Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

Л. Н. Ромакина

ЦИКЛЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

§1. Введение

Гиперболическую плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны $1/\rho^2$ рассматриваем в проективной интерпретации Кэли–Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ, называемой *абсолютом* плоскости $\widehat{H}$, область проективной плоскости P_2 (см. [1]).

В работе [2] проведена классификация овальных линий плоскости $\widehat{H}$. Доказано, что основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой определяют на $\widehat{H}$ 15 типов овальных линий, собственные овальные линии плоскости $\widehat{H}$ относятся к восьми типам. Собственные линии четырех типов (гиперциклы, орициклы, эллиптические и гиперболические циклы) являются траекториями точек в движениях плоскости $\widehat{H}$ и применяются, в частности, при построении разбиений этой плоскости [3–6]. В работе [2] эллиптический и гиперболический циклы определены позиционно, положением по отношению к абсолютной овальной линии плоскости $\widehat{H}$.

Гиперболический цикл – овальная линия, касающаяся абсолюта в двух точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные. Каждая точка абсолюта, за исключением точек касания с циклом, является внутренней относительно гиперболического цикла. На плоскости $\widehat{H}$ линия имеет две связные ветви, каждая из которых принадлежит полностью одной полуковалиане точки пересечения общих с абсолютом касательных цикла. Внутренность линии состоит из двух связных областей плоскости $\widehat{H}$ (рис. 1, *a*).

Эллиптический цикл – овальная линия, касающаяся абсолюта в двух точках и имеющая с ним две общие вещественные касательные.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны, гиперболический цикл, эллиптический цикл, эквидистанты плоскости $\widehat{H}$, оптические свойства циклов, аналог теоремы Пифагора, гиперболическая (эллиптическая) хорда, длина хорды гиперболического цикла.

Каждая точка абсолюта (эллиптического цикла), за исключением точек касания с циклом (абсолютом), является внешней относительно эллиптического цикла (абсолюта). На плоскости $\widehat{H}$ линия имеет две связные ветви, каждая из которых принадлежит полностью одной полувалиане точки пересечения общих с абсолютом касательных цикла. Внутренность линии – связное множество на $\widehat{H}$ (рис. 1, *б*).

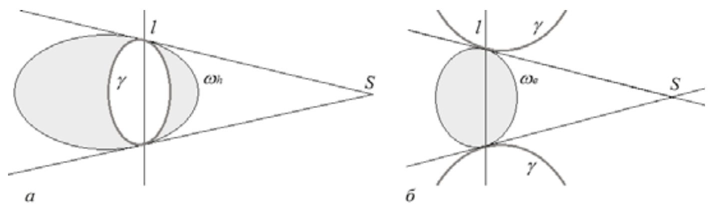


Рис. 1. Гиперболический (*a*), эллиптический (*б*) цикл плоскости $\widehat{H}$.

В данной работе дадим метрические определения эллиптического и гиперболического циклов и докажем свойства этих линий, необходимые в дальнейшем развитии геометрии плоскости $\widehat{H}$.

§2. Основные метрические формулы

2.1. Измерение отрезков. Положение относительно абсолюта определяет три типа прямых плоскости $\widehat{H}$. Прямые, пересекающие абсолют в двух действительных (мнимо сопряженных) точках, называют *гиперболическими* (*эллиптическими*), прямые, касающиеся абсолюта, – *параболическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$ [1]. Гиперболические прямые в силу наличия двух действительных общих точек с абсолютом являются направленными. Пара точек эллиптической прямой, являющейся замкнутой, определяет на этой прямой два смежных отрезка, пара точек гиперболической (параболической) прямой – отрезок и пару лучей [7, 8]. Отрезки непараболических прямых являются измеримыми на $\widehat{H}$.

Если точки A, B принадлежат гиперболической (эллиптической) прямой, то прямая AB содержит две действительные (мнимо сопряженные) точки абсолютной линии γ, обозначим их K_1, K_2. Сложное отношение (ABK_1K_2) четверки точек прямой является инвариантом *фундаментальной группы G преобразований*.

Пусть

$$\sigma = \frac{\rho}{2\tau} \ln(ABK_1K_2),$$

где ρ – радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$, $\tau^2 = 1$ $\left(\tau^2 = -1\right)$ для гиперболической (эллиптической) прямой AB, $\ln(ABK_1K_2)$ – главное значение логарифмической функции $w = Lnz$ комплексного переменного $z = (ABK_1K_2)$:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \tag{1}$$

Для собственных точек A, B плоскости $\widehat{H}$ $\sigma \in \mathbb{R}$. Если прямая AB является гиперболической, число $|\sigma|$ назовем *гиперболическим расстоянием* между точками A, B и *длиной* отрезка AB. Если прямая AB эллиптическая, число $|\sigma|$ назовем *эллиптическим расстоянием* между точками A, B, числа $|\sigma|$, $\pi\rho - |\sigma|$ назовем *длинами* отрезков, образованных точками A, B.

Если одна из точек A, B является несобственной для $\widehat{H}$, то прямая AB является гиперболической, и $(ABK_1K_2) < 0$. Пара точек A, B на содержащей их прямой образует два квазиотрезка [7,8]. Число σ в данном случае является комплексным с мнимой частью $\pi\rho/2$. Числа $\rho\left[i\pi \pm \ln |(ABK_1K_2)|\right]/2$ назовем *длинами* квазиотрезков между точками A, B. Длина всей гиперболической (эллиптической) прямой равна $i\pi\rho$ $(\pi\rho)$.

При выводе метрических формул используем канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ второго типа плоскости $\widehat{H}$, вершины A_1, A_2 и единичная точка E которого принадлежат абсолюту, а вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта. Семейство U^3 всех канонических реперов второго типа зависит от трех параметров. Уравнение абсолютной линии γ в реперах семейства U^3 имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0.$$

Если собственные для $\widehat{H}$ точки A, B гиперболической (эллиптической) прямой в репере R заданы координатами $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, то расстояние $|AB|$ между ними можно вычислить по формуле

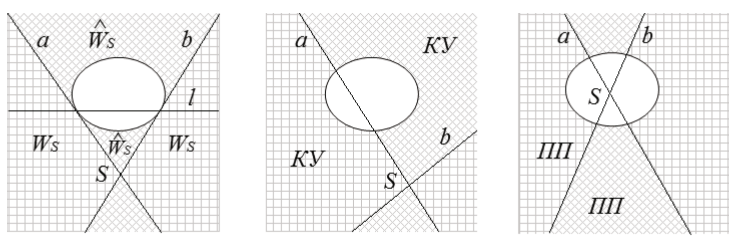
$$\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} = \frac{|a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3|}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}}$$

$$\left(\cos \frac{|AB|}{\rho} = \frac{|a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3|}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}}\right). \tag{2}$$

2.2. Измерение углов. Как и на плоскости Лобачевского, на $\widehat{H}$ существует три типа пучков прямых. Пучок прямых плоскости $\widehat{H}$ назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*), если его центр – внешняя (внутренняя) относительно абсолюта точка. *Параболическим* пучком назовем пучок с центром на абсолюте. Прямые, принадлежащие гиперболическому (эллиптическому) пучку, назовем *пересекающимися* (*расходящимися*) на $\widehat{H}$. Прямые параболического пучка назовем *параллельными*.

Пара прямых в зависимости от их типов и типа содержащего эти прямые пучка определяет на плоскости $\widehat{H}$ 15 типов объектов (15 типов углов между прямыми), некоторые из них будут использованы в данной работе. Определим их.

1. Пусть параболические прямые a, b пересекаются в точке S, и l – поляра точки S относительно абсолюта. Один из углов между прямыми a, b, рассматриваемых на проективной плоскости P_2, $\widehat{H} \subset P_2$, содержит абсолютную линию γ (рис. 2, a). Собственную для $\widehat{H}$ часть этого угла назовем *ковалианой точки* S и обозначим $\widehat{W_S}$. Дополнение ковалианы точки S до плоскости $\widehat{H}$ назовем *валианой точки* S и обозначим W_S (см. [9]).



а *б* *в*

Рис. 2. Валиана (W_S) и ковалиана ($\widehat{W_S}$) точки S (a), смежные квазиуглы (КУ) (*б*), смежные полуплоскости (ПП) (*в*).

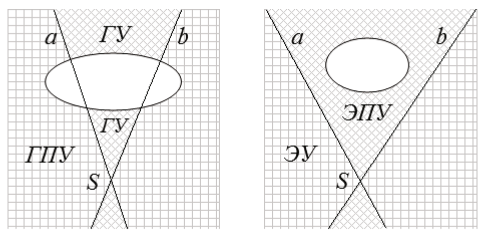
Ковалиана точки не является связной на $\widehat{H}$ и состоит из двух симметричных относительно данной точки связных компонент, каждую из которых назовем *полуковалианой* данной точки [9]. Валиана точки является связным множеством на $\widehat{H}$. Прямая l разделяет валиану W_S

на две симметричные относительно точки S и прямой l части, назовем их *полувалианами* точки S.

2. Гиперболическая a и эллиптическая b прямые (рис. 2, *б*) разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две связные части. Каждую из них назовем *квазиуглом* между прямыми a, b.

3. Две гиперболические расходящиеся прямые a и b (рис. 2, *в*) разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две связные части. Назовем эти части *полуплоскостями* плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a и b, *смежными* по отношению друг к другу.

4. Две гиперболические пересекающиеся прямые a и b разбивают плоскость $\widehat{H}$ на два *вертикальных гиперболических угла*, симметричных относительно точки S, и *смежный* с каждым из этих углов *гиперболический псевдоугол* (рис. 3, *а*).



а *б*

Рис. 3. Вертикальные гиперболические углы (ГУ) и гиперболический псевдоугол (*а*), смежные эллиптические угол (ЭУ) и псевдоугол (ЭПУ) (*б*).

5. Две эллиптические прямые a, b разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две связные части (рис. 3, *б*). Тот угол плоскости P_2 между прямыми a, b, который не содержит (полностью содержит) абсолютную линию, назовем *эллиптическим углом* (*эллиптическим псевдоуглом*) плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a и b.

Доказательства существования введенных объектов следуют по принципу двойственности проективной плоскости из доказательств существования лучей, отрезков и квазиотрезков на проективных, эллиптических, гиперболических и параболических прямых [7, 8].

Валиана и ковалиана точки неизмеримы на $\widehat{H}$, с помощью абсолюта введем измерения квазиуглов, полуплоскостей, гиперболических и эллиптических углов, инвариантные относительно группы G. Пусть для непараболических прямых a, b: $S = a \cap b$, и k_1, k_2 – касательные к абсолюту, проведенные через точку S.

Мера квазиугла. Пусть гиперболическая a и эллиптическая b прямые образуют смежные квазиуглы ν_1, ν_2. Пара прямых a, b в пучке с центром во внешней относительно абсолюта точке S разделяет пару действительных абсолютных касательных k_1, k_2. Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_-$. Тогда для функции $w = \ln z$ (1)

$$\ln(abk_1k_2) = \pi i + \ln|(abk_1k_2)|, \quad \ln(bak_1k_2) = \pi i - \ln|(abk_1k_2)|.$$

Числа $[\pi i \pm \ln|(abk_1k_2)|]/2$, где $\ln|(abk_1k_2)| \in \mathbb{R}$, назовем *мерами*, или *величинами*, квазиуглов ν_1, ν_2.

Мера полуплоскости. Пусть расходящиеся гиперболичекие прямые a, b образуют смежные полуплоскости ν_1, ν_2. Абсолютные касательные k_1, k_2, проходящие через внутреннюю относительно абсолюта точку S, мнимо сопряженные. Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{C}$, $|(abk_1k_2)| = 1$. Тогда для функции $w = \ln z$ (1)

$$\upsilon = \left|\frac{1}{2i}\ln(abk_1k_2)\right| \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Число υ $(\pi-\upsilon)$ назовем *мерой*, или *величиной*, полуплоскости ν_1 (ν_2). Всю плоскость $\widehat{H}$ можно рассматривать как *развернутую* полуплоскость величиной π.

Для непараболических прямых различного типа гиперболического пучка и прямых эллиптического пучка можно ввести понятие ортогональности как сопряженности относительно абсолюта.

Если прямые a, b гармонически разделяют пару прямых k_1, k_2, т.е. $(abk_1k_2) = -1$, то мера квазиугла (полуплоскости) между ними равна $\pi i/2$ $(\pi/2)$. Прямые a, b в этом случае назовем *ортогональными*. Обозначение: $a \perp b$. Квазиугол (полуплоскость) между ортогональными прямыми a и b назовем *прямым* (*прямой*).

Геометрически условие $a \perp b$ означает, что прямая a (b) проходит через полюс прямой b (a) относительно абсолюта.

Расстоянием от точки до прямой назовем расстояние между данной точкой и ее проекцией на данную прямую из полюса этой прямой относительно абсолюта.

Мера гиперболического угла (псевдоугла). Пусть пересекающиеся гиперболические прямые a, b образуют вертикальные гиперболические углы ν_1, ν_2 и смежный с каждым из этих углов гиперболический псевдоугол ψ. Пара прямых a, b в пучке с центром в собственной для $\widehat{H}$ точке S не разделяет пару абсолютных касательных k_1, k_2, т.е. $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_+$.

Число

$$\upsilon = \left|\frac{1}{2}\ln(abk_1k_2)\right|, \ \upsilon \in \mathbb{R}_+,$$

назовем *мерой*, или *величиной*, гиперболического угла ν_1 (ν_2). Число $\bar{\upsilon} = -\upsilon$ назовем *согласованной мерой*, или *согласованной величиной*, гиперболического угла ν_1 (ν_2).

Пусть a' – ортогональная к a эллиптическая прямая, проходящая через точку S. Два равных смежных квазиугла между прямыми a и a' величиной $\pi i/2$ образуют *развернутый* гиперболический псевдоугол величиной πi. Этот псевдоугол состоит из гиперболического угла ν_1 и гиперболического псевдоугла ψ. Следовательно, величина гиперболического псевдоугла ψ, смежного с гиперболическим углом согласованной величиной $\bar{\upsilon}$, равна $\pi i - \bar{\upsilon}$.

Мера эллиптического угла (псевдоугла). Пусть эллиптические прямые a, b образуют эллиптический угол ν и смежный с ним эллиптический псвдоугол ψ. В гиперболическом пучке с центром в точке S пара прямых a, b не разделяет пару абсолютных касательных k_1, k_2, т.е. $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_+$.

Число

$$\upsilon = \left|\frac{1}{2}\ln(abk_1k_2)\right|, \quad \upsilon \in \mathbb{R}_+,$$

назовем *мерой*, или *величиной*, эллиптического угла ν.

Пусть a' – ортогональная к a гиперболическая прямая, проходящая через точку S. Два равных смежных квазиугла между прямыми a и a' величиной $\pi i/2$ образуют *развернутый* эллиптический псевдоугол величиной πi, который состоит из эллиптического угла ν и эллиптического псевдоугла ψ. Следовательно, величина эллиптического псевдоугла, смежного с эллиптическим углом ν величиной υ, равна $\pi i - \upsilon$.

Итак, квазиуглы, полуплоскости, гиперболические и эллиптические углы измеримы на $\widehat{H}$, меры полуплоскостей, гиперболических и эллиптических углов – действительные числа.

В однородных координатах (X_i) прямых плоскости $\widehat{H}$ уравнение абсолюта, как совокупности всех касательных к линии γ, в репере R имеет вид

$$4X_1X_2 - X_3^2 = 0.$$

Квадратичная форма $4X_1X_2 - X_3^2$ определяет на $\widehat{H}$ метрику в непараболических пучках прямых. Если непараболические прямые a, b гиперболического (эллиптического) пучка имеют координаты $a(a_i)$, $b(b_i)$, $i = 1, 2, 3$, то меру $\widehat{ab}$ угла между ними в репере R можно вычислить по формуле

$$\operatorname{ch}\widehat{ab} = \pm\frac{2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}}$$
$$\left(\cos\widehat{ab} = \pm\frac{2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}}\right). \tag{3}$$

Координаты ортогональных прямых удовлетворяют условию

$$2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3 = 0. \tag{4}$$

Координаты (a_i) гиперболической (эллиптической) прямой a в репере R удовлетворяют неравенству

$$4a_1a_2 - a_3^2 < 0 \quad \left(4a_1a_2 - a_3^2 > 0\right). \tag{5}$$

Отметим, что согласно свойствам функции (1), сложного отношения четырех точек прямой и четырех прямых пучка введенные метрики на непараболических прямых и в непараболических пучках прямых плоскости $\widehat{H}$ аддитивны.

§3. Основные свойства гиперболического (эллиптического) цикла

Множество всех точек плоскости $\widehat{H}$, гиперболическое (эллиптическое) расстояние от которых до фиксированной собственной для $\widehat{H}$ точки S равно числу r, $r \in \mathbb{R}_+$ ($r \in (0; \pi\rho/2)$), назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*) циклом плоскости $\widehat{H}$. Точку S назовем *центром*, поляру l точки S относительно абсолюта – базой, а число r – *радиусом* цикла.

Обозначение: $\omega_h(S, r)$ ($\omega_e(S, r)$) – гиперболический (эллиптический) цикл плоскости $\widehat{H}$.

Согласно определениям циклов и определениям валианы и ковалианы точки гиперболический (эллиптический) цикл полностью принадлежит ковалиане (валиане) своего центра.

Из семейства U^3 выделим однопараметрическое подсемейство U^1 всех реперов, третья координатная вершина которых находится в точке S. Вершины A_1, A_2 этих реперов закреплены в общих точках цикла с абсолютом, единичная точка E не фиксирована. Назовем такие реперы *присоединенными* к циклу $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$.

По формулам (2) находим уравнение гиперболического (эллиптического) цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ в каждом присоединенном репере $R = \{A_1, A_2, S, E\}$:

$$x_1x_2 - \operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}x_3^2 = 0 \qquad \left(x_1x_2 + \operatorname{tg}^2\frac{r}{\rho}x_3^2 = 0\right). \tag{6}$$

Исследуем гиперболический (эллиптический) цикл по уравнению (6).

При допустимых значениях r гиперболический (эллиптический) цикл – овальная линия, имеющая с абсолютом две общие действительные точки (в присоединенном репере – вершины A_1, A_2) и в этих точках две общие действительные касательные (SA_1, SA_2), проходящие через центр цикла. В репере R база цикла совпадает с прямой A_1A_2 и задана уравнением $x_3 = 0$.

Отражение от оси A_1A_2, и, следовательно, от полюса S прямой A_1A_2 относительно абсолюта, в репере R задано формулами

$$\lambda x_1' = x_1, \quad \lambda x_2' = x_2, \quad \lambda x_3' = -x_3,$$

и входит в группу симметрий цикла (6).

Каждая прямая m, проходящая через точку S, ортогональна прямой l, следовательно, l симметрична относительно m. Точки A_1, A_2 и соответственно прямые SA_1, SA_2 при симметрии относительно m переходят друг в друга, а, следовательно, цикл $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ переходит в овальную линию, имеющую с абсолютом две общие точки A_1, A_2 и две общие касательные SA_1, SA_2 в этих точках, и принадлежащую ковалиане (валиане) точки S. Линии, удовлетворяющие этим требованиям, образуют однопараметрическое семейство и могут быть заданы в репере R уравнением

$$x_1x_2 - qx_3^2 = 0, \quad 0 < q < 1 \quad (q < 0). \tag{7}$$

Сравнивая уравнения (6), (7) и учитывая, что число r – инвариант цикла во всех преобразованиях фундаментальной группы G, получаем, что цикл $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ симметричен относительно m.

Каждую гиперболическую (эллиптическую) прямую пучка с центром S назовем *действительной осью*, а каждую эллиптическую (гиперболическую) прямую этого пучка – *мнимой осью* цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$.

В силу предыдущих рассуждений справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Гиперболический (эллиптический) цикл плоскости* $\widehat{H}$ *симметричен относительно своего центра, относительно своей базы и относительно каждой своей оси.*

Теорема 2. *На плоскости* $\widehat{H}$ *радиуса кривизны* ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, *гиперболический (эллиптический) цикл радиуса* r *является множеством всех точек плоскости* $\widehat{H}$, *удаленных от своей базы на расстояние* $h = i\pi\rho/2 - r$ $(h = \pi\rho/2 - r)$.

Доказательство. I. Пусть M – некоторая точка гиперболического (эллиптического) цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$, и l – поляра точки S относительно абсолюта (рис. 4, *а* (*б*)). Гиперболическая (эллиптическая) прямая SM ортогональна прямой l. Ковалиана (валиана) точки S не содержит собственных (несобственных) для $\widehat{H}$ точек прямой l. Следовательно, прямая SM пересекает прямую l в несобственной (собственной) для $\widehat{H}$ точке H. По определению поляры точка H прямой l гармонически разделяет с точкой S пару действительных (мнимо сопряженных) точек пересечения прямой SH с абсолютом. Поэтому $|SH| = i\pi\rho/2$ $(|SH| = \pi\rho/2)$. Тогда $|MH| = i\pi\rho/2 - r$ $(|MH| = \pi\rho/2 - r)$, т.е. каждая точка M гиперболического (эллиптического) цикла удалена от прямой l на расстояние $h = i\pi\rho/2 - r$ $(h = \pi\rho/2 - r)$.

II. Пусть собственная для $\widehat{H}$ точка M удалена от прямой l на расстояние $h = i\pi\rho/2 - r$ $(h = \pi\rho/2 - r)$. Тогда прямая SM, ортогональная прямой l, пересекает l в несобственной (собственной) для $\widehat{H}$ точке H, т.е. является гиперболической (эллиптической) прямой. По определению поляры точки $|SH| = i\pi\rho/2$ $(|SH| = \pi\rho/2)$. Поэтому $|SM| = r$, т.е. точка M удалена от S на гиперболическое (эллиптическое) расстояние r, следовательно, принадлежит гиперболическому (эллиптическому) циклу $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$. Что и требовалось доказать. □

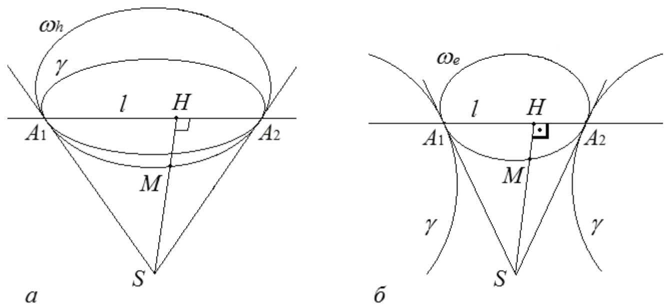


Рис. 4. Гиперболический (a), эллиптический ($б$) цикл как эквидистанта плоскости $\widehat{H}$.

На основании теоремы 2 гиперболический (эллиптический) цикл плоскости $\widehat{H}$ будем также называть *эквидистантой* с гиперболической *базой* l *высоты* h.

В следующих двух теоремах докажем оптические свойства циклов плоскости $\widehat{H}$.

Теорема 3. *В каждой собственной для $\widehat{H}$ точке гиперболического (эллиптического) цикла существует эллиптическая (гиперболическая) касательная к циклу, ортогональная оси цикла, проведенной через точку касания.*

Доказательство. Пусть гиперболический (эллиптический) цикл $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ в присоединенном репере R задан уравнением (7), где

$$q = \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} \qquad \left(q = -\operatorname{tg}^2 \frac{r}{\rho}\right). \tag{8}$$

Как линия второго порядка в каждой своей точке $M(m_1 : m_2 : m_3)$ цикл $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ имеет касательную $\overline{m}$, заданную в репере R уравнением

$$m_2x_1 + m_1x_2 - 2qm_3x_3 = 0, \quad 0 < q < 1 \quad (q < 0). \tag{9}$$

Координаты точки M удовлетворяют уравнению (7), поэтому при $M \neq A_1$, $M \neq A_2$ и $0 < q < 1$ $(q < 0)$ для координат прямой $\overline{m}$ (9) выполняется второе (первое) неравенство из (5). Следовательно, для гиперболического (эллиптического) цикла прямая $\overline{m}$ является эллиптической (гиперболической).

Ось $m = SM$ цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ в репере R задана уравнением

$$m_2x_1 - m_1x_2 = 0. \qquad (10)$$

Координаты прямых $\overline{m}$ (9) и m (10) удовлетворяют условию (4), следовательно, $m \perp \overline{m}$. Что и требовалось доказать. □

Согласно теореме 3 циклы плоскости $\widehat{H}$ обладают оптическим свойством, аналогичным свойству окружности евклидовой плоскости: *каждая прямая, проходящая через центр цикла плоскости $\widehat{H}$, отражается от цикла в себя.*

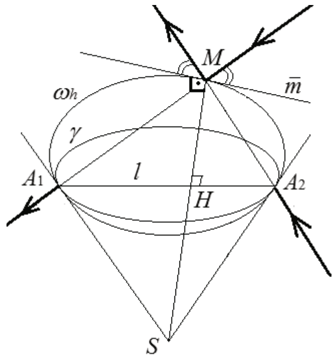
Теорема 4. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, гиперболические прямые, проходящие через собственную точку M гиперболического (эллиптического) цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ параллельно базе цикла в различных ее направлениях, образуют с касательной к циклу в точке M равные квазиуглы (гиперболические углы) постоянной для данного цикла величины φ:*

$$\operatorname{ch}^2\varphi = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho}} \quad \left(\operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sin\frac{r}{\rho}}\right). \qquad (11)$$

Доказательство. В присоединенном репере R цикл $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ зададим уравнением (7) при условии (8), а точке M присвоим координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$. Гиперболические прямые MA_1, MA_2 (рис. 5, *а* (*б*)), параллельные базе l цикла в различных ее направлениях, симметричны относительно оси SM цикла. По теореме 3 эллиптическая (гиперболическая) прямая $\overline{m}$, касательная к циклу в его точке M, ортогональна SM, следовательно, симметрична относительно SM. Поэтому прямые MA_1, MA_2 образуют с прямой $\overline{m}$ симметричные относительно оси SM квазиуглы (гиперболические углы).

В репере R прямая MA_1 имеет координаты $(0 : m_3 : -m_2)$, а касательная $\overline{m}$ задана уравнением (9). Координаты точки M удовлетворяют уравнению (7): $m_1m_2 - qm_3^2 = 0$. Поэтому по формуле (3) для гиперболического (эллиптического) цикла величина φ квазиугла (гиперболического угла) между прямыми MA_1 и $\overline{m}$ определена равенством (11). Что и требовалось доказать. □

Согласно теореме 4 несобственные точки циклов плоскости $\widehat{H}$ обладают оптическим свойством, аналогичным свойству фокусов эллипсов и гипербол евклидовой плоскости: *пучок собственных для плоскости $\widehat{H}$ ветвей гиперболических прямых, исходящих из точки A_1,*



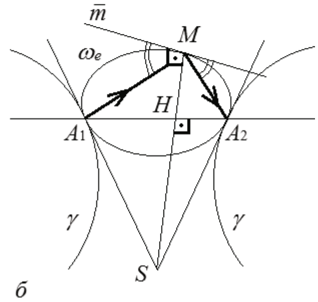


Рис. 5. Оптическое свойство гиперболического (a), эллиптического ($б$) цикла.

отражаясь от гиперболического (эллиптического) цикла внешним (внутренним) образом, собирается в точке A_2.

Теорема 5. *На плоскости* $\widehat{H}$ *радиуса кривизны* ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, *касательные гиперболического (эллиптического) цикла* $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ *в его диаметрально противоположных точках образуют эллиптический угол (полуплоскость) постоянной величины* $\varphi = 2r/\rho$.

Доказательство. Пусть A, B – диаметрально противоположные точки цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$, заданного в присоединенном репере R уравнением (7) при условии (8). Единичную точку E репера поместим на прямую AB. Тогда в репере R точки A, B цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ можно задать координатами

$$A\left(\sqrt{q} : \sqrt{q} : 1\right), \quad B\left(\sqrt{q} : \sqrt{q} : -1\right)$$

$$\left(A\left(\sqrt{-q} : -\sqrt{-q} : 1\right), \quad B\left(-\sqrt{-q} : \sqrt{-q} : 1\right)\right).$$

По теореме 3 касательные k_A, k_B в точках A, B цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ являются эллиптическими (гиперболическими) прямыми. В репере R прямые k_A, k_B заданы координатами

$$k_A\left(1 : 1 : -2\sqrt{q}\right), \quad k_B\left(1 : 1 : 2\sqrt{q}\right)$$

$$\left(k_A\left(-1 : 1 : 2\sqrt{-q}\right), \quad k_B\left(1 : -1 : 2\sqrt{-q}\right)\right).$$

Величину угла между прямыми k_A, k_B обозначим φ. Если прямые k_A, k_B эллиптические, они образуют эллиптический угол, в этом случае $\varphi \in \mathbb{R}_+$. Гиперболические прямые k_A, k_B образуют две полуплоскости, так как точка $L = k_A \cap k_B$ имеет в репере R координаты $(1:1:0)$ и является несобственной для $\widehat{H}$. В этом случае $\varphi \in (0;\pi)$.

По формуле (3) при условии (8) для цикла $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{1+q}{1-q} = \frac{1+\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}}{1-\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}} = \operatorname{ch}\frac{2r}{\rho}$$

$$\left(\cos\varphi = \pm\frac{1+q}{1-q} = \pm\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{r}{\rho}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{r}{\rho}} = \pm\cos\frac{2r}{\rho}\right).$$

Следовательно, $\varphi = 2r/\rho$ ($\varphi = 2r/\rho$ или $\varphi = \pi - 2r/\rho$, т.е. одна из полуплоскостей между прямыми k_A, k_B имеет величину $\varphi = 2r/\rho$). Что и требовалось доказать. □

Отрезок касательной к гиперболическому (эллиптическому) циклу в его собственной точке M, заключенный в ковалиане (валиане) центра цикла, назовем *опорным* отрезком цикла в точке M.

Теорема 6. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, каждая собственная точка гиперболического (эллиптического) цикла является серединой опорного отрезка цикла в этой точке. Длина σ опорного отрезка цикла в каждой его точке является инвариантом цикла и может быть выражена через радиус r цикла по формуле*

$$\cos\frac{\sigma}{\rho} = 1 - 2\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho} \quad \left(\operatorname{ch}\frac{\sigma}{\rho} = 1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{r}{\rho}\right). \tag{12}$$

Доказательство. В присоединенном репере R касательная $\overline{m}$ к циклу $\omega_h(S,r)$ $(\omega_e(S,r))$ (7) в его собственной точке $M(m_1 : m_2 : m_3)$ задана уравнением (9). Точки A, B пересечения прямой $\overline{m}$ с параболическими прямыми SA_1, SA_2, ограничивающими ковалиану и валиану точки S, имеют координаты

$$A(2qm_3 : 0 : m_2), \quad B(0 : 2qm_3 : m_1).$$

Далее доказательство теоремы для гиперболического и эллиптического циклов проведем отдельно.

I. По теореме 3 касательная $\overline{m}$ гиперболического цикла $\omega_h(S,r)$ является эллиптической прямой, следовательно, пересекает лучи SA_1, SA_2, ограничивающие одну полуковалиану точки S. Поляра a точки A

относительно абсолюта имеет в репере R координаты $(0 : qm_3 : -m_2)$ и пересекает прямую AB в точке

$$A_0\left(2q^2m_3^2 - m_1m_2 : m_2^2 : qm_2m_3\right).$$

Для четверки точек M, B, A, A_0 имеем

$$(MBAA_0) = \frac{1-2q}{2(1-q)}. \qquad (13)$$

Каждая точка гиперболического цикла принадлежит ковалиане центра цикла, и в уравнении (7) $0 < q < 1$, поэтому на основании равенства (13) принципиально различны три случая:

1) $q = 1/2$, тогда точки B и A_0 совпадают (рис. 6, *а*), следовательно, длина опорного отрезка AB цикла $\omega_h(S, r)$ в его собственной точке M равна половине длины эллиптической прямой, $\pi\rho/2$;

2) $q > 1/2$, тогда пара точек M, B разделяет пару точек A, A_0 (рис. 6, *б*), следовательно, точки M, B принадлежат различным отрезкам, образованным точками A, A_0, т.е. длина опорного отрезка AB цикла $\omega_h(S, r)$ в точке M больше $\pi\rho/2$;

3) $q < 1/2$, тогда пара точек M, B не разделяет на прямой a пару точек A, A_0 (рис. 6, *в*), следовательно, точки M, B принадлежат одному из отрезков, образованных точками A, A_0, это означает, что длина опорного отрезка AB цикла $\omega_h(S, r)$ в точке M меньше $\pi\rho/2$.

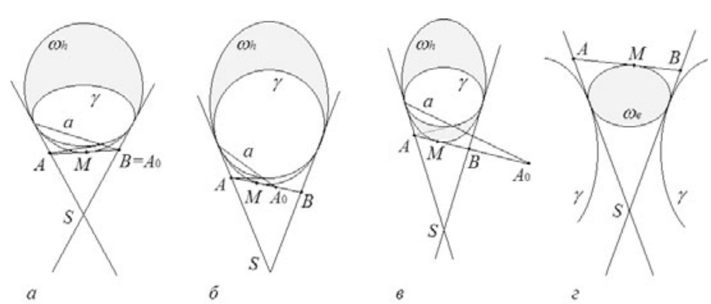


Рис. 6. Опорный отрезок прямого (*а*), широкого (*б*), узкого (*в*) гиперболического цикла, эллиптического цикла (*г*).

По формуле (2) длины двух отрезков между точками A, B определены равенством

$$\cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm(1-2q).$$

Учитывая первое равенство из (8) и предыдущие рассуждения о длине опорного отрезка, получаем первую формулу из (12).

II. Касательная $\overline{m}$ эллиптического цикла $\omega_e(S,r)$ по теореме 3 является гиперболической прямой, следовательно, пара точек A, B определяет на ней единственный отрезок AB, принадлежащий валиане точки S (рис. 6, *г*). По определению, AB – опорный отрезок цикла $\omega_e(S,r)$ в его собственной точке M. По формуле (2), учитывая второе условие из (8), получаем вторую формулу из (12). Теорема доказана. □

Согласно рассуждениям части **I** доказательства теоремы 6 все гиперболические циклы плоскости $\widehat{H}$ можно отнести к трем семействам. Циклы, длины опорных отрезков которых равны половине длины эллиптической прямой, назовем *прямыми*. В каноническом уравнении (7) прямых гиперболических циклов $q = 1/2$, следовательно, по первому условию из (8) радиус r каждого прямого гиперболического цикла определен равенством

$$r = \frac{\rho}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Циклы, длины опорных отрезков которых меньше (больше) половины длины эллиптической прямой, назовем *узкими* (*широкими*). В каноническом уравнении (7) узких (широких) гиперболических циклов $q < 1/2$ ($q > 1/2$), следовательно, радиус r каждого узкого (широкого) гиперболического цикла определен условием

$$r < \frac{\rho}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \quad \left(r > \frac{\rho}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right).$$

Пусть AB – некоторый отрезок постоянной длины эллиптической (гиперболической) прямой, концы которого перемещаются по различным параболическим прямым SA_1, SA_2, полностью принадлежащий некоторой полуковалиане (полувалиане) точки S. Точку пересечения параболических прямых, проходящих через точки A, B и не содержащих точку S, обозначим P. По построению $ASBP$ – простой 4-контур [10] с эллиптической (гиперболической) диагональю AB. Диагонали простого 4-контура принадлежат прямым различных типов, взаимно ортогональны, и точка пересечения диагоналей является серединой каждой из них [10, теорема 2, утверждение 2]. Относительно группы G простой 4-контур имеет единственный независимый инвариант [10, замечание 3], через который могут быть выражены, в частности, длины его диагоналей. Поэтому при постоянной длине эллиптической (гиперболической) диагонали AB длина гиперболической (эллиптической) диагонали SP постоянна, т.е. постоянна и длина отрезка SO, $O = AB \cap SP$, гиперболической (эллиптической) прямой. Это означает, что точка O принадлежит гиперболическому (эллиптическому) циклу с центром в точке S. Поэтому на основании теоремы 6 справедлива

Теорема 7. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, середина отрезка постоянной длины σ эллиптической (гиперболической) прямой, концы которого перемещаются по лучам, ограничивающим содержащую полностью данный отрезок полуковалиану (полувалиану) точки S, описывает принадлежащую данной полуковалиане (полувалиане) ветвь гиперболического (эллиптического) цикла с центром S радиуса r:*

$$\operatorname{th}\frac{r}{\rho} = \sin\frac{\sigma}{2\rho} \quad \left(\operatorname{tg}\frac{r}{\rho} = \operatorname{sh}\frac{\sigma}{2\rho}\right). \tag{14}$$

Теорема 3 и рассуждения доказательства теоремы 6 приводят к одному из аналогов теоремы Пифагора. Заметим, что в принятых при доказательстве теоремы 6 обозначениях трехвершинник AMS является *прямоугольным*, согласно теореме 3 отрезки SM, AM принадлежат ортогональным прямым различных типов. Условимся, что отрезок SM (AM) принадлежит гиперболической (эллиптической) прямой. Отрезок SM (AM) будем называть *гиперболическим* (*эллиптическим*) *катетом* трехвершинника AMS. Отрезок AS, противолежащий прямому углу AMS, назовем *гипотенузой* трехвершинника AMS. В рассматриваемом случае гипотенуза принадлежит параболической прямой. В силу равенства (14) при $r = |SO|$, $\sigma = 2|AM|$ получаем

$$\operatorname{ch}\frac{|SO|}{\rho}\cos\frac{|AM|}{\rho} = 1.$$

Теорема 8 (Аналог теоремы Пифагора)**.** *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, длины a, b гиперболического и эллиптического* *катетов прямоугольного трехвершинника с параболической гипотенузой связаны условием*

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\rho}\cos\frac{b}{\rho}=1.$$

§4. Длина хорды гиперболического цикла

Выразим в каждом возможном случае длину хорды гиперболического цикла через радиус цикла, величину центрального угла, соответствующего хорде, и радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$.

Пусть A, B – собственные точки гиперболического цикла $\omega_h(S,r)$. Если пара точек A, B не разделяет на ω_h [9] пару несобственных точек A_1, A_2 цикла ω_h, т.е. точки A, B лежат на одной ветви цикла ω_h (рис. 7, *а*, *б*), то прямая AB может принадлежать каждому из трех типов прямых плоскости $\widehat{H}$. Если пары точек A, C и A_1, A_2 разделяют на ω_h друг друга, т.е. точки A, C принадлежат различным ветвям цикла ω_h (рис. 7, *б*), то прямая AC дважды пересекает абсолютную линию γ плоскости $\widehat{H}$, следовательно является гиперболической прямой.

На эллиптической прямой точки A, B определяют два смежных отрезка, один из которых является внутренним, другой – внешним относительно цикла ω_h (рис. 7, *а*). Назовем эти отрезки соответствено *внутренней* и *внешней эллиптической хордой* цикла ω_h.

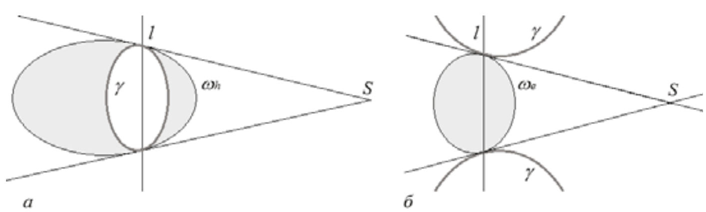


Рис. 7. Хорды гиперболического цикла.

На гиперболической прямой точки A, B (A, C) определяют один отрезок, внешний относительно цикла ω_h (рис. 7, *б*), назовем его *гиперболической хордой* цикла ω_h.

Если точки A, B принадлежат одной ветви цикла $\omega_h(S,r)$, гиперболический угол ASB назовем *центральным углом* цикла ω_h, соответствующим каждой из хорд, определенных точками A, B. Если точки

A, C принадлежат различным ветвям цикла $\omega_h(S,r)$, *центральным углом* цикла ω_h, соответствующим хорде AC, назовем каждый из гиперболических углов, образованных прямыми AS и CS (рис. 7, *а*, *б*).

Теорема 9. *На гиперболической плоскости* $\widehat{H}$ *радиуса кривизны* ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Длина a гиперболической хорды с концами на одной ветви гиперболического цикла* $\omega_h(S,r)$ *и соответствующим центральным углом величиной* α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *определена равенством*

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\rho} = 2\operatorname{sh}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho} - 1. \tag{15}$$

2. *Длина a* ($\overline{a}$) *внутренней (внешней) относительно гиперболического цикла* $\omega_h(S,r)$ *эллиптической хорды с соответствующим центральным углом величиной* α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *определена равенством*

$$\cos\frac{a}{\rho} = 1 - 2\operatorname{sh}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho} \quad \left(\cos\frac{\overline{a}}{\rho} = 2\operatorname{sh}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho} - 1\right). \tag{16}$$

3. *Длина a гиперболической хорды с концами на различных ветвях гиперболического цикла* $\omega_h(S,r)$ *и соответствующим центральным углом величиной* α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *определена равенством*

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\rho} = 1 + 2\operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho}. \tag{17}$$

Доказательство. Используем канонические реперы R второго типа, уравнение абсолютной линии γ в которых имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \tag{18}$$

В присоединенных канонических реперах $R = \{A_1, A_2, S, E\}$, образующих однопараметрическое семейство U^1, гиперболический цикл $\omega_h(S,r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, зададим уравнением

$$x_1x_2 - \operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}x_3^2 = 0. \tag{19}$$

Пусть AB – некоторая хорда гиперболического цикла $\omega_h(S,r)$, и $\widehat{W}_S^A$ – полуковалиана точки S, содержащая точку A. Из семейства U^1 присоединенных к циклу ω_h реперов выделим те реперы, единичная точка E которых является пересечением с абсолютом луча SA, принадлежащего полуковалиане $\widehat{W}_S^A$ (рис. 7, *а*). Данным условием определены точно два репера, отличающиеся порядком следования первых двух вершин. Далее построения проведем в одном из этих реперов.

Гиперболическая прямая SA пересекает абсолютную линию γ (18) в точках $E(1:1:1)$, $E'(1:1:-1)$ и задана уравнением

$$x_1 - x_2 = 0. \qquad (20)$$

Координаты точки A пересечения цикла ω_h (19) и прямой SA (20) можно записать в виде

$$A\left(\epsilon \operatorname{th}\frac{r}{\rho} : \epsilon \operatorname{th}\frac{r}{\rho} : 1\right), \quad \epsilon = \pm 1. \qquad (21)$$

По построению пара точек A, E на оси SA не разделяет пару точек S, E', т.е. $(AESE') > 0$. В координатах данное неравенство имеет вид

$$(AESE') = \frac{\begin{vmatrix} \epsilon \operatorname{th}\frac{r}{\rho} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \epsilon \operatorname{th}\frac{r}{\rho} & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2\epsilon \operatorname{th}\frac{r}{\rho}}{\epsilon \operatorname{th}\frac{r}{\rho} + 1} > 0.$$

При $\rho, r \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие $\operatorname{th}\frac{r}{\rho} \in (0;1)$. Следовательно, $\epsilon = 1$, и координаты (21) точки A имеют вид

$$A\left(\operatorname{th}\frac{r}{\rho} : \operatorname{th}\frac{r}{\rho} : 1\right). \qquad (22)$$

Точку B цикла (19) зададим координатами

$$B\left(b^2 \operatorname{th}\frac{r}{\rho} : \operatorname{th}\frac{r}{\rho} : b\right), \quad b \in \mathbb{R}. \qquad (23)$$

Тогда ось SB имеет уравнение

$$x_1 - b^2 x_2 = 0. \qquad (24)$$

По формуле (3) величина α гиперболического угла ASB между прямыми SA (20), SB (24) определена равенством

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{b^2+1}{2|b|}. \qquad (25)$$

Прямая AB задана уравнением

$$x_1 + b x_2 - x_3(1+b)\operatorname{th}\frac{r}{\rho} = 0. \qquad (26)$$

Если точки A, B принадлежат одной ветви (различным ветвям) цикла ω_h, то прямые AB и A_1A_2 пересекаются во внешней (внутренней) относительно γ точке V. Точка V имеет координаты $(-b : 1 : 0)$ и является внешней (внутренней) относительно абсолюта тогда и только тогда, когда $b > 0$ ($b < 0$). Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. Пусть $b > 0$. Прямая AB (26) в этом случае может принадлежать каждому типу прямых плоскости $\widehat{H}$. Она является параболической, гиперболической или эллиптической прямой (см. (5)) при соответствующем условии:

$$1)\ \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} = \frac{4b}{(b+1)^2},$$

$$2)\ \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} > \frac{4b}{(b+1)^2},$$

$$3)\ \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} < \frac{4b}{(b+1)^2}.$$

1.1. Отрезки параболических прямых неизмеримы на $\widehat{H}$, поэтому при условии 1) длина хорды AB не определена.

1.2. Пусть AB – гиперболическая прямая. По формуле (2) для числа a, $a \in \mathbb{R}_+$, длины отрезка AB гиперболической прямой, справедливо равенство

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\rho} = \left| \frac{\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho}(b^2+1) - 2b}{2b\left(\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} - 1\right)} \right|. \tag{27}$$

Равенство (25) при $b > 0$ дает $b^2 + 1 = 2b \operatorname{ch} \alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\rho} = \left| \frac{\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} \operatorname{ch} \alpha - 1}{\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} - 1} \right|.$$

Неравенство 2) при $b > 0$ можно записать в виде

$$\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} > \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \alpha},$$

или

$$\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} \operatorname{ch} \alpha - 1 > 1 - \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho}.$$

Откуда при $r \in \mathbb{R}_+$, $\rho \in \mathbb{R}_+$

$$\operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} \operatorname{ch} \alpha - 1 > 0.$$

Таким образом,

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\rho}=\frac{\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}\operatorname{ch}\alpha-1}{1-\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}}=2\operatorname{sh}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho}-1.$$

Формула (15) справедлива. Первое утверждение теоремы доказано.

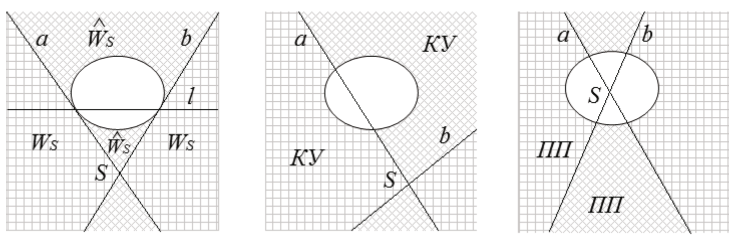
1.3. Если прямая AB является эллиптической, т.е. выполняется неравенство 3), длина a внутренней относительно цикла ω_h хорды AB согласно формуле (2) удовлетворяет одному из равенств

$$\cos\frac{a}{\rho}=\pm\frac{1-\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}\operatorname{ch}\alpha}{1-\operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}}. \tag{28}$$

Пусть величина α_0 определена условием

$$\operatorname{ch}\alpha_0=\operatorname{cth}^2\frac{r}{\rho}. \tag{29}$$

Построим действительную ось SC цикла ω_h так, чтобы центральный гиперболический угол ASC был равен α_0, $C\in\omega_h$, и пара прямых SC, SB не разделяла пару SA, SA_2 (рис. 8). Тогда согласно равенствам (28), (29) $\cos\frac{|AC|}{\rho}=0$, следовательно, $|AC|=\pi\rho/2$, и точка C принадлежит поляре d точки A относительно абсолюта.



а *б* *в*

Рис. 8. Эллиптическая хорда AB гиперболического цикла ω_h.

Точку пересечения параболической прямой, проходящей через A, с дугой AA_2 цикла ω_h, содержащей точки B, C, обозначим P. Точка C разделяет дугу AP цикла ω_h на дуги AC и CP. Пусть X (Y) – точка дуги AC (CP), не совпадающая с концом этой дуги, и $X_0=d\cap AX$ $(Y_0=d\cap AY)$. Вторую точку пересечения прямой d с циклом ω_h обозначим D. Принадлежность точки X (Y) дуге AC (CP) означает, что пара точек A, X (A, Y) не разделяет (разделяет) на ω_h пару точек C, D. Следовательно, точка X_0 (Y_0) является внешней (внутренней) относительно цикла ω_h. Поэтому точка X_0 (Y_0) не принадлежит (принадлежит) внутренней относительно ω_h хорде AX (AY). Как точки поляры d точки A относительно абсолюта X_0 и Y_0 удалены от A на расстояние $\pi\rho/2$. Таким образом, длина хорды AX (AY) меньше (больше) $\pi\rho/2$.

Итак, для точки B принципиально различны три варианта положения на дуге AP: B принадлежит дуге AC, B совпадает с C, B принадлежит дуге CP. Докажем первую формулу из (16) для каждого варианта положения точки B.

1.3.1. В первом случае, когда точка B принадлежит дуге AC, центральный гиперболический угол ASB величиной α, соответствующий хорде AB, принадлежит гиперболическому углу ASC величиной α_0, а длина a внутренней относительного цикла ω_h хорды AB меньше $\pi\rho/2$. Поэтому $\alpha < \alpha_0$ и

$$\cos\frac{a}{\rho} > 0. \tag{30}$$

При условии (29) получаем

$$\operatorname{ch}\alpha < \operatorname{ch}\alpha_0 = \operatorname{cth}^2\frac{r}{\rho}.$$

Таким образом, $1 - \operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}\operatorname{ch}\alpha > 0$, и на основании условий (28), (30)

$$\cos\frac{a}{\rho} = \frac{1 - \operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}\operatorname{ch}\alpha}{1 - \operatorname{th}^2\frac{r}{\rho}} = 1 - 2\operatorname{sh}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sh}^2\frac{r}{\rho}. \tag{31}$$

1.3.2. Если $B = C$, то согласно построению точки C $\alpha = \alpha_0$, $a = \pi\rho/2$. Данные значения a и α удовлетворяют формуле (31).

1.3.3. Если точка B принадлежит дуге CP, то $a > \pi\rho/2$ и $\alpha > \alpha_0$. Следовательно, $\cos\frac{a}{\rho} < 0$ и $\operatorname{ch}\alpha > \operatorname{ch}\alpha_0$. Применив равенства (28), (29), получим (31).

Итак, первая формула из (16) справедлива. Учитывая, что длина $\overline{a}$ внешней относительно цикла ω_h хорды AB равна $\pi\rho - a$, получим вторую формулу из (16).

Второе утверждение теоремы доказано.

Остается рассмотреть случай, когда точки A, B принадлежат различным ветвям цикла ω_h.

2. Пусть $b < 0$. В этом случае прямая AB (26) может принадлежать только гиперболическому типу. Длина a отрезка между точками A (22), B (23) удовлетворяет равенству (27). При $b < 0$ по формуле (25) $b^2 + 1 = -2b \operatorname{ch} \alpha$, следовательно,

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\rho} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} \operatorname{ch} \alpha}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho}} = 1 + 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{r}{\rho},$$

и справедлива формула (17).

В частном случае, когда точки A, B являются диаметрально противоположными, получаем: $a = 2r$, $\alpha = 0$. Данные значения a и α также удовлетворяют формуле (17).

Утверждение 3 теоремы доказано. Теорема доказана. □

Пересечем гиперболический цикл $\omega_h(S, r)$ параболической прямой AP, $A \in \omega_h$, $P \in \omega_h$, с несобственной точкой K. Отрезок AP является внешним по отношению к циклу ω_h, назовем его *параболической хордой* цикла ω_h. Гиперболический угол ASP назовем *центральным углом* цикла ω_h, соответствующим хорде AP, его величину обозначим φ (рис. 8). Для параболической прямой AP имеет место равенство 1), где параметр b определен соответствующим условию (25) равенством

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{b^2 + 1}{2b}, \tag{32}$$

причем $b > 0$, так как точки A, P принадлежат одной ветви цикла ω_h.

Требование 1) приведем к виду

$$\operatorname{cth}^2 \frac{r}{\rho} = \frac{b^2 + 1}{4b} + \frac{1}{2}. \tag{33}$$

Из условий (32), (33) следует, что значение φ, $\varphi \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ch} \varphi = 2 \operatorname{cth}^2 \frac{r}{\rho} - 1.$$

Тогда

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{2 \operatorname{ch} \frac{r}{\rho}}{\operatorname{sh}^2 \frac{r}{\rho}}, \quad e^{\varphi} = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi = \frac{\operatorname{ch} \frac{r}{\rho} + 1}{\operatorname{ch} \frac{r}{\rho} - 1} = \operatorname{cth}^2 \frac{r}{2\rho},$$

и, следовательно,

$$\varphi = 2 \ln \operatorname{cth} \frac{r}{2\rho}. \tag{34}$$

Функция $\beta(x) = \ln\operatorname{cth}\frac{x}{2\rho}$ в геометрии плоскости $\widehat{H}$ аналогична функции Лобачевского и названа *функцией угла параллельности* [11]. Она определяет зависимость угла параллельности относительно гиперболической прямой в точке ковалианы полюса этой прямой относительно абсолюта от расстояния точки до указанного полюса прямой. На основании свойств гиперболического цикла, сформулированных в теоремах 3, 4, величина угла параллельности в каждой точке цикла $\omega_h(S,r)$ относительно базы цикла постоянна и равна $\ln\operatorname{cth}\frac{r}{2\rho}$. Согласно условиям 1)–3), (34) справедлива

Теорема 10. *На плоскости $\widehat{H}$ хорда одной ветви гиперболического цикла ω_h является параболической, гиперболической или эллиптической тогда и только тогда, когда величина соответствующего ей центрального угла равна, больше или, соответственно, меньше двух углов параллельности в точке цикла ω_h относительно его базы.*

Литература

1. Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства.* Наука, М., 1969.
2. Л. Н. Ромакина, *Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **12**, No. 3 (2012), 37–44.
3. Л. Н. Ромакина, *Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n-контуром.* В кн.: Теория относительности, гравитация и геометрия, Межд. конф. “Petrov 2010 Anniversary Sympozium on General Relativity and Gravitation” Труды (Казань, 1–6 ноября 2010 г.) Казан. ун-т, Казань, 2010, сс. 227–232.
4. Л. Н. Ромакина, *Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны.* В кн.: Сб. науч. тр. Механика. Математика, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2010, сс. 69–72.
5. Л. Н. Ромакина, *Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные h-ломаной.* В кн.: Современные проблемы математики и механики. Математика, VI:3, Изд-во МГУ, М., 2011, 131–138.
6. Л. Н. Ромакина, *Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны.* — Матем. сб. **203**, No. 9 (2012), 83–116.
7. Л. Н. Ромакина, *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей.* Изд-во “Научная книга”, Саратов, 2008.
8. Л. Н. Ромакина, *Определение лучей, отрезков и квазиотрезков различного типа прямых при построении классических неевклидовых геометрий на моделях Кэли–Клейна.* В кн.: Междун. конференция “62-е Герценовские чтения”, Сб. науч. тр., Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, 2009, 103–109.
9. Л. Н. Ромакина, *Конечные замкнутые 5-контуры расширенной гиперболической плоскости.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **11**, No. 1 (2011), 38–49.

10. Л. Н. Ромакина, *Конечные замкнутые* 3(4)*-контуры расширенной гиперболической плоскости.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **10**, No. 3 (2010), 14–26.
11. Л. Н. Ромакина, *Аналоги функции Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны.* — Сиб. электрон. матем. изв. **10** (2013), 393–407.

Romakina L. N. Cycles of the hyperbolic plane of positive curvature.

Properties of hyperbolic and elliptic cycles of the hyperbolic plane $\widehat{H}$ of positive curvature are investigated. An analog of Pythagorean theorem for a right trivertex with a parabolic hypotenuse is proved. For each type of straight lines, formulas expressing the length of a chord of a hyperbolic cycle in terms of the cycle radius, the measure of the central angle corresponding to the chord, and the radius of curvature of $\widehat{H}$ are obtained. The plane $\widehat{H}$ is considered in projective interpretation.

Саратовский государственный
университет,
ул. Астраханская 83,
410012 Саратов, Россия
E-mail: romakinaln@mail.ru

Поступило 7 января 2012 г.