square$

Утверждение 2.2. *Для произвольной аддитивной подгруппы $A \subsetneq \mathbb{R}$ функционал $\eta \bmod A$ не является инвариантом степени ноль.*

Доказательство. То, что инвариант является инвариантом степени 0, по определению означает, что он является константой. По теореме Хитчина [5, Corollary 4–8], для метрики Берже μ_r $(r > 0)$ на сфере S^3 выполняется равенство $\eta(S^3, \mu_r) = (2/3)(1 - r^2)^2$. Отсюда следует, что η-инвариант принимает все неотрицательные значения. Поскольку η-инвариант меняет знак при смене ориентации, он принимает все вещественные значения. Поэтому $\eta \bmod A$ не является константой. $\square$

§3. Инварианты бесконечной степени. (Доказательство теоремы 1.1)

3.1. Вычисление одного определителя. В этом параграфе мы будем использовать множество индексов $I_k := \{0,1\}^k$. Индекс $q \in I_k$ записывается в виде $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Введем также обозначение

$$|q| := \sum_{i=1}^{k} q_i.$$

Для $j, l \in \mathbb{N}_0$ введем следующее обозначение:

$$P_{jl}(a_0, a_1, b, c) := c a_0^j a_1^l - j b^2 a_0^{j-1} a_1^l - l b^2 a_0^j a_1^{l-1}.$$

Легко видеть, что $P_{jl}(a_0, a_1, b, c)$ является полиномом при всех $j, l \in \mathbb{N}_0$.

Утверждение 3.1.1. *Пусть для $q \in I_k$ дана матрица D вида*

$$\begin{pmatrix} a_{q_1} & 0 & 0 & \ldots & b \\ 0 & a_{q_2} & 0 & \ldots & b \\ 0 & 0 & a_{q_3} & \ldots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \ldots & c \end{pmatrix},$$

где a_0, a_1, b, $c \in \mathbb{R}$; пусть $l := |q|$, $j := k - l$. Тогда

$$\det D = P_{jl}(a_0, a_1, b, c).$$

Доказательство. Пусть $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$. Поскольку при втором типе преобразования матриц определитель не меняется, то

$$\det\begin{pmatrix} a_{q_1} & 0 & \dots & b \\ 0 & a_{q_2} & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{q_1} & 0 & \dots & b \\ 0 & a_{q_2} & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \dots & c - b\frac{b}{a_{q_1}} \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \det\begin{pmatrix} a_{q_1} & 0 & \dots & b \\ 0 & a_{q_2} & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c - b^2(\frac{j}{a_0} + \frac{l}{a_1}) \end{pmatrix}$$

$$= a_0^j a_1^l \left(c - b^2\left(\frac{j}{a_0} + \frac{l}{a_1}\right)\right) = P_{jl}(a_0, a_1, b, c).$$

Поскольку определитель является непрерывной функцией элементов матрицы, формула остается верной и при $a_0 = 0$ или $a_1 = 0$. □

3.2. Построение специального набора матриц.

Лемма 3.2.1. *Для любого $k \geqslant 3$ существует набор матриц $(A_q)_{q\in I_k}$ такой, что*

1) *каждая матрица набора симметрична,*

2) *соответствующие недиагональные элементы у различных матриц набора совпадают между собой: $a_{q,i,j} = a_{q',i,j}$ для любых $q, q' \in I_k$, $i \neq j$,*

3) *для любых $q, q' \in I_k$ таких, что $q_i = q'_i$, i-е диагональные элементы у матриц A_q и $A_{q'}$ совпадают: $a_{q,i,i} = a_{q',i,i}$,*

4) $\sum\limits_{q\in I_k} (-1)^{|q|}\sigma(A_q) = (-1)^k$.

Доказательство. Покажем, что набор матриц $(A_q)_{q\in I_k}$,

$$A_q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & q_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k+1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяет условиям леммы.

Ясно, что он удовлетворяет условиям 1)–3).

Для того, чтобы проверить условие 4), найдем сигнатуру матрицы A_q при фиксированном q. Положим $l := |q|$, $j := k - l$. Собственные числа матрицы A_q с учетом кратности являются корнями уравнения

$$\det(A_q - \lambda E) = 0$$

(E – единичная матрица соответствующего размера). В соответствии с утверждением 3.1.1

$$\det(A_q - \lambda E) = P_{jl}(-\lambda, 1-\lambda, 1, k+1-\lambda).$$

Пусть $0 < l < k$, тогда

$$\begin{aligned} &P_{jl}(-\lambda, 1-\lambda, 1, k+1-\lambda) \\ &\quad = (-\lambda)^{j-1}(1-\lambda)^{l-1}((k+1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - (j(1-\lambda) - l\lambda)) \\ &\qquad = (-\lambda)^{j-1}(1-\lambda)^{l-1}((k+1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - j + k\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, среди собственных чисел матрицы A_q имеется $j-1$ нулей и $l-1$ единиц, а еще 3 собственных числа являются корнями уравнения $g(\lambda) = 0$, где

$$g(\lambda) := (k+1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - j + k\lambda.$$

Поскольку $g(0) = -j < 0$, а $g(1) = k-j > 0$, то уравнение $g(\lambda) = 0$ имеет два положительных и один отрицательный корень. Таким образом, $\sigma(A_q) = l - 1 + 2 - 1 = l = |q|$.

Пусть теперь $l = 0$. Тогда

$$\det(A_q - \lambda E) = (-\lambda)^{j-1}((k+1-\lambda)(-\lambda) - k).$$

Таким образом, у матрицы A_q среди собственных чисел имеется $j-1$ нулей и 2 корня уравнения $(k+1-\lambda)(-\lambda) - k = 0$. Поскольку $(k+1-0)(-0) - k = -k < 0$, эти два корня – разных знаков. А значит, сигнатура этой матрицы равна $(j-1)0 + 1 - 1 = 0 = l = |q|$.

Остается рассмотреть случай $l = k$. В этом случае

$$\det(A_q - \lambda E) = (1-\lambda)^{l-1}((k+1-\lambda)(1-\lambda) - k).$$

Это значит, что среди собственных чисел матрицы имеется $l-1$ единиц и два корня уравнения $(k+1-\lambda)(1-\lambda) - k = 0$. Поскольку $(k+1-0)(1-0)-k = 1 > 0$, а $(k+1-1)(1-1)-k = -k < 0$, это уравнение имеет два положительных корня, а значит $\sigma(A_q) = k+1 = l+1 = |q|+1$.

В итоге мы доказали общую формулу: $\sigma(A_q) = |q| + q_1 q_2 \dots q_k$.

Таким образом,

$$\sum_{q\in I_k}(-1)^{|q|}\sigma(A_q)=\sum_{q\in I_k}(-1)^{|q|}|q|+(-1)^k=(-1)^k$$

при $k\geqslant 3$. □

3.3. Построение специального набора подмногообразий. Пусть L – оснащенное зацепление в S^3 (определение см. в [6, 3.1]). Пусть γ_i – его компоненты с оснащениями n_i. Матрицу A_L, у которой $a_{ij}=\mathrm{lk}(\gamma_i,\gamma_j)$, $a_{ii}=n_i$, мы будем называть *матрицей коэффициентов зацепления* зацепления L.

Лемма 3.3.1. *Пусть D^4 – 4-мерный замкнутый единичный шар. Пусть на его границе S^3 задано оснащенное зацепление L. Рассмотрим многообразие M^4, полученное гладким приклеиванием к D^4 вдоль S^3 2-ручек по оснащенному зацеплению L* (см. [6, 3.1])*. Тогда матрица коэффициентов зацепления представляет форму индекса пересечений многообразия M.*

(См. [6, 3.2].)

Лемма 3.3.2. *При $d>8$ для любого $k\geqslant 3$ существуют открытое покрытие*

$$\mathbb{R}^{d+1}=\bigcup_{i=1}^{k}U_i$$

и набор многообразий $(Y_q)_{q\in I_k}$, $Y_q\in\widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})$, такие, что

1) $\sum_{q\in I_k}(-1)^{|q|}\sigma(Y_q)=(-1)^k$,
2) *для любого $j\leqslant k$ и любых $q,q'\in I_k$ с $q_j=q'_j$ имеем* $U_j\cap Y_q=U_j\cap Y_{q'}$.

Доказательство. Пусть $(A_q)_{q\in I_k}$ – набор матриц из леммы 3.2.1. Для каждого $q\in I_k$ рассмотрим многообразие Y_q, полученное гладким приклеиванием к D^4 2-ручек по оснащенному зацеплению, матрица коэффициентов зацепления которого совпадает с A_q. По лемме 3.3.1 и поскольку (по определению формы индекса пересечения) ее сигнатура совпадает с сигнатурой многообразия, для произвольного $q\in I_k$ имеем $\sigma(Y_q)=\sigma(A_q)$ – первое условие леммы для таких многообразий выполнено. Поскольку у матриц A_q совпадают соответствующие недиагональные элементы, можно производить приклеивание по одному и тому же зацеплению, но с разными оснащениями.

Вложим многообразия Y_q в $\mathbb{R}^d$ таким образом, что

1) диск D^4, к которому приклеиваются ручки для получения многообразий Y_q, вкладывается в $\mathbb{R}^d$ одним и тем же способом,

2) вложение любой 2-ручки однозначно определяется оснащением соответствующего ей узла.

Благодаря тому, что d достаточно велико, по соображениям общего положения мы можем построить такие вложения.

Обозначим через K_i объединение по всем многообразиям 2-ручек, приклеенных по i-му узлу, $i = 1, \dots, k$. Положим

$$U_i := \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{j \neq i} K_j,$$

$i = 1, \dots, k$. Тогда ясно, что набор $(U_i)_{i=1}^k$ является открытым покрытием пространства $\mathbb{R}^d$, и U_i вместе с Y_q удовлетворяют второму условию доказываемой леммы. Однако $Y_q \in \Theta_4(\mathbb{R}^d)$, а нам требуются не просто четырёхмерные многообразия, а многообразия с прямым воротником. Построим их.

Легко видеть, что на каждом многообразии Y_q можно построить бесконечно гладкую функцию f_q такую, что

1) $f_q\big|_{\operatorname{Int} Y_q} > 0$,

2) $f_q\big|_{\partial Y_q} = 0$,

3) $\nabla f_q\big|_{\partial Y_q} \neq 0$,

4) сужения функций f_q на D^4 не зависят от q,

5) значения f_q на одинаково приклеенных (а значит, и на одинаково вложенных) 2-ручках совпадают.

Каждому многообразию Y_q сопоставим многообразие $Z_q \subset \mathbb{R}^{d+1}$, – как график функции f_q.

Рассмотрим отображение $h_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ такое, что

1) $h_1(x) < 0$ при $x < 0$,

2) $h_1(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$,

3) $h_1'(x) > 0$ при $x > 1$,

4) $\lim\limits_{x \to \infty} h_1(x) = \infty$.

Обозначим координаты в $\mathbb{R}^{d+1}$ следующим образом:

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) =: x, \quad x_{d+1} =: y.$$

Рассмотрим отображение $h\colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ с $h(x, y) := (x, h_1(y))$. Тогда легко видеть, что $h^{-1}(Z_q) \in \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})$ и $h^{-1}(Z_q)$ гомеоморфно Y_q для любого $q \in I_k$. Отсюда следует, в частности, что $\sigma(h^{-1}(Z_q)) = \sigma(Y_q)$. Легко видеть, что $h^{-1}(Z_q)$ вместе с открытым покрытием пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ множествами $U_i \times \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям леммы. □

3.4. Лемма о функционалах конечной степени.

Лемма 3.4.1. *Пусть $\Xi \subset \Theta_m(\mathbb{R}^d)$ – произвольное подмножество, B – произвольная абелева группа, $\chi\colon \Xi \to B$ – функционал степени не выше l. Пусть заданы конечное открытое покрытие*

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^{l+1} U_i$$

и семейство многообразий $\{Y_q\}_{q \in I_{l+1}}$ такие, что для любого $j \leqslant l+1$ и любых $q, q' \in I_{l+1}$ с $q_j = q'_j$ выполняется равенство

$$U_j \cap Y_q = U_j \cap Y_{q'}.$$

Тогда

$$\sum_{q \in I_{l+1}} (-1)^{|q|} \chi(Y_q) = 0.$$

Доказательство. То, что χ является инвариантом степени не выше l, по определению означает, что существует набор отображений

$$\{\chi_\alpha \mid \alpha \subset I, \#\alpha \leqslant l\}, \quad I = \{1, 2, \ldots, l+1\},$$

$$\chi_\alpha\colon \Theta_m\left(\bigcup_{i \in \alpha} U_i\right) \to B,$$

такой, что для произвольного $X \in \Xi$ выполняется равенство

$$\sum_{\#\alpha \leqslant l} \chi_\alpha\left(X \cap \bigcup_{i \in \alpha} U_i\right) = \chi(X).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{q \in I_{l+1}} (-1)^{|q|} \chi(Y_q) &= \sum_{q \in I_{l+1}} \sum_{\#\alpha \leqslant l} (-1)^{|q|} \chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i \in \alpha} U_i\right) \\ &= \sum_{\#\alpha \leqslant l} \sum_{q \in I_{l+1}} (-1)^{|q|} \chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i \in \alpha} U_i\right).\end{aligned}$$

Покажем, что для любого фиксированного α с $\#\alpha \leqslant l$ выполняется равенство

$$\sum_{q\in I_{l+1}} (-1)^{|q|}\chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) = 0.$$

Действительно, поскольку $\#\alpha \leqslant l$, существует индекс $j \in I \setminus \alpha$. Тогда

$$\sum_{q\in I_{l+1}} (-1)^{|q|}\chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right)$$

$$= \sum_{q:\,q_j=0} (-1)^{|q|}\chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) + \sum_{q:\,q_j=1} (-1)^{|q|}\chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) = 0,$$

поскольку соответствующие слагаемые в двух суммах правой части отличаются лишь знаком. Поскольку левая часть равна нулю для любого α, получаем, что и

$$\sum_{\#\alpha\leqslant l}\ \sum_{q\in I_{l+1}} (-1)^{|q|}\chi_\alpha\left(Y_q \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) = 0. \qquad \square$$

3.5. Сигнатура – инвариант бесконечной степени.

Лемма 3.5.1. *При $d > 8$ функционал*

$$\sigma \bmod A\colon \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1}) \to \mathbb{R}/A$$

не является инвариантом конечной степени ни для какой аддитивной подгруппы $A \subset \mathbb{R}$, не содержащей 1.

Доказательство. Зафиксируем $k > 2$. Рассмотрим открытое покрытие

$$\mathbb{R}^{d+1} = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$$

и набор многообразий $(Y_q)_{q\in I_k}$, $Y_q \in \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})$, из леммы 3.3.2. Применим к ним лемму 3.4.1 в случае $l = k-1$. По заключению этой леммы, если $\sigma \bmod A$ является инвариантом степени $\leqslant k-1$, то

$$\sum_{q\in I_k} (-1)^{|q|}\sigma(Y_q) \equiv 0.$$

С другой стороны, по лемме 3.3.2

$$\sum_{q\in I_k}(-1)^{|q|}\sigma(Y_q)=(-1)^k.$$

Поскольку A не содержит 1, неверно, что $0\equiv(-1)^k \pmod A$, а значит, мы получили противоречие. Иными словами, $\sigma \bmod A$ не является инвариантом степени $\leqslant k-1$, а поскольку k можно выбирать сколь угодно большим, мы получаем, что $\sigma \bmod A$ не является инвариантом конечной степени. □

3.6. $\eta \bmod A$ – инвариант бесконечной степени при $1\notin A$.

Теорема 3.6.1. *При $d>8$ функционал*

$$\eta \bmod A\colon \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}/A$$

не является инвариантом конечной степени ни для какой аддитивной подгруппы $A\subset\mathbb{R}$, не содержащей 1. В частности, η-инвариант не является инвариантом конечной степени.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\eta \bmod A$ является инвариантом степени $\leqslant k$. Покажем, что функционал

$$\sigma \bmod A\colon \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})\to\mathbb{R}/A$$

также является инвариантом степени $\leqslant k$, что будет противоречить лемме 3.5.1. Пусть

$$\bigcup_{i\in I}V_i=\mathbb{R}^{d+1}$$

– произвольное конечное открытое покрытие. Положим $U_i:=V_i\cap\mathbb{R}^d$, $i\in I$. Тогда множества U_i образуют покрытие $\mathbb{R}^d$:

$$\bigcup_{i\in I}U_i=\mathbb{R}^d.$$

А значит, по предположению, существует набор отображений

$$\{\eta_\alpha\mid\alpha\subset I,\#\alpha\leqslant k\},\quad \eta_\alpha\colon\widetilde{\Theta}_3\left(\bigcup_{i\in\alpha}U_i\right)\to\mathbb{R}/A,$$

такой, что для каждого $X\in\widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{\alpha:\#\alpha\leqslant k}\eta_\alpha\left(X\cap\bigcup_{i\in\alpha}U_i\right)\equiv\eta(X)(\bmod A).$$

Пусть $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ – разбиение единицы, подчиненное покрытию (V_i). Тогда рассмотрим набор отображений

$$\sigma_\alpha\colon \widehat{\Theta}_4\left(\bigcup_{i\in\alpha} V_i\right) \to \mathbb{R}/A,$$

определяемых следующим образом: для $N \in \widehat{\Theta}_4(\bigcup\limits_{i\in\alpha} V_i)$ полагаем

$$\sigma_\alpha(N) := \begin{cases} \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_N g_i\omega_Y \bmod A + \eta_\alpha(\partial N) & \text{при } \ \alpha = \{i\},\\ \eta_\alpha(\partial N) & \text{при } \ \#\alpha \neq 1. \end{cases}$$

Для произвольного $Y \in \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})$ с краем $\partial Y = X$

$$\sum_{\#\alpha\leqslant k} \sigma_\alpha\left(Y \cap \bigcup_{i\in\alpha} V_i\right) = \sum_{\#\alpha\leqslant k} \eta_\alpha\left(X \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) + \frac{1}{3}\sum_{i\in I}\int\limits_Y g_i\omega_Y \bmod A$$

$$= \eta(X) \bmod A + \frac{1}{3}\int\limits_Y \omega_Y \bmod A = \sigma(Y) \bmod A,$$

конечность степени сигнатуры доказана, противоречие. $\square$

§4. Лемма о фундаментальном цикле

Этот раздел посвящен доказательству следующей леммы, которая понадобится нам при доказательстве теоремы 1.2.

Лемма 4.1 (Лемма о фундаментальном цикле). *Для каждого конечного покрытия $\mathbb{R}^d$ открытыми множествами*

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i\in I} U_i$$

для произвольного m существует набор отображений

$$(f_i)_{i\in I}, f_i\colon \widetilde{\Theta}_m(U_i) \to C_m(\mathbb{R}^d;\mathbb{Z})$$

такой, что

1) *для любого $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_i)$ $\quad f_i(N) \in C_m(N;\mathbb{Z})$,*
2) *для каждого $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$*

$$\sum_{i\in I} f_i(X \cap U_i)$$

является фундаментальным циклом X.

4.1. Наводящие соображения. В этом разделе мы приведем наивное “доказательство” леммы 4.1.

“Доказательство”: рассмотрим набор замкнутых множеств $(K_i)_{i\in I}$ такой, что:

1) для произвольного $i \in I$ имеем $K_i \subset U_i$,
2) $\bigcup\limits_{i\in I} K_i = \mathbb{R}^d$,
3) для произвольных $i, j \in I$, $i \neq j$, имеем $\operatorname{Int} K_i \cap \operatorname{Int} K_j = \varnothing$.

Тогда для произвольного $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_i)$ множество $N \cap K_i$ можно триангулировать. В качестве $f_i(N)$ возьмем цепь, состоящую из суммы симплексов, представляющих триангуляцию $N \cap K_i$. Для произвольного $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$ симплексы суммы

$$\sum_{i\in I} f_i(X \cap U_i)$$

представляют триангуляцию X, а значит, сумма является фундаментальным циклом.

Это “доказательство” не годится по следующим причинам.

1) Вообще говоря, неверно, что для произвольного многообразия $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_i)$ множество $N \cap K_i$ допускает триангуляцию.

2) Даже если для какого-нибудь многообразия $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$ множество $X \cap K_i$ допускает триангуляцию для произвольного индекса $i \in I$, то, вообще говоря, неверно, что на границе эти триангуляции будут согласованы, а значит, их объединение не будет триангуляцией, и цепь, состоящая из суммы симплексов триангуляций, не будет циклом (а значит, не будет и фундаментальным циклом).

Тем не менее, несмотря на свою некорректность, это рассуждение показывает, что утверждение леммы о фундаментальном цикле вполне правдоподобно.

4.2. Обозначения. Для многообразия X и компакта $S \subset X$ введем следующие обозначения:

$$H_*(X \mid S) := H_*(X, X \setminus S), \quad C_*(X \mid S) := C_*(X)/C_*(X \setminus S).$$

Для компактов $S_1 \subset S_2 \subset X$ будем рассматривать проекцию $p_{S_1} : C_*(X \mid S_2) \to C_*(X \mid S_1)$ и соответствующий ей естественный гомоморфизм $\rho_{S_1} : H_*(X \mid S_2) \to H_*(X \mid S_1)$.

Пусть X – гладкое многообразие, $S \subset X$ – его компактное подмножество. Введем отображение $\widehat{p}_S\colon C_m(X) \to C_m(X)$, переводящее симплексы, задевающие S, тождественно, и обнуляющее остальные.

В этом параграфе для ориентированного многообразия X и его компактного подмножества $S \subset \operatorname{Int} X$ *фундаментальным гомологическим классом* пары (X, S) будем называть класс $u_S \in H_m(X \mid S)$, удовлетворяющий условию $\rho_x(u_S) = u_x$ для каждой точки $x \in S$. Такой класс существует и единствен (см. [8, теорема A.8]). *Фундаментальным циклом* будем называть произвольного представителя фундаментального гомологического класса в $C_m(X \mid S)$.

Итак, пусть задано конечное открытое покрытие

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

$n := \#I$. Каждому из U_i поставим в соответствие вложенную последовательность замкнутых множеств

$$K_i = K_{i,1} \subset K_{i,2} \subset K_{i,3} \subset \dots \subset K_{i,n} \subset U_i$$

такую, что для каждого $s = 1, \dots, n-1$ имеем $K_{i,s} \subset \operatorname{Int}(K_{i,s+1})$ и

$$\bigcup_{i \in I} K_i = \mathbb{R}^d.$$

Положим $\mathrm{A} := 2^I \setminus \{\varnothing\}$. Для $\alpha \in \mathrm{A}$, $s \in \mathbb{N}$, $s \leqslant n$ обозначим

$$K_{\alpha,s} := \bigcap_{i \in \alpha} K_{i,s}.$$

Для упрощения записи будем писать K_α вместо $K_{\alpha,\#\alpha}$.

Также для $\alpha \in \mathrm{A}$ обозначим

$$L_\alpha := \bigcup_{\beta \supsetneq \alpha} K_\beta.$$

Пусть X – некое гладкое m-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $C_*^{\mathrm{sm}}(X)$ подкомплекс цепей гладких симплексов, подчиненных каждому из следующих открытых покрытий многообразия X:

$$\{X \cap \operatorname{Int}(K_{i,2}), X \setminus K_{i,1}\}; \{X \cap \operatorname{Int}(K_{i,3}), X \setminus K_{i,2}\};$$
$$\dots; \{X \cap \operatorname{Int}(K_{i,n}), X \setminus K_{i,n-1}\}; \{X \cap U_i, X \setminus K_{i,n}\}$$

для каждого $i \in I$. Ясно, что условие подчинения симплексов каждому из предъявленных покрытий эквивалентно условию подчинения одному большому покрытию (состоящему из всевозможных пересечений).

Комплекс $C_*^{\mathrm{sm}}(X)$ по теореме о покрытии (ср. [7, VII, Theorem 6.4]) квазиизоморфно вкладывается в комплекс $C_*(X)$ сингулярных гладких симплексов. Мы будем отождествлять цепь и ее образ при вложении. Благодаря квазиизоморфности подобных вложений, для введенного комплекса определено понятие фундаментального цикла – как представителя фундаментального класса в тех же случаях, когда оно определено для комплекса сингулярных цепей. То, что симплексы подчинены указанным покрытиям, является формализацией того условия, что мы рассматриваем "маленькие" симплексы.

4.3. Вспомогательные леммы. Здесь мы доказываем вспомогательные леммы, используемые для доказательства основной леммы в п. 4.4.

Лемма 4.3.1. *Пусть многообразие $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$, пусть $S_1 \subset S_2 \subset X$ – компактные подмножества. Тогда если $a \in C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_2)$ является фундаментальным циклом, то $p_{S_1}(a)$ также является фундаментальным циклом.*

Доказательство. Пусть $a' \in C_m^{\mathrm{sm}}(X)$ – произвольный представитель класса a. Тогда, очевидно, a' является представителем также и для $p_{S_1}(a)$. То, что a является циклом, означает, что

$$\partial a' \in C_m^{\mathrm{sm}}(X \setminus S_2) \subset C_m^{\mathrm{sm}}(X \setminus S_1).$$

Таким образом, $p_{S_1}(a)$ тоже является циклом. Покажем, что этот цикл фундаментален.

То, что a является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_2)$, по определению означает, что для любого $x \in S_2$ $\rho_x([a])$ является локальной ориентацией. Отсюда следует, что для любого $x \in S_1 \subset S_2$ гомологический класс

$$\rho_x([p_{S_1}(a)]) = \rho_x \circ \rho_{S_1}([a]) = \rho_x([a])$$

также является локальной ориентацией, а значит, $p_{S_1}(a)$ является фундаментальным циклом. □

Лемма 4.3.2. *Пусть $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$, $S \subset X$ – компактное подмножество, и пусть*

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j,$$

где J – произвольное множество индексов (не обязательно конечное), а S_j – компактны при всех j. Тогда цепь $a \in C_k^{\mathrm{sm}}(X \mid S)$ является нулевой в том и только том случае, когда для каждого $j \in J$ цепь $p_{S_j}(a)$ является нулевой.

Доказательство. Пусть $a' \in C_k^{\mathrm{sm}}(X)$ – произвольный представитель класса a. Тогда a' является представителем также и для $p_{S_j}(a)$ для произвольного $j \in J$. То, что $a = 0$, означает, что $a' \in C_k^{\mathrm{sm}}(X \setminus S)$; то, что $p_{S_j}(a) = 0$ для произвольного $j \in J$, означает, что $a' \in C_k^{\mathrm{sm}}(X \setminus S_j)$. Эквивалентность требуемых утверждений следует из того, что

$$C_k^{\mathrm{sm}}(X \setminus S) = C_k^{\mathrm{sm}}\left(\bigcap_{j\in J}(X \setminus S_j)\right) = \bigcap_{j\in J} C_k^{\mathrm{sm}}(X \setminus S_j). \qquad \square$$

Лемма 4.3.3. *Пусть $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$, $S \subset X$ – компактное подмножество, и пусть*

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j,$$

где все S_j также компактны. Тогда цикл $a \in C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S)$ фундаментален в том и только том случае, когда для каждого $j = 1, \dots, n$ цепь $p_{S_j}(a)$ является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_j)$.

Доказательство. По лемме 4.3.2 то, что $\partial a = 0$, эквивалентно тому, что $p_{S_j}(\partial a) = \partial p_{S_j}(a) = 0$ при всех j. Таким образом, a является циклом тогда и только тогда, когда $p_{S_j}(a)$ является циклом при всех j.

Если a является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S)$, то циклы $p_{S_j}(a)$ являются фундаментальными по лемме 4.3.1.

Обратно, пусть теперь $p_{S_j}(a)$ являются фундаментальными циклами. Это значит, что для произвольного j и произвольного $x \in S_j$ класс $\rho_x([p_{S_j}(a)])$ является локальной ориентацией. Но для любого $x \in S$ существует j такое, что $x \in S_j$, а значит, $\rho_x([a])) = \rho_x([p_{S_j}(a)])$ является локальной ориентацией. Это и означает, что a является фундаментальным циклом. $\square$

Лемма 4.3.4. *Пусть $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$, $S_1 \subset S_2 \subset X$ – его компактные подмножества, и пусть $a \in C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_1)$ – фундаментальный цикл. Тогда существует фундаментальный цикл $b \in C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_2)$ с $p_{S_1}(b) = a$.*

Доказательство. Пусть $b_1 \in C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_2)$ – произвольный фундаментальный цикл. Тогда по лемме 4.3.1 $p_{S_1}(b_1)$ является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid S_1)$. Поскольку и a, и $p_{S_1}(b_1)$ являются фундаментальными циклами, их гомологические классы совпадают (являются фундаментальными гомологическими классами), а это значит, что существует цепь $c_1 \in C_{m+1}^{\mathrm{sm}}(X \mid S_1)$ с $\partial c_1 = p_{S_1}(b_1) - a$. Поскольку $C_{m+1}^{\mathrm{sm}}(X \setminus S_2) \subset C_{m+1}^{\mathrm{sm}}(X \setminus S_1)$, то отображение $p_1 \colon C_{m+1}^{\mathrm{sm}}(X \mid S_2) \to C_{m+1}^{\mathrm{sm}}(X \mid S_1)$ является сюръекцией, а это значит, что существует цепь $c_2 \in C_{m+1}^{\mathrm{sm}}(X \mid S_2)$ с $p_{S_1}(c_2) = c_1$.

Покажем, что $b := b_1 - \partial c_2$ – искомый фундаментальный цикл. Действительно, $\partial b = \partial b_1 - \partial^2 c_2 = 0$, а значит, b – цикл. Поскольку $[b] = [b_1] - [\partial c_2] = [b_1]$, b – фундаментальный цикл. И, наконец,

$$\begin{aligned} p_{S_1}(b) &= p_{S_1}(b_1) - p_{S_1}(\partial c_2) \\ &= p_{S_1}(b_1) - \partial(p_{S_1}(c_2)) = p_{S_1}(b_1) - \partial(c_1) = a. \end{aligned}$$ □

4.4. Основная лемма. В этом разделе докажем лемму, из которой практически сразу же вытекает лемма о фундаментальном цикле.

Лемма 4.4.1. *Существует набор отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, где $f_\alpha \colon \widetilde{\Theta}_m(U_\alpha) \to C_m(\mathbb{R}^d)$ такой, что:*

1) *для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ и любого $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_\alpha)$ выполняется $f_\alpha(N) \in C_m(N)$,*
2) *для любого $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$*

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(X \cap U_\alpha)$$

является фундаментальным циклом в $C_m(X)$.

Доказательство. Построим набор отображений

$$f_\alpha \colon \widetilde{\Theta}_m^{\mathrm{sm}}(U_\alpha) \to C_m(\mathbb{R}^d), \quad \alpha \in \mathrm{A},$$

такой, что для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ и для любого $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_\alpha)$ выполнены условия

а) $f_\alpha(N) \in C_m^{\mathrm{sm}}(N)$,

б) цепь

$$p_{N \cap K_\alpha}\left(\sum_{\beta \supset \alpha} f_\beta(N \cap U_\beta)\right)$$

является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(N \mid N \cap K_\alpha)$, в) для любого $\beta \in \mathrm{A}$ такого, что $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$, $p_{K_\beta}(f_\alpha(N)) = 0$.

Покажем, что набор отображений, обладающий этими тремя свойствами – искомый. Для этого достаточно проверить, что для любого $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(X \cap U_\alpha)$$

является фундаментальным циклом в $C_m(X)$. Действительно, по лемме 4.3.3 достаточно проверить, что

$$p_{X \cap K_i}\left(\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(X \cap U_\alpha)\right) = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} p_{X \cap K_i}\left(f_\alpha(X \cap U_\alpha)\right)$$

является фундаментальным циклом в

$$C_m^{\mathrm{sm}}(X \mid X \cap K_i) = C_m^{\mathrm{sm}}(X \cap U_i \mid X \cap K_i)$$

(группы цепей совпадают, так как симплексы "маленькие").

По свойству в) $p_{X \cap K_i}\left(f_\alpha(X \cap U_\alpha)\right) = 0$, если $i \notin \alpha$, поэтому

$$\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} p_{X \cap K_i}\left(f_\alpha(X \cap U_\alpha)\right) = \sum_{\alpha \in \mathrm{A} : i \in \alpha} p_{X \cap K_i}\left(f_\alpha(X \cap U_\alpha)\right),$$

а последняя сумма является фундаментальным циклом по свойству б).

Будем строить набор отображений, удовлетворяющий свойствам а)–в), по индукции.

База: при $\alpha = I$ определим $f_I \colon \widetilde{\Theta}_m(U_I) \to C_m(\mathbb{R}^d)$ так, что для произвольного $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_I)$ $\quad f_I(N) \in C_m^{\mathrm{sm}}(N)$ и $p_{K_I}(f_I(N))$ является фундаментальным циклом в $C_m(U_I \mid K_I)$. Ясно, что исходя из этих свойств такое отображение построить можно, хоть и не единственным образом. Очевидно, что построенное отображение удовлетворяет свойствам а)–в).

Индукционный переход: будем строить отображение f_α, считая, что уже построен набор отображений $(f_\beta)_{\beta \supsetneq \alpha}$, удовлетворяющий свойствам а)–в).

Построим $f_\alpha(N)$ для каждого $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_\alpha)$ и проверим выполнение свойств а)–в).

Шаг 1. Покажем, что для $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_\alpha)$ цепь

$$p_{N \cap L_\alpha}\left(\sum_{\beta \supsetneq \alpha} f_\beta(N \cap U_\beta)\right)$$

является фундаментальным циклом в $C_m(N \mid N \cap L_\alpha)$.

По лемме 4.3.3 достаточно проверить, что цепи

$$p_{N\cap K_\gamma}\left(\sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right)$$

являются фундаментальными циклами в $C_m(N \mid N\cap K_\gamma)$ при каждом $\gamma \supsetneq \alpha$. По свойству в)

$$p_{N\cap K_\gamma}\left(\sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right) = p_{N\cap K_\gamma}\left(\sum_{\beta\supset\gamma} f_\beta(N\cap U_\beta)\right),$$

а правая часть является фундаментальным циклом по свойству б).

Шаг 2. Построение f_α. Поскольку

$$N\cap L_\alpha \subset N\cap K_{\alpha,n},$$

по лемме 4.3.4 существует цепь $g_\alpha(N)\in C_m^{\mathrm{sm}}(N)$ такая, что

$$p_{N\cap K_{\alpha,n}}(g_\alpha(N))$$

является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(N \mid N\cap K_{\alpha,n})$ и

$$p_{N\cap L_\alpha}(g_\alpha(N)) = p_{N\cap L_\alpha}\left(\sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right). \tag{$*$}$$

Положим

$$f_\alpha(N) := \widehat{p}_{N\cap K_\alpha}\left(g_\alpha(N) - \sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right).$$

Свойство а) выполнено по построению.

Шаг 3. Проверка свойства б).

Необходимо проверить, что цепь

$$p_{N\cap K_\alpha}\left(\sum_{\beta\supset\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right)$$

является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(N \mid N\cap K_\alpha)$.

Подставляя в эту сумму вместо $f_\alpha(N)$

$$\widehat{p}_{N\cap K_\alpha}\left(g_\alpha(N)-\sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right)$$

и учитывая, что $p_{N\cap K_\alpha}\circ\widehat{p}_{N\cap K_\alpha}=p_{N\cap K_\alpha}$, получаем, что

$$p_{N\cap K_\alpha}\left(\sum_{\beta\supset\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right)=p_{N\cap K_\alpha}(g_\alpha(N)).$$

Поскольку по построению $p_{N\cap K_{\alpha,n}}(g_\alpha(N))$ является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(N\mid N\cap K_{\alpha,n})$, и поскольку

$$p_{N\cap K_\alpha}\circ p_{N\cap K_{\alpha,n}}=p_{N\cap K_\alpha},$$

правая часть является фундаментальным циклом в $C_m^{\mathrm{sm}}(N\mid N\cap K_\alpha)$ по лемме 4.3.1.

Шаг 4. Проверка свойства в).

Проверяем, что для любого $\beta\in \mathrm{A}$ такого, что $\beta\setminus\alpha\neq\varnothing$,

$$p_{K_\beta}(f_\alpha(N))=0.$$

1) Пусть $\beta\supsetneq\alpha$. Покажем, что в этом случае $p_{K_\beta}(f_\alpha(N))=0$. По свойству $(*)$

$$p_{N\cap L_\alpha}\left(g_\alpha(N)-\sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right)=0.$$

Поскольку $K_\beta\subset L_\alpha$, ясно, что

$$p_{N\cap K_\beta}\left(g_\alpha(N)-\sum_{\gamma\supsetneq\alpha} f_\gamma(N\cap U_\gamma)\right)=0.$$

Поскольку все рассматриваемые симплексы автоматически лежат в $C_m(N)$, то $p_{K_\beta}(\dots)=p_{N\cap K_\beta}(\dots)$. Поэтому

$$p_{K_\beta}\left(g_\alpha(N)-\sum_{\gamma\supsetneq\alpha} f_\gamma(N\cap U_\gamma)\right)=0.$$

Наконец, поскольку для произвольной цепи a если $p_{K_\beta}(a) = 0$, то и $p_{K_\beta}(\widehat{p}_{N\cap K_\alpha}(a)) = 0$ (вместо $N \cap K_\alpha$ можно было бы подставить любое другое множество), получаем, что

$$p_{K_\beta}(f_\alpha(N)) = p_{K_\beta}\left(\widehat{p}_{N\cap K_\alpha}\left(g_\alpha(N) - \sum_{\beta\supsetneq\alpha} f_\beta(N\cap U_\beta)\right)\right) = 0.$$

2) Пусть теперь $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$. Положим $\gamma := \alpha \cup \beta$, $s := \#\alpha$. В силу леммы 4.3.2 достаточно доказать, что для произвольного $x \in K_\beta$ имеем $p_x(f_\alpha(N)) = 0$. Поскольку симплексы “маленькие”, то

$$f_\alpha(N) \in C_m(N \cap K_{\alpha,s+1}).$$

Таким образом ясно, что если $x \notin K_{\alpha,s+1}$, то $p_x(f_\alpha(N)) = 0$. Если же $x \in K_{\alpha,s+1}$, то

$$x \in K_{\beta,\#\beta} \cap K_{\alpha,\#\alpha+1} \subset K_{\beta,\#\gamma} \cap K_{\alpha,\#\gamma} = K_{\gamma,\#\gamma},$$

а значит,

$$p_x(f_\alpha(N)) = p_x \circ p_{K_{\gamma,\#\gamma}}(f_\alpha(N)) = 0$$

по доказанной части этого шага. □

4.5. Доказательство леммы о фундаментальном цикле. Итак, пусть у нас задано произвольное конечное открытое покрытие

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Напомним, что $\mathrm{A} = 2^I \setminus \{\varnothing\}$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathrm{A} \to I$ такое, что для произвольного $\alpha \in \mathrm{A}$ имеем $\varphi(\alpha) \in \alpha$. По лемме 4.4.1 существует набор отображений $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ такой, что:

1) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ и любого $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_\alpha)$ имеем $f_\alpha(N) \in C_m(N)$,

2) для любого $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} f_\alpha(X \cap U_\alpha)$$

является фундаментальным циклом в $C_m(X)$.

Для произвольного $N \in \widetilde{\Theta}_m(U_i)$ положим

$$f_i(N) := \sum_{\alpha:\varphi(\alpha)=i} f_\alpha(N \cap U_\alpha).$$

Тогда ясно, что, по определению, $f_i(N) \in C_m(N)$ и для любого $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$ выполняется равенство

$$\sum_{i \in I} f_i(X \cap U_i) = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(X \cap U_\alpha),$$

где правая часть является фундаментальным циклом по лемме 4.4.1. Лемма доказана.

§5. η-инвариант по модулю $\frac{1}{3}$ и гауссово отображение. (Доказательство теоремы 1.2)

5.1. Эквивалентная переформулировка определения η-инварианта. Через $G_m(d)$ будем обозначать ориентированное многообразие Грассмана m-мерных векторных плоскостей в $\mathbb{R}^d$. Если M лежит в $\Theta_m(\mathbb{R}^d)$, то отображение, сопоставляющее каждой точке многообразия M соответствующее ей касательное пространство, будем обозначать t_M. Такое отображение называется *гауссовым.* Пусть теперь $X \in \widetilde{\Theta}_m(\mathbb{R}^d)$. Через $\widetilde{t}_X$ обозначим отображение, сопоставляющее каждой точке многообразия X $(m+1)$-мерную плоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$, натянутую на касательное пространство $T_x(X)$ и $(d+1)$-й орт e_{d+1}. Легко видеть, что если $Y \in \widehat{\Theta}_{m+1}(\mathbb{R}^{d+1})$ – многообразие с краем X, то $t_Y\big|_X = \widetilde{t}_X$.

Каноническое m-мерное векторное расслоение $\gamma^m(d)$ над многообразием Грассмана $G_m(d)$ строится стандартным образом. Пространство

$$E = E(\gamma^n(d))$$

определяется как множество всех пар (m-мерная плоскость в $\mathbb{R}^d$, вектор в этой плоскости). Топология на множестве E индуцируется его вложением в $G_m(d) \times \mathbb{R}^d$. Проекция $E \to G_m(d)$ “забывает” вектор, оставляя только плоскость. Расслоение $t_Y^*(\gamma^m(d))$ над Y мы будем отождествлять с касательным расслоением Y.

Лемма 5.1.1. *На расслоении $\gamma_m(d)$ существует каноническая связность ∇ такая, что для произвольного $Y \in \Theta_m(d)$ связность $t_Y^*(\nabla)$ на касательном расслоении является связностью Леви-Чивиты многообразия Y.*

Доказательство. См. [4, VII, теорема 2.2]. □

Утверждение 5.1.1. *Существует дифференциальная форма*

$$\omega \in \Omega^4(G_4(d+1))$$

такая, что для любого многообразия $Y \in \widehat{\Theta}(\mathbb{R}^{d+1})$ $t_Y^*(\omega) = \omega_Y$.

Доказательство. Пусть ∇ – связность расслоения $\gamma_4(d+1)$ из леммы 5.1.1, а R – соответствующая ей форма кривизны. В качестве формы ω возьмем $(2\pi)^{-2}\operatorname{Tr}(R^2)$. По естественности [8, Приложение C, стр. 248] $t_Y^*(\omega) = \omega_Y$. □

Из этого утверждения следует, что η-инвариант можно определить формулой

$$\eta(X) = \sigma(Y) - \frac{1}{3}\int\limits_Y t_Y^*\omega.$$

При этом форма ω по [8, Приложение C] является представителем первого класса Понтрягина расслоения $\gamma_4(d+1)$ на многообразии Грассмана.

На многообразии Грассмана форму, представляющую класс Понтрягина, можно выбрать неединственным образом.

Утверждение 5.1.2. *Пусть* ω' *– еще одна дифференциальная форма на многообразии Грассмана, представляющая первый класс Понтрягина. Рассмотрим соответствующий ей инвариант*

$$\eta'(X) := \sigma(Y) - \frac{1}{3}\int\limits_Y t_Y^*\omega'.$$

Тогда $\eta - \eta'$ *является инвариантом степени не выше* 1.

Доказательство. Поскольку ω и ω' являются представителями одного и того же класса, существует 3-форма v с $\mathrm{d}v = \omega - \omega'$. Тогда

$$\begin{aligned}\rho(X) := \eta(X) - \eta'(X) &= -\frac{1}{3}\int\limits_Y t_Y^*(\omega - \omega') = -\frac{1}{3}\int\limits_Y t_Y^*(\mathrm{d}v) \\ &= -\frac{1}{3}\int\limits_Y \mathrm{d}t_Y^*(v) = -\frac{1}{3}\int\limits_X t_Y^*(v) = -\frac{1}{3}\int\limits_X \widetilde{t}_X^*(v).\end{aligned}$$

Пусть $\mathbb{R}^d = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ – произвольное конечное открытое покрытие, $\{g_i\}_{i\in I}$ – подчиненное ему разбиение единицы. Тогда легко видеть, что для величин

$$\rho_i(N) := -\frac{1}{3}\int\limits_N \widetilde{t}^*_N(v) g_i,$$

определенных при $N \in \Theta_3(U_i)$, для любого $X \in \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$ выполнено:

$$\sum_{i\in I}\rho_i(X\cap U_i) = -\frac{1}{3}\sum_{i\in I}\int\limits_{X\cap U_i}\widetilde{t}^*_{X\cap U_i}(v)g_i$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{i\in I}\int\limits_X \widetilde{t}^*_X(v)g_i = -\frac{1}{3}\int\limits_X \widetilde{t}^*_X(v) = \rho(X). \qquad \square$$

5.2. Формула для η-инварианта по модулю $\frac{1}{3}$. В этом разделе мы выведем полезную формулу для η-инварианта по модулю $\frac{1}{3}$.

Расшифруем, что значит, что дифференциальная форма

$$\omega \in \Omega^4(G_4(d+1))$$

является представителем класса Понтрягина $p_1 \in H^4(G_4(d+1);\mathbb{Z})$. Рассмотрим естественные вложения

$$\Omega^*(G_4(d+1)) \xrightarrow{i_1} C^*(G_4(d+1);\mathbb{R}) \xleftarrow{i_2} C^*(G_4(d+1);\mathbb{Z}).$$

То, что ω является представителем класса p_1, означает, что $i_{1*}([\omega]) = i_{2*}(p_1)$. Пусть q – представитель класса Понтрягина в $C^4(G_4(d+1);\mathbb{Z})$. Тогда $[i_1(\omega)] = [i_2(q)]$, что означает, что существует коцепь

$$r \in C^3(G_4(d+1))$$

с $\delta r = i_1(\omega) - i_2(q)$.

Лемма 5.2.1. *Для всякого фундаментального цикла $b \in C_3(X;\mathbb{Z})$*

$$\eta(X) \equiv -\frac{1}{3}\langle \widetilde{t}^*_X(r), b\rangle \pmod{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. Будем доказывать, что

$$-3\eta(X) \equiv \langle \widetilde{t}^*_X(r), b\rangle \pmod 1.$$

(Ясно, что эта формула эквивалентна доказываемой.)

Пусть $Y \in \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^d)$ – произвольное многообразие с краем X. Пусть $a \in C_4(Y;\mathbb{Z})$ – произвольный представитель фундаментального цикла из $C_4(Y, X; \mathbb{Z})$, а значит, ∂a – фундаментальный цикл в $C_3(X; \mathbb{Z})$. Тогда

$$-3\eta(X) \equiv \int_Y t_Y^*(\omega) = \langle t_Y^*(i_1(\omega)), a\rangle \equiv \langle t_Y^*(i_1(\omega) - i_2(q)), a\rangle$$
$$= \langle t_Y^*(\delta r), a\rangle = \langle \delta(t_Y^*(r)), a\rangle = \langle t_Y^*(r), \partial a\rangle = \langle \widetilde{t}_X^*(r), \partial a\rangle \pmod 1.$$

Поскольку b и ∂a представляют один и тот же гомологический класс на X, то существует цепь $a_1 \in C_4(X; \mathbb{Z})$ такая, что $\partial a_1 = \partial a - b$. Чтобы доказать утверждение, достаточно проверить, что

$$\langle \widetilde{t}_X^*(r), b\rangle \equiv \langle \widetilde{t}_X^*(r), \partial a\rangle \pmod 1,$$

а для этого достаточно проверить, что $\langle \widetilde{t}_X^*(r), \partial a_1\rangle \equiv 0 \pmod 1$. Проверим это:

$$\langle \widetilde{t}_X^*(r), \partial a_1\rangle = \langle \delta\widetilde{t}_X^*(r), a_1\rangle = \langle \widetilde{t}_X^*(i_1(\omega) - i_2(q)), a_1\rangle \equiv 0 \pmod 1,$$

поскольку, с одной стороны, $\langle i_2(q)), a_1\rangle$ – целое число, а с другой стороны, $\langle \widetilde{t}_X^*(i_1(\omega)), a_1\rangle = 0$, так как здесь форма ω интегрируется по вырожденным симплексам. $\square$

5.3. $\eta \bmod A$ – инвариант степени один при $\frac{1}{3} \in A$.

Теорема 5.3.1. *Функционал*

$$\eta \bmod A \colon \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$$

является инвариантом степени 1 *для любой аддитивной подгруппы $A \subsetneq \mathbb{R}$, содержащей $\frac{1}{3}$ (независимо от d). В частности, $\eta \bmod \frac{1}{3}$ является инвариантом степени* 1.

Доказательство. По утверждению 2.2 степень функционала $\eta \bmod A$ не равна 0. Поскольку $\eta \bmod A = \left(\eta \bmod \frac{1}{3}\right) \bmod A$, достаточно доказать, что $\eta \bmod \frac{1}{3}$ является инвариантом степени $\leqslant 1$. По лемме 5.2.1 вместе с леммой 4.1, примененной для случая $m = 3$, получаем, что для любого конечного открытого покрытия

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i \in I} U_i$$

и для любого $X \in \widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\eta(X) \equiv -\frac{1}{3}\langle \widetilde{t}_X^*(r), \sum_{i \in I} f_i(X \cap U_i)\rangle \left(\bmod \frac{1}{3}\right).$$

Полагая для каждого $N \in \widetilde{\Theta}_3(U_i)$

$$\eta_i(N) := -\frac{1}{3}\langle \widetilde{t}^*_N(r), f_i(N)\rangle \left(\operatorname{mod}\frac{1}{3}\right),$$

получаем $\eta(X) = \sum\limits_{i\in I} \eta_i(X \cap U_i)$, а значит, $\eta \bmod \frac{1}{3}$ действительно является инвариантом степени $\leqslant 1$. □

§6. η-ИНВАРИАНТ НА МНОГООБРАЗИЯХ, СНАБЖЕННЫХ МЕТРИКОЙ

В этом параграфе мы рассматриваем η-инвариант на компактных римановых многообразиях, вложенных в $\mathbb{R}^d$ произвольным гладким образом, не обязательно изометрично. Иными словами, мы рассматриваем его на многообразиях X из $\widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d)$, снабженных римановой метрикой μ, не обязательно совпадающей с индуцированной из $\mathbb{R}^d$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ – произвольное открытое множество. Множество пар (N, μ), где $N \in \widetilde{\Theta}_3(U)$, а μ – риманова метрика на N, мы будем обозначать через $\Phi(U)$.

Поскольку (X, μ) является компактным римановым многообразием, определено значение η-инварианта $\eta(X, \mu)$. Поясним, что значит, что подобный инвариант является инвариантом конечной степени.

Определение 6.1. *Пусть B – абелева группа и $\chi\colon \Phi(\mathbb{R}^d) \to B$ – функционал. χ называется* функционалом степени не выше k, *если для любого конечного открытого покрытия*

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i\in I} U_i$$

существует набор отображений $\{\chi_\alpha \mid \alpha \subset I, \#\alpha \leqslant k\}$,

$$\chi_\alpha\colon \Phi\left(\bigcup_{i\in\alpha} U_i\right) \to B,$$

такой, что для произвольного $(X, \mu) \in \Phi(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство

$$\sum_{\#\alpha\leqslant k} \chi_\alpha\left(X \cap \bigcup_{i\in\alpha} U_i, \mu|_{X\cap \bigcup\limits_{i\in\alpha} U_i}\right) = \chi(X, \mu).$$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ – открытое множество, $N \in \Theta_m(U)$. Через μ_N обозначим риманову метрику на N, индуцированную с $U \subset \mathbb{R}^d$.

Теорема 6.1. *Существует функционал* $\xi\colon \Phi(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *степени не выше единицы и такой, что для произвольного риманова многообразия* $(X, \mu) \in \Phi(\mathbb{R}^d)$ *выполняется равенство*

$$\eta(X, \mu) = \eta(X, \mu_X) + \xi(X, \mu).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h \in C^\infty([0, 1])$$

такую, что

1) $h(s) = 0$ при $s \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$,

2) $0 < h(s) < 1$ при $s \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$,

3) $h(s) = 1$ при $s \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Рассмотрим многообразие $X \times [0, 1] \in \Theta_4(\mathbb{R}^{d+1})$, а также две метрики μ' и μ'_X на нем, полученные прямым произведением метрик μ и μ_X, соответственно, на евклидову метрику отрезка $[0, 1]$. Также рассмотрим метрику $\widetilde{\mu}$, определенную следующим образом: на $T_{(x,s)} X \times [0, 1]$

$$\widetilde{\mu} := h(s)\mu'_X + (1 - h(s))\mu'.$$

Пусть $Y \in \widehat{\Theta}_4(\mathbb{R}^{d+1})$ – многообразие с $\partial Y = X$. Сдвинем Y на единицу по $(d{+}1)$-й координате и приклеим к многообразию $X \times [0, 1]$ по $X \times \{1\}$. Обозначим получившееся многообразие через Z. На нем задана метрика μ_0 с $\mu_0|_Y = \mu_Y$ и $\mu_0|_{X \times [0,1]} = \widetilde{\mu}$.

Поскольку (Z, μ_0) является четырёхмерным римановым многообразием, на нем задана 4-форма $\omega_{\mu_0} := (2\pi)^{-2} \operatorname{Tr}(R^2_{(Z,\mu_0)})$. Поскольку к тому же (Z, μ_0) изометрично $(X, \mu) \times \mathbb{R}^+$ вблизи края, получаем, что

$$\begin{aligned} \eta(X, \mu) &= \sigma(Z) - \frac{1}{3} \int\limits_Z \omega_{\mu_0} \\ &= \sigma(Y) - \frac{1}{3} \int\limits_Y \omega_Y - \frac{1}{3} \int\limits_{X \times [0,1]} \omega_{\widetilde{\mu}} = \eta(X, \mu_X) - \frac{1}{3} \int\limits_{X \times [0,1]} \omega_{\widetilde{\mu}}. \end{aligned}$$

Поскольку выражение

$$-\frac{1}{3} \int\limits_{X \times [0,1]} \omega_{\widetilde{\mu}}$$

полностью определяется подмногообразием X и метрикой μ, его можно обозначить через $\xi(X,\mu)$. Осталось доказать, что $\xi(X,\mu)$ является функционалом степени $\leqslant 1$.

Пусть

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i\in I} U_i$$

– произвольное конечное открытое покрытие, а $\{g_i\}_{i\in I}$ – подчиненное ему разбиение единицы. Тогда для произвольного $i \in I$ и $(N,\mu_i) \in \Phi(U_i)$ рассмотрим метрику $\widetilde{\mu}_i$ на $N\times[0,1]$, построенную по метрикам μ_i и μ_N аналогично метрике $\widetilde{\mu}$. Положим

$$\xi_i(N,\mu_i) := -\frac{1}{3}\int\limits_{N\times[0,1]} g_i\omega_{\widetilde{\mu}_i}.$$

Тогда для произвольного $X \in \Phi(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{i\in I}\xi_i(X\cap U_i, \mu|_{X\cap U_i}) = -\frac{1}{3}\sum_{i\in I}\int\limits_{(X\cap U_i)\times[0,1]} g_i\omega_{\widetilde{\mu}|_{(X\cap U_i)\times[0,1]}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_{X\times[0,1]}\sum_{i\in I} g_i\omega_{\widetilde{\mu}} = -\frac{1}{3}\int\limits_{X\times[0,1]}\omega_{\widetilde{\mu}} = \xi(X,\mu). \qquad \square$$

Следствие 1. *Для произвольной аддитивной подгруппы $A \subsetneq \mathbb{R}$ степени инварианта $\eta \bmod A$, рассматриваемого как отображение*

$$\widetilde{\Theta}_3(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$$

и как отображение $\Phi(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}/A$, совпадают.

Доказательство. Это следует из теоремы 6.1, поскольку прибавление к инварианту степени больше 0 инварианта степени 1 не меняет степени первого. □

Литература

1. M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*. I. — Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **77** (1975), 43–69.
2. М. Ф. Атья, И. М. Зингер, *Индекс эллиптических операторов*. III. — Усп. мат. наук **24**, No. 1 (1969), 127–182.
3. U. Bunke, *On the gluing problem for the η-invariant*. — J. Diff. Geom. **41** (1995), 397–448.
4. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*. Т. II. Наука, М., 1981.

5. M. Komuro, *On Atiyah–Patodi–Singer η-invariant for S^1-bundles over Riemann surfaces.* — J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A **30** (1984), 525–548.
6. Р. Мандельбаум, *Четырехмерная топология.* Мир, М., 1981.
7. W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology.* Graduate Texts Math. **127**, Springer, Berlin, 1991.
8. Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы.* Мир, М., 1979.
9. С. С. Подкорытов, *Квадратичное свойство рациональной полухарактеристики.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **267** (2000), 241–259.
10. В. А. Запольский, *Функциональная характеризация инвариантов Васильева.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 39–53.

Trefilov A. N. Atiyah–Patodi–Singer η-invariant and invariants of finite degree.

We consider the problem of computing the degree of invariants of the form $\eta \bmod A$, where η is the Atiyah–Patodi–Singer invariant considered on smooth compact oriented three-dimensional submanifolds of $\mathbb{R}^n$ and A is an additive subgroup of $\mathbb{R}$. We use the functional definition of invariants of finite degree. (A similar approach is used in the paper "Quadratic property of the rational semicharacteristic" by S. S. Podkorytov.) The main results are as follows. If $1 \notin A$, the degree is infinite. If $\frac{1}{3} \in A$, the degree equals one.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: aleksejtref@yandex.ru

Поступило 5 марта 2013 г.