Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

С. С. Подкорытов

О ГОМОТОПИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

§1. Введение

$\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$. *Пространство* – топологическое пространство с отмеченной точкой. *Клеточное пространство* имеет отмеченную вершину. *Отображение* – непрерывное отображение, сохраняющее отмеченную точку. С учётом отмеченных точек понимаются гомотопии, обозначение $[X, Y]$ и т. п.

Инварианты конечной степени. Пусть даны пространства X и Y, абелева группа V и функция $f\colon [X, Y] \to V$ (гомотопический инвариант). Определим число $\operatorname{Deg} f \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, *степень* инварианта f. Отображение $a\colon X \to Y$ для каждого $r \in \mathbf{N}$ определяет отображение $a^r\colon X^r \to Y^r$ (декартову степень), которое индуцирует гомоморфизм $C_0(a^r)\colon C_0(X^r) \to C_0(Y^r)$ групп (неприведённых) нульмерных цепей с коэффициентами в $\mathbf{Z}$. Пусть условие $\operatorname{Deg} f \leqslant r$ будет равносильно существованию такого гомоморфизма $l\colon \operatorname{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) \to V$, что $f([a]) = l(C_0(a^r))$ для всех отображений $a\colon X \to Y$. Нетрудно понять, что это определение корректно.

Основные результаты.

1.1. Теорема. *Пусть даны связное компактное клеточное пространство X, нильпотентное связное клеточное пространство Y с конечно порождёнными гомотопическими группами и различные классы $u_1, u_2 \in [X, Y]$. Тогда для некоторого простого числа p существует такой инвариант конечной степени $f\colon [X, Y] \to \mathbf{Z}_p$, что $f(u_1) \neq f(u_2)$.*

Родственные утверждения были известны в некоторых случаях, когда $[X, Y]$ – абелева группа [3, 4]. Теорема 1.1 вытекает (см. § 11) из одного результата Баусфилда – Кана и теоремы 1.2.

Группу называем *p-конечной* (p – простое число), если она конечна и её порядок – степень числа p.

Ключевые слова: теорема сходимости Шипли.

1.2. Теорема. *Пусть даны простое число p, компактное клеточное пространство X и связное клеточное пространство Y с p-конечными гомотопическими группами. Тогда любой инвариант $f\colon [X,Y] \to \mathbf{Z}_p$ имеет конечную степень.*

По-видимому, теорему 1.2 можно вывести из теоремы сходимости Шипли [12] – которой мы, однако, не пользуемся. Наш подход основан на использовании симплициальной модели (приближённой) пространства Y, допускающей гармоничное (см. § 6) вложение в симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль.

Ненильпотентные примеры. Следующие утверждения показывают, что условие нильпотентности в теореме 1.1 существенно.

Имея в виду, что $\pi_n(Y) = [S^n, Y]$, мы будем говорить об инвариантах конечной степени на $\pi_n(Y)$.

1.3. *Пусть дано пространство Y. Если группа $\pi_1(Y)$ совершенна, то для любой абелевой группы V любой инвариант конечной степени $f\colon \pi_1(Y) \to V$ постоянен.*

Доказательство следует из лемм 12.2 и 3.6. □

1.4. *Пусть даны число $n > 1$ и пространство Y. Пусть $\pi_n(Y) \cong \mathbf{Z}^2$ и элемент $g \in \pi_1(Y)$ индуцирует на $\pi_n(Y)$ автоморфизм порядка 6. Тогда для любой абелевой группы V любой инвариант конечной степени $f\colon \pi_n(Y) \to V$ постоянен.*

Доказательство следует из лемм 12.2 и 12.3 и утверждения 3.7. □

Пример: отображения $S^{n-1} \times S^n \to S^n_{(\mathbf{Q})}$ (ср. [5, Example 4.6]). Возьмём чётное $n > 0$. Пусть $c\colon S^{n-1} \times S^n \to S^{2n-1}$ – отображение степени 1, $i = [\mathrm{id}] \in \pi_n(S^n)$, $j = i * i \in \pi_{2n-1}(S^n)$ (квадрат Уайтхеда) и $u(q) = (qj) \circ c \in [S^{n-1} \times S^n, S^n]$, $q \in \mathbf{Z}$ (композиция отображения и гомотопического класса понимается в очевидном смысле). Пусть $l\colon S^n \to S^n_{\mathbf{Q}}$ – рационализация и $\bar{u}(q) = l \circ u(q) \in [S^{n-1} \times S^n, S^n_{\mathbf{Q}}]$. Классы $u(q)$, $q \in \mathbf{Z}$, попарно различны; более того, классы $\bar{u}(q)$, $q \in \mathbf{Z}$, попарно различны (доказательство опускается).

Верно ли, что в условиях теоремы 1.1 существует такое $r \in \mathbf{N}$, что элементы множества $[X, Y]$ различаются инвариантами степени не выше r? Неверно, как показывает следующее утверждение.

1.5. *Пусть даны абелева группа V и инвариант $f\colon [S^{n-1} \times S^n, S^n] \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$. Тогда $f(u(q)) = f(u(0))$ при $r! \mid q$.*

Следующее утверждение показывает, что условие конечной порождённости в теореме 1.1 существенно.

1.6. *Пусть даны абелева группа* V *и инвариант конечной степени* $f\colon [S^{n-1}\times S^n, S^n_{\mathbf{Q}}]\to V$. *Тогда* $f(\bar u(q)) = f(\bar u(0))$, $q\in\mathbf{Z}$.

Следующее утверждение показывает, что в условиях теоремы 1.1 инвариантов конечной степени со значениями в $\mathbf{Q}$ не достаточно для различения рационально различных гомотопических классов.

1.7. *Пусть дан инвариант конечной степени* $f\colon [S^{n-1}\times S^n, S^n]\to\mathbf{Q}$. *Тогда* $f(u(q)) = f(u(0))$, $q\in\mathbf{Z}$.

Неуловимые элементы в $H_0(Y^X)$**.** Пространство отображений $X\to Y$ обозначаем Y^X. Инвариант $f\colon [X,Y]\to V$ определяет гомоморфизм ${}^+\!f\colon H_0(Y^X)\to V$, $\lfloor u\rfloor\mapsto f(u)$ (здесь $\lfloor u\rfloor$ – базисный элемент, соответствующий классу u). Верно ли, что в условиях теоремы 1.1 для любого ненулевого элемента $w\in H_0(Y^X)$ найдутся такие абелева группа V и инвариант конечной степени $f\colon [X,Y]\to V$, что ${}^+\!f(w)\neq 0$? Неверно, как показывает следующее утверждение.

1.8. *Пусть даны число* $n>1$, *пространство* Y *и элементы* $u_1,u_2\in\pi_n(Y)$ *взаимно простых конечных порядков. Пусть* $w = \lfloor u_1+u_2\rfloor - \lfloor u_1\rfloor - \lfloor u_2\rfloor + \lfloor 0\rfloor$. *Тогда для любых абелевой группы* V *и инварианта конечной степени* $f\colon \pi_n(Y)\to V$ *имеем* ${}^+\!f(w)=0$.

Доказательство следует из лемм 12.2 и 3.8. □

Если группа $\pi_n(Y)$ периодическая и делимая, то то же верно для любых $u_1,u_2\in\pi_n(Y)$ (следует из лемм 12.2 и 3.9). Здесь мы забываем, разумеется, об условии конечной порождённости. Пространство Y при этом может быть p-локальным: например, $Y=\mathcal{K}(P,n)$ (пространство Эйленберга–Маклейна), где $P=\mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$.

§2. Предварительный материал

Множество с отмеченным элементом называем *отрядом*, сохраняющую отмеченные элементы функцию – *архизмом*. Мы используем стандартную модельную структуру категории симплициальных отрядов (и архизмов) [9, Corollary 3.6.6]. К ней отсылают слова *расслоение*, *корасслоение* и т. д. *Расслаивающий* симплициальный архизм – расслоение. *Изотипичный* симплициальный архизм, или *изотипия* – слабая эквивалентность. *Изотипные* симплициальные отряды – слабо эквивалентные.

Абелева группа, имея отмеченный элемент 0, есть отряд; симплициальная абелева группа – симплициальный отряд.

Симплициальный отряд T называем *компактным*, если он порождён конечным числом симплексов, и *постепенным*, если отряды T_q, $q \in \mathbf{N}$, конечны.

Для симплициальных отрядов K и T соответствующий функциональный симплициальный отряд ($\mathrm{hom}_*(K,T)$ по [6, Ch. VIII, 4.8]) обозначаем T^K. Симплициальный архизм $f\colon K \to L$ индуцирует симплициальный архизм $T^f\colon T^L \to T^K$, и т. д. Такие обозначения мы используем и в топологическом случае.

Знак $\sim$ обозначает гомотопность, знак $\simeq$ – гомотопическую эквивалентность.

Основные гомоморфизмы. По умолчанию цепи и гомологии имеют коэффициенты в некотором коммутативном кольце $\mathcal{R}$; $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}$. (В § 1 неявно предполагалось $\mathcal{R} = \mathbf{Z}$.)

Для пространств X и Y вводим $\mathcal{R}$-гомоморфизмы

$$ {}^X_Y\mu_r\colon C_0(Y^X) \to \mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)), \qquad \lfloor a \rfloor \mapsto C_0(a^r), $$

$r \in \mathbf{N}$, и $\mathcal{R}$-гомоморфизм проекции

$$ {}^X_Y\nu\colon C_0(Y^X) \to H_0(Y^X). $$

Для симплициальных отрядов K и T вводим $\mathcal{R}$-гомоморфизмы

$$ {}^K_T\mu_r\colon C_0(T^K) \to \mathrm{Hom}_0(C_*(K^r), C_*(T^r)), \qquad \lfloor b \rfloor \mapsto C_*(b^r), $$

$r \in \mathbf{N}$. Здесь $\lfloor b \rfloor$ – базисная цепь, соответствующая симплексу $b \in (T^K)_0$, т. е. симплициальному архизму $b\colon K \to T$; $b^r\colon K^r \to T^r$ – декартова степень; $C_*(b^r)\colon C_*(K^r) \to C_*(T^r)$ – индуцированный $\mathcal{R}$-гомоморфизм градуированных $\mathcal{R}$-модулей цепей; Hom_0 – $\mathcal{R}$-модуль сохраняющих градуировку $\mathcal{R}$-гомоморфизмов. Вводим $\mathcal{R}$-гомоморфизм проекции

$$ {}^K_T\nu\colon C_0(T^K) \to H_0(T^K). $$

§3. Групповые алгебры и плавные функции

Групповую $\mathcal{R}$-алгебру группы G обозначаем $\mathcal{R}\lfloor G \rfloor$. Элементу $g \in G$ соответствует базисный элемент $\lfloor g \rfloor \in \mathcal{R}\lfloor G \rfloor$. Аугментационный идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor G \rfloor \subseteq \mathcal{R}\lfloor G \rfloor$ – ядро $\mathcal{R}$-гомоморфизма $\mathcal{R}\lfloor G \rfloor \to \mathcal{R}$, $\lfloor g \rfloor \mapsto 1$. Идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor G \rfloor^s$ $(s > 0)$ $\mathcal{R}$-порождён элементами вида $(1 - \lfloor g_1 \rfloor) \dots (1 - \lfloor g_s \rfloor)$.

Пусть дана абелева группа V. Функция $f\colon G \to V$ определяет гомоморфизм ${}^{+}f\colon \mathbf{Z}\lfloor G\rfloor \to V$, $\lfloor g\rfloor \mapsto f(g)$. Функцию f называем *r-плавной*, если ${}^{+}f \mid \rceil\mathbf{Z}\lfloor G\rfloor^{r+1} = 0$, и *плавной* (или *полиномиальной*), если она r-плавна для какого-то $r \in \mathbf{N}$ [11, Ch. V].

Пусть дано простое число p.

3.1. Лемма. *Пусть дан конечный $\mathbf{Z}_p$-модуль U размерности m. Тогда $\rceil\mathbf{Z}_p\lfloor U\rfloor^{(p-1)m+1} = 0$.*

3.2. Следствие. *Пусть даны $\mathbf{Z}_p$-модули U и V. Если модуль U конечен, то любая функция $f\colon U \to V$ плавна.*

3.3. Лемма [7, Proposition 1.2]. *Пусть даны абелевы группы U, V и W, r-плавная функция $f\colon U \to V$ и s-плавная функция $g\colon V \to W$ $(r, s \in \mathbf{N})$. Тогда функция $g \circ f\colon U \to W$ rs-плавна.*

Доказательство следует из [11, Ch. V, Theorem 2.1]. □

Функция $f\colon U \to V$ между абелевыми группами индуцирует $\mathcal{R}$-гомоморфизм $f_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{R}\lfloor U\rfloor \to \mathcal{R}\lfloor V\rfloor$, $\lfloor u\rfloor \mapsto \lfloor f(u)\rfloor$.

3.4. Следствие. *Пусть даны абелевы группы U и V и r-плавная $(r \in \mathbf{N})$ функция $f\colon U \to V$. Тогда для любого $s \in \mathbf{N}$ $\mathcal{R}$-гомоморфизм $f_{\mathcal{R}}$ отображает идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor U\rfloor^{rs+1}$ в идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor V\rfloor^{s+1}$.*

3.5. Лемма. *Пусть дано множество I и для каждого $i \in I$ даны абелевы группы U_i и V_i и r-плавная $(r \in \mathbf{N})$ функция $f_i\colon U_i \to V_i$. Тогда функция*

$$\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} U_i \to \prod_{i\in I} V_i$$

r-плавна.

Следующие утверждения не участвуют в доказательстве основных результатов и нужны только при рассмотрении примеров § 1.

3.6. Лемма. *Пусть даны совершенная группа G и абелева группа V. Тогда любая плавная функция $f\colon G \to V$ постоянна.*

Доказательство следует из [11, Ch. III, Corollary 1.3]. □

3.7. *Пусть даны абелева группа $U \cong \mathbf{Z}^2$, автоморфизм $J\colon U \to U$ порядка 6, абелева группа V и плавная функция $f\colon U \to V$. Пусть функция $\mathbf{Z} \times U \to V$, $(t, u) \mapsto f(J^t u - u)$, плавна. Тогда функция f постоянна.*

Доказательство. Доказательство опускается. □

3.8. Лемма. *Пусть даны абелевы группы U и V, плавная функция $f\colon U \to V$ и элементы $u_1, u_2 \in U$ взаимно простых конечных порядков. Тогда $f(u_1 + u_2) - f(u_1) - f(u_2) + f(0) = 0$.*

3.9. Лемма. *Пусть даны делимая периодическая абелева группа U и абелева группа V. Тогда любая плавная функция $f\colon U \to V$ 1-плавна.*

3.10. Лемма. *Пусть даны группы G и H. Тогда идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor G \times H\rfloor^s$ ($s > 1$) $\mathcal{R}$-порождён элементами вида $(1 - \lfloor a_1\rfloor)\dots(1 - \lfloor a_{s-q}\rfloor)(1 - \lfloor b_1\rfloor)\dots(1 - \lfloor b_q\rfloor)$, где $0 \leqslant q \leqslant s$, $a_t \in G \times 1 \subseteq G \times H$ и $b_t \in 1 \times H \subseteq G \times H$.*

3.11. Лемма. *Функция $F\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ r-плавна ($r \in \mathbf{N}$) ровно тогда, когда она задаётся многочленом степени не выше r.*

§4. Ключ коммутативного квадрата

Пусть дано коммутативное кольцо E. Рассмотрим диаграмму симплициальных E-модулей и E-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[d, "f'"] \arrow[r, bend left, "t'"] & W \arrow[l, "g'"] \arrow[d, "g''"'] \\
U \arrow[u, bend left, "s'"] \arrow[r, bend right, "s''"'] & V'' \arrow[l, "f''"'] \arrow[u, bend right, "t''"']
\end{tikzcd}$$

с коммутативным квадратом ($f' \circ g' = f'' \circ g''$). Набор (s', s'', t', t'') называем *ключом* этого квадрата, если в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend right, "{(-s',s'')}"'] & V' \oplus V'' \arrow[l, "{(-f',f'')}"'] \arrow[r, bend right, "{(t',t'')}"'] & W \arrow[l, "{(g',g'')}"']
\end{tikzcd}$$

имеем $(-s', s'') \circ (-f', f'') + (g', g'') \circ (t', t'') = \mathrm{id}$. При этом пару (t', t'') называем *полуключом*.

4.1. Лемма. *Пусть дан коммутативный квадрат симплициальных E-модулей и E-гомоморфизмов с полуключом*

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[d, "f'"] \arrow[r, bend left, "t'"] & W \arrow[l, "g'"] \arrow[d, "g''"'] \\
U & V'' \arrow[l, "f''"'] \arrow[u, bend right, "t''"']
\end{tikzcd},$$

симплициальный отряд T и такие симплициальные архизмы $k' \colon T \to V'$ и $k'' \colon T \to V''$, что $f' \circ k' = f'' \circ k''$. Рассмотрим симплициальный архизм $l = t' \circ k' + t'' \circ k'' \colon T \to W$. Тогда $g' \circ l = k'$ и $g'' \circ l = k''$.

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[dd, "f'"'] \arrow[rr, bend left, "t'"] & & W \arrow[ll, "g'"] \arrow[dd, "g''"'] \\
& T \arrow[ul, "k'"] \arrow[ur, "l"'] \arrow[dr, "k''"'] & \\
U & & V'' \arrow[ll, "f''"] \arrow[uu, bend right, "t''"']
\end{tikzcd}$$

Сектором симплициального E-гомоморфизма $h \colon \widetilde{W} \to W$ называем такой симплициальный E-гомоморфизм $s \colon W \to \widetilde{W}$, что $h \circ s = \mathrm{id}$.

4.2. Лемма. *Пусть дана коммутативная диаграмма симплициальных E-модулей и E-гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
0 & \widetilde{U} \arrow[l] \arrow[d, "f"] & \widetilde{V} \arrow[l, "\widetilde{p}"'] \arrow[d, "g"] & \widetilde{W} \arrow[l, "\widetilde{q}"'] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[l] \\
0 & U \arrow[l] & V \arrow[l, "p"'] & W \arrow[l, "q"'] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

строки которой точны и расщепимы и где E-гомоморфизм h имеет сектор. Тогда левый квадрат имеет ключ.

Доказательство. Пусть на диаграмме ниже (k, l) и $(\widetilde{k}, \widetilde{l})$ – расщепления:

$$p \circ k = \mathrm{id}, \qquad l \circ q = \mathrm{id}, \qquad k \circ p + q \circ l = \mathrm{id},$$

$$\widetilde{p} \circ \widetilde{k} = \mathrm{id}, \qquad \widetilde{l} \circ \widetilde{q} = \mathrm{id}, \qquad \widetilde{k} \circ \widetilde{p} + \widetilde{q} \circ \widetilde{l} = \mathrm{id},$$

а s – сектор: $h \circ s = \mathrm{id}$. Введём симплициальные E-гомоморфизмы $r = \widetilde{q} \circ s \circ l$ и $\widehat{k} = \widetilde{k} + r \circ (k \circ f - g \circ \widetilde{k})$. Тогда $(0, k, \widehat{k}, r)$ – искомый ключ.

$$\begin{tikzcd}
0 & \widetilde{U} \arrow[l] \arrow[d, "f"] \arrow[r, bend left, "\widehat{k}"] \arrow[r, bend right, "\widetilde{k}"'] & \widetilde{V} \arrow[l, "\widetilde{p}"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[r, bend right, "\widetilde{l}"'] & \widetilde{W} \arrow[l, "\widetilde{q}"'] \arrow[d, "h"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & U \arrow[l] \arrow[u, bend left, "0"] \arrow[r, bend right, "k"'] & V \arrow[l, "p"'] \arrow[u, bend right, "r"'] \arrow[r, bend right, "l"'] & W \arrow[l, "q"'] \arrow[u, bend right, "s"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

□

4.3. Лемма. *Пусть даны симплициальные отряды L и M, изотипичное корасслоение $j\colon L \to M$ и фибрантный симплициальный отряд Q. Тогда $Q^j\colon Q^M \to Q^L$ – изотипичное расслоение.*

4.4. Лемма. *Пусть даны симплициальные отряды Q и R, расслоение $c\colon Q \to R$ и изотипный точке симплициальный отряд N. Тогда $c^N\colon Q^N \to R^N$ – изотипичное расслоение.*

4.5. Лемма. *Пусть E – поле и даны симплициальные E-модули V и W и изотипичный расслаивающий симплициальный E-гомоморфизм $f\colon W \to V$. Тогда f имеет сектор.*

4.6. Лемма. *Пусть E – поле и даны симплициальные отряды L и M, изотипичное корасслоение $j\colon L \to M$, симплициальные E-модули Q и R и расслаивающий симплициальный E-гомоморфизм $c\colon Q \to R$. Тогда коммутативный квадрат симплициальных E-модулей и E-гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
Q^L \arrow[d, "c^L"'] & Q^M \arrow[l, "Q^j"'] \arrow[d, "c^M"] \\
R^L & R^M \arrow[l, "R^j"']
\end{tikzcd}$$

имеет ключ.

Доказательство. Рассмотрим (строго) кофибрационную последовательность

$$L \xrightarrow{j} M \xrightarrow{k} N.$$

Так как корасслоение j изотипично, то симплициальный отряд N изотипен точке. Имеем коммутативную диаграмму симплициальных E-модулей и E-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
0 & Q^L \arrow[l] \arrow[d, "c^L"] & Q^M \arrow[l, "Q^j"'] \arrow[d, "c^M"] & Q^N \arrow[l, "Q^k"'] \arrow[d, "c^N"] & 0 \arrow[l] \\
0 & R^L \arrow[l] & R^M \arrow[l, "R^j"'] & R^N \arrow[l, "R^k"'] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Покажем, что строки точны и расщепимы. Рассмотрим верхнюю строку. Точность во втором и третьем членах очевидна. Q – фибрант, так как это симплициальная абелева группа. По лемме 4.3, Q^j – изотипичное расслоение. По лемме 4.5, Q^j имеет сектор. Таким образом, эта строка точна и расщепима. То же для нижней строки. По лемме 4.4, c^N – изотипичное расслоение. По лемме 4.5, c^N имеет сектор. По лемме 4.2, существует искомый ключ. $\square$

§5. Квазисимплициальные архизмы

Для симплициальных отрядов K и L *квазисимплициальный архизм* $f\colon K \dashrightarrow L$ – последовательность архизмов $f_q\colon K_q \to L_q$, $q \in \mathbf{N}$. Отряд квазисимплициальных архизмов обозначаем $\tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(K,L)$; подотряд симплициальных архизмов – $\mathrm{sAr}(K,L)$.

Для симплициальных абелевых групп U и V квазисимплициальный архизм $f\colon U \dashrightarrow V$ *r-плавен*, если архизмы $f_q\colon U_q \to V_q$ r-плавны.

Пусть дан симплициальный отряд T. Для $m, q \in \mathbf{N}$ пусть $[m|q]$ – множество нестрого возрастающих функций $[m] \to [q]$ (где $[q] = \{0, \ldots, q\}$) и

$$T(m,q) = (T(h))_{h \in [m|q]}\colon T_q \to T_m^{[m|q]}.$$

Симплициальный отряд T называем *m-разрешимым*, если для любого q архизм $T(m,q)$ инъективен.

Пусть дано простое число p.

5.1. Лемма. *Пусть даны постепенный симплициальный отряд T, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль U, m-разрешимый ($m \in \mathbf{N}$) симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль R, корасслоение $d\colon T \to U$ и симплициальный архизм $k\colon T \to R$. Тогда для некоторого $r \in \mathbf{N}$ существует такой r-плавный квазисимплициальный архизм $w\colon U \dashrightarrow R$, что*

$w \circ d = k$.

$$\begin{tikzcd} U & T \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "k"] & R \arrow[from=1-1, to=1-3, dashed, bend right, "w"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Так как архизм $d_m \colon T_m \to U_m$ инъективен, то существует такой архизм $v \colon U_m \to R_m$, что $v \circ d_m = k_m$. По следствию 3.2, v r-плавен для некоторого $r \in \mathbf{N}$. Возьмём $q \in \mathbf{N}$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U_q \arrow[d, "U(m,q)"'] & T_q \arrow[l, "d_q"'] \arrow[r, "k_q"] \arrow[d, "T(m,q)"] & R_q \arrow[d, "R(m,q)"] \\ U_m^{[m|q]} \arrow[rr, squiggly, bend right, "v^{[m|q]}"'] & T_m^{[m|q]} \arrow[l, "d_m^{[m|q]}"'] \arrow[r, "k_m^{[m|q]}"] & R_m^{[m|q]}. \end{tikzcd}$$

По лемме 3.5, архизм $v^{[m|q]}$ r-плавен. Так как $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $R(m,q)$ инъективен, то есть такой $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $f \colon R_m^{[m|q]} \to R_q$, что $f \circ R(m,q) = \mathrm{id}$. Введём r-плавный архизм

$$w_q \colon U_q \xrightarrow{U(m,q)} U_m^{[m|q]} \xrightarrow{v^{[m|q]}} R_m^{[m|q]} \xrightarrow{f} R_q.$$

Используя диаграмму, получаем $w_q \circ d_q = k_q$. □

5.2. Лемма. *Пусть даны симплициальный отряд M, симплициальные абелевы группы U и V и r-плавный ($r \in \mathbf{N}$) квазисимплициальный архизм $t \colon U \dashrightarrow V$. Тогда архизм $t_\# \colon \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,U) \to \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,V)$, $f \mapsto t \circ f$, r-плавен.*

Доказательство. Это следует из леммы 3.5, так как есть коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,U) \arrow[r, "t_\#"] \arrow[d, equal] & \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,V) \arrow[d, equal] \\ \prod\limits_{q \in \mathbf{N}, k \in M_q^\times} U_q \arrow[r, "\prod\limits_{q \in \mathbf{N}, k \in M_q^\times} t_q"] & \prod\limits_{q \in \mathbf{N}, k \in M_q^\times} V_q, \end{tikzcd}$$

где $M_q^\times = M_q \setminus \{\text{отмеченный элемент}\}$. □

5.3. Лемма. *Пусть даны симплициальные отряды M и T, симплициальные $\mathbf{Z}_p$-модули U и R, симплициальные архизмы $d\colon T \to U$ и $k\colon T \to R$ и такой r-плавный ($r \in \mathbf{N}$) квазисимплициальный архизм $w\colon U \dashrightarrow R$, что $w \circ d = k$. Тогда существует такой r-плавный квазисимплициальный архизм $z\colon U^M \dashrightarrow R^M$, что $z \circ d^M = k^M$.*

$$\begin{tikzcd} U^M \arrow[rr, dashed, bend right, "z"'] & T^M \arrow[l, "d^M"'] \arrow[r, "k^M"] & R^M \end{tikzcd}$$

Доказательство. Возьмём $q \in \mathbf{N}$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} (U^M)_q \arrow[d, "i"'] & (T^M)_q \arrow[l, "(d^M)_q"'] \arrow[r, "(k^M)_q"] & (R^M)_q \arrow[d, "j"] \\ \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, U) \arrow[rr, "w_\#"] & & \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, R), \end{tikzcd}$$

где $i\colon (U^M)_q = \mathrm{sAr}(\Delta^q_+ \wedge M, U) \to \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, U)$ – $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм включения и аналогичное j. По лемме 5.2, архизм $w_\#$ r-плавен. Есть такой $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $f\colon \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, R) \to (R^M)_q$, что $f \circ j = \mathrm{id}$. Введём r-плавный архизм

$$z_q\colon (U^M)_q \xrightarrow{i} \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, U) \xrightarrow{w_\#} \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, R) \xrightarrow{f} (R^M)_q.$$

Используя диаграмму, получаем $z_q \circ (d^M)_q = (k^M)_q$. □

§6. Гармоничные корасслоения

Пусть даны симплициальный отряд T и симплициальная абелева группа U. Корасслоение $d\colon T \to U$ называем *r-гармоничным* ($r \in \mathbf{N}$), если для любых компактных симплициальных отрядов L и M и изотипичного корасслоения $j\colon L \to M$ существуют такие симплициальный архизм $x\colon T^L \to T^M$ и r-плавный квазисимплициальный архизм

$y\colon U^L \dashrightarrow U^M$, что $d^M \circ x = y \circ d^L$ и $T^j \circ x = \mathrm{id}$.

$$\begin{tikzcd}
T^L \arrow[d, "d^L"'] \arrow[r, bend left, "x"] & T^M \arrow[l, "T^j"] \arrow[d, "d^M"] \\
U^L \arrow[r, bend right, dashed, "y"'] & U^M \arrow[l, "U^j"']
\end{tikzcd}$$

Называем корасслоение *гармоничным*, если оно r-гармонично для какого-то $r \in \mathbf{N}$.

Высотой 0-связного пространства Y называем супремум тех $q \in \mathbf{N}$, для которых $\pi_q(Y) \neq 1$ (супремум пустого множества считаем равным 0).

6.1. Лемма. *Пусть даны простое число p и связное клеточное пространство Y конечной высоты с p-конечными гомотопическими группами. Тогда существуют постепенный симплициальный отряд T с $|T| \simeq Y$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль U и гармоничное корасслоение $d\colon T \to U$.*

Доказательство. (Индукция вдоль постниковского разложения пространства Y со слоями вида $\mathcal{K}(\mathbf{Z}_p, q)$.) Пусть n – высота пространства Y. Если $n = 0$, то Y стягиваемо, положим $T = U = 0$ и всё. Иначе выберем элемент $e \in \pi_n(Y)$, неподвижный относительно канонического действия группы $\pi_1(Y)$ и имеющий порядок p. Существование такого элемента (см. замечание в [6, Ch. II, Example 5.2(iv)]) вытекает из известного сравнения $|\mathrm{Fix}_G X| \equiv |X| \pmod p$ для действия p-конечной группы G на конечном множестве X. Пусть $\bar{Y}$ – клеточное пространство, получающееся из Y "заклеиванием" элемента e. Имеем $\pi_q(\bar{Y}) \cong \pi_q(Y)$ при $q \neq n$ и $\pi_n(\bar{Y}) \cong \pi_n(Y)/\langle e \rangle$. Пространство Y гомотопически эквивалентно гомотопическому слою некоторого отображения $\bar{Y} \to \mathcal{K}(\mathbf{Z}_p, n+1)$ [8, Lemma 4.70].

Принимаем (как предположение индукции), что есть постепенный симплициальный отряд $\bar{T}$ с $|\bar{T}| \simeq \bar{Y}$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль $\bar{U}$ и r-гармоничное ($r \geqslant 1$) корасслоение $\bar{d}\colon \bar{T} \to \bar{U}$.

Пусть R – постепенный $(n+1)$-разрешимый симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль с $|R| \simeq \mathcal{K}(\mathbf{Z}_p, n+1)$, Q – постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль, изотипный точке, и $c\colon Q \to R$ – расслаивающий симплициальный $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм (см. [2]). Существует декартов квадрат симплициальных отрядов и архизмов

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[d, "c"] \\ \bar{T} \arrow[r, "k"] & R, \end{tikzcd}$$

где $|T| \simeq Y$. Положим $U = \bar{U} \times Q$. Пусть $a\colon U \to \bar{U}$ и $b\colon U \to Q$ – симплициальные $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмы проекций. Зададим симплициальный архизм $d\colon T \to U$ условиями $a \circ d = \bar{d} \circ f$ и $b \circ d = h$. Очевидно, d – корасслоение.

По лемме 5.1, для некоторого $s \geqslant 1$ есть такой s-плавный квазисимплициальный архизм $w\colon \bar{U} \dashrightarrow R$, что $w \circ \bar{d} = k$.

Покажем, что d rs-гармонично. Возьмём компактные симплициальные отряды L и M и изотипичное корасслоение $j\colon L \to M$. Нужно найти такие симплициальный архизм $x\colon T^L \to T^M$ и rs-плавный квазисимплициальный архизм $y\colon U^L \dashrightarrow U^M$, что

$$d^M \circ x = y \circ d^L$$

и

$$T^j \circ x = \mathrm{id}.$$

Так как $\bar{d}$ r-гармонично, то есть такие симплициальный архизм $\bar{x}\colon \bar{T}^L \to \bar{T}^M$ и r-плавный квазисимплициальный архизм $\bar{y}\colon \bar{U}^L \dashrightarrow \bar{U}^M$, что $\bar{d}^M \circ \bar{x} = \bar{y} \circ \bar{d}^L$ и $\bar{T}^j \circ \bar{x} = \mathrm{id}$.

Имеем коммутативный квадрат симплициальных $\mathbf{Z}_p$-модулей и $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов с полуключом

$$\begin{tikzcd} Q^L \arrow[r, bend left, dashed, "t'"] \arrow[d, "c^L"'] & Q^M \arrow[l, "Q^j"] \arrow[d, "c^M"'] \\ R^L & R^M \arrow[l, "R^j"'] \arrow[u, bend right, dashed, "t''"'] \end{tikzcd}$$

(полуключ есть по лемме 4.6). Введём симплициальный архизм

$$u = t' \circ h^L + t'' \circ k^M \circ \bar{x} \circ f^L\colon T^L \to Q^M.$$

Так как

$$c^L \circ h^L = k^L \circ f^L = k^L \circ \bar{T}^j \circ \bar{x} \circ f^L = R^j \circ k^M \circ \bar{x} \circ f^L,$$

то, по лемме 4.1, $Q^j \circ u = h^L$ и $c^M \circ u = k^M \circ \bar{x} \circ f^L$.

Зададим нужный симплициальный архизм x условиями $f^M \circ x = \bar{x} \circ f^L$ и $h^M \circ x = u$:

$$\begin{tikzcd}
T^M \arrow[rr, "h^M"] \arrow[dd, "f^M"'] & & Q^M \arrow[dd, "c^M"] \\
& T^L \arrow[ul, "x"'] \arrow[ur, "u"] \arrow[dl, "\bar{x}\circ f^L"] & \\
\bar{T}^M \arrow[rr, "k^M"] & & R^M.
\end{tikzcd}$$

Так можно сделать, поскольку квадрат здесь декартов, а условия согласованы: $k^M \circ \bar{x} \circ f^L = c^M \circ u$. Имеем $T^j \circ x = \mathrm{id}$, так как

$$f^L \circ T^j \circ x = \bar{T}^j \circ f^M \circ x = \bar{T}^j \circ \bar{x} \circ f^L = f^L$$

и

$$h^L \circ T^j \circ x = Q^j \circ h^M \circ x = Q^j \circ u = h^L.$$

По лемме 5.3, есть такой s-плавный квазисимплициальный архизм $z\colon \bar{U}^M \dashrightarrow R^M$, что $z \circ \bar{d}^M = k^M$. Введём квазисимплициальный архизм

$$v = t' \circ b^L + t'' \circ z \circ \bar{y} \circ a^L\colon U^L \dashrightarrow Q^M.$$

По лемме 3.3, он rs-плавен.

Зададим нужный квазисимплициальный архизм y условиями $a^M \circ y = \bar{y} \circ a^L$ и $b^M \circ y = v$:

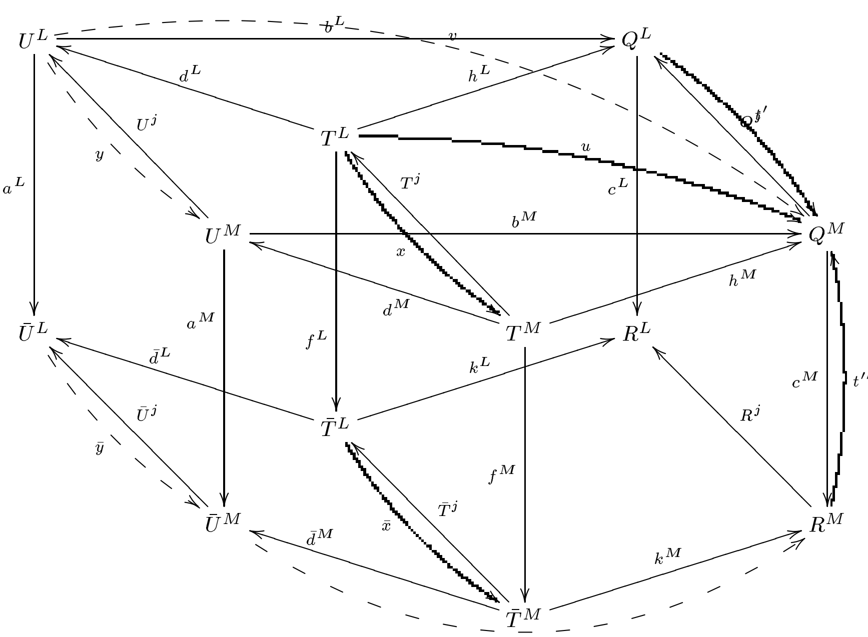
$$\begin{tikzcd}
U^M \arrow[rr, "b^M"] \arrow[dd, "a^M"'] & & Q^M \\
& U^L \arrow[ul, dashed, "y"'] \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[dl, dashed, "\bar{y}\circ a^L"] & \\
\bar{U}^M. & &
\end{tikzcd}$$

Так можно сделать, поскольку $(a^M, b^M)\colon U^M \to \bar{U}^M \times Q^M$ – изоморфизм. Очевидно, y rs-плавен. Имеем $d^M \circ x = y \circ d^L$, так как

$$a^M \circ d^M \circ x = \bar{d}^M \circ f^M \circ x = \bar{d}^M \circ \bar{x} \circ f^L = \bar{y} \circ \bar{d}^L \circ f^L = \bar{y} \circ a^L \circ d^L = a^M \circ y \circ d^L$$

и

$$\begin{aligned} b^M \circ d^M \circ x = h^M \circ x = u &= t' \circ h^L + t'' \circ k^M \circ \bar{x} \circ f^L \\ &= t' \circ h^L + t'' \circ z \circ \bar{d}^M \circ \bar{x} \circ f^L \\ &= t' \circ h^L + t'' \circ z \circ \bar{y} \circ \bar{d}^L \circ f^L \\ &= t' \circ b^L \circ d^L + t'' \circ z \circ \bar{y} \circ a^L \circ d^L = v \circ d^L \\ &= b^M \circ y \circ d^L. \end{aligned}$$



(На этой диаграмме прямые стрелки составляют коммутативную поддиаграмму.) □

§7. Две фильтрации модуля $C_0(U^K)$

7.1. Лемма. *Пусть дан конечный набор абелевых групп U_i, $i \in I$. Пусть*

$$U_J = \bigoplus_{i \in J} U_i, \qquad J \subseteq I,$$

$U = U_I$ *и* $p_J \colon U \to U_J$ *– проекции. Тогда для* $r \in \mathbf{N}$ *в* $\mathcal{R}$*-алгебре* $\mathcal{R}\lfloor U \rfloor$ *имеем*

$$\bigcap_{J \subseteq I \,:\, |J| \leqslant r} \ker(p_J)_{\mathcal{R}} \subseteq \rceil \mathcal{R}\lfloor U \rfloor^{r+1}.$$

Доказательство. Пусть $s_J \colon U_J \to U$ – канонические вложения и $q_J = s_J \circ p_J \colon U \to U$. Пусть $|I| > r$ (иначе утверждение тривиально). Для $u \in U$ имеем (ср. [1, лемма 5.5])

$$\begin{aligned} \lfloor u \rfloor - \sum_{J \subseteq I \,:\, |J| \leqslant r} (-1)^{r-|J|} \binom{|I|-|J|-1}{r-|J|} \lfloor q_J(u) \rfloor & \\ = \sum_{J \subseteq I} \Bigl(\sum_{M \subseteq I \,:\, M \supseteq J,\, |M| > r} (-1)^{|M|-|J|} \Bigr) \lfloor q_J(u) \rfloor & \\ = \sum_{M \subseteq I \,:\, |M| > r} \Bigl(\sum_{J \subseteq M} (-1)^{|M|-|J|} \lfloor q_J(u) \rfloor \Bigr) & \\ = \sum_{M \subseteq I \,:\, |M| > r} \prod_{i \in M} (\lfloor q_{\{i\}}(u) \rfloor - 1) \in \rceil \mathcal{R}\lfloor U \rfloor^{r+1}. & \end{aligned}$$

Следовательно, для $w \in \mathcal{R}\lfloor U \rfloor$ имеем

$$w - \sum_{J \subseteq I \,:\, |J| \leqslant r} (-1)^{r-|J|} \binom{|I|-|J|-1}{r-|J|} (q_J)_{\mathcal{R}}(w) \in \rceil \mathcal{R}\lfloor U \rfloor^{r+1}.$$

Если

$$w \in \bigcap_{J \subseteq I \,:\, |J| \leqslant r} \ker(p_J)_{\mathcal{R}},$$

то, так как $\ker(p_J)_{\mathcal{R}} = \ker(q_J)_{\mathcal{R}}$, получаем $w \in \rceil \mathcal{R}\lfloor U \rfloor^{r+1}$. □

Для симплициальной абелевой группы V введём в модуле $C_0(V) = \mathcal{R}\lfloor V_0 \rfloor$ фильтрацию $C_0^{\rceil s}(V) = \rceil \mathcal{R}\lfloor V_0 \rfloor^s$, $s \in \mathbf{N}$.

7.2. Следствие. *Пусть даны компактный симплициальный отряд K, поле E, симплициальный E-модуль U и число $r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим*

$\mathcal{R}$-гомоморфизм

$$C_0(U^K) \xrightarrow{{}^K_U\mu_r} \mathrm{Hom}_0(C_*(K^r), C_*(U^r)).$$

Тогда $\ker {}^K_U\mu_r \subseteq C_0^{\rceil r+1}(U^K)$.

Доказательство. Возьмём элемент $B \in \ker {}^K_U\mu_r$ и покажем, что $B \in C_0^{\rceil r+1}(U^K)$.

Есть такое $n \in \mathbf{N}$, что симплициальный отряд K порождён конечным набором симплексов $g_i \in K_n$, $i \in I$. Введём E-гомоморфизм $h\colon (U^K)_0 \to U_n^I$, $b \mapsto (b(g_i))_{i\in I}$. Он инъективен, поэтому есть такой E-гомоморфизм $f\colon U_n^I \to (U^K)_0$, что $f \circ h = \mathrm{id}$. Достаточно показать, что $h_{\mathcal{R}}(B) \in \rceil\mathcal{R}\lfloor U_n^I \rfloor^{r+1}$. Действительно, тогда $B = f_{\mathcal{R}}(h_{\mathcal{R}}(B)) \in \rceil\mathcal{R}\lfloor (U^K)_0 \rfloor^{r+1} = C_0^{\rceil r+1}(U^K)$.

Для $J \subseteq I$ пусть $p_J\colon U_n^I \to U_n^J$ – проекция. Возьмём $J \subseteq I$ с $|J| \leqslant r$. По лемме 7.1, достаточно проверить, что $(p_J)_{\mathcal{R}}(h_{\mathcal{R}}(B)) = 0$.

Выберем такие функцию $t\colon J \to \{1, \ldots, r\}$ и симплекс $k = (k_1, \ldots, k_r) \in K_n^r$, что $k_{t(i)} = g_i$, $i \in J$. Имеем E-гомоморфизм $U_n^t\colon U_n^r \to U_n^J$, $\mathcal{R}$-гомоморфизм $(U_n^t)_{\mathcal{R}}\colon C_n(U^r) = \mathcal{R}\lfloor U_n^r \rfloor \to \mathcal{R}\lfloor U_n^J \rfloor$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}\lfloor (U^K)_0 \rfloor \arrow[r, "h_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, "{}^K_U\mu_r"'] & \mathcal{R}\lfloor U_n^I \rfloor \arrow[d, "(p_J)_{\mathcal{R}}"] \\
\mathrm{Hom}_0(C_*(K^r), C_*(U^r)) \arrow[r, "v \mapsto (U_n^t)_{\mathcal{R}}(v(\lfloor k \rfloor))"] & \mathcal{R}\lfloor U_n^J \rfloor.
\end{tikzcd}$$

Так как ${}^K_U\mu_r(B) = 0$, то $(p_J)_{\mathcal{R}}(h_{\mathcal{R}}(B)) = 0$. □

§8. Симплициальная аппроксимация

8.1. Лемма. *Пусть даны компактный симплициальный отряд K, симплициальный отряд W и отображение $f\colon |K| \to |W|$. Тогда существуют такие компактный симплициальный отряд L, изотипия $e\colon L \to K$ и симплициальный архизм $g\colon L \to W$, что $f \circ |e| \sim |g|$.*

Доказательство см. [10, Corollary 4.8]. □

Для симплициальных отрядов L и T функция геометрической реализации $|?|\colon (T^L)_0 \to |T|^{|L|}$ индуцирует $\mathcal{R}$-гомоморфизм

$$\|?\|\colon H_0(T^L) \to H_0(|T|^{|L|}).$$

8.2. Лемма. *Пусть даны компактный симплициальный отряд K, симплициальный отряд T и число $r \in \mathbf{N}$. Тогда для любого $A \in \ker {}^{|K|}_{|T|}\mu_r$ существуют компактный симплициальный отряд L, изотипия $e\colon L \to K$ и такой элемент $B \in \ker {}^{L}_{T}\mu_r$, что $H_0(|T|^{|e|})\big({}^{|K|}_{|T|}\nu(A)\big) = \|{}^{L}_{T}\nu(B)\|$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_0(C_*(L^r), C_*(T^r)) & C_0(T^L) \arrow[l, "{}^{L}_{T}\mu_r"'] \arrow[r, "{}^{L}_{T}\nu"] & H_0(T^L) \arrow[dd, "\|?\|"] \\
 & B & \\
 & & H_0(|T|^{|L|}) \\
 & A & \\
\mathrm{Hom}(C_0(|K|^r), C_0(|T|^r)) & C_0(|T|^{|K|}) \arrow[l, "{}^{|K|}_{|T|}\mu_r"'] \arrow[r, "{}^{|K|}_{|T|}\nu"] & H_0(|T|^{|K|}). \arrow[uu, "H_0(|T|^{|e|})"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Имеем

$$A = \sum_{i=1}^{m} v_i \lfloor a_i \rfloor,$$

где $m \in \mathbf{N}$, $v_i \in \mathcal{R}$ и $a_i \in |T|^{|K|}$. Для $x \in |K|$ введём эквивалентность $c(x)$ на множестве $I = \{1, \dots, m\}$: $c(x) = \{\, (i,j) : a_i(x) = a_j(x) \,\}$. Пусть $E = \{\, c(x) : x \in |K| \,\}$.

Эквивалентность на I называем *нейтральной*, если

$$\sum_{i \in J} v_i = 0$$

для каждого её класса $J \subseteq I$. Покажем, что для любых $h_1, \dots, h_r \in E$ эквивалентность $h = h_1 \cap \dots \cap h_r$ нейтральна. Для каждого $s = 1, \dots, r$ имеем $h_s = c(x_s)$ для некоторой точки $x_s \in |K|$. Пусть $x = (x_1, \dots, x_r) \in |K|^r$. В $C_0(|T|^r)$ имеем

$$\sum_{i \in I} v_i \lfloor a_i^r(x) \rfloor = {}^{|K|}_{|T|}\mu_r(A) = 0.$$

Так как для $i, j \in I$

$$a_i^r(x) = a_j^r(x) \iff (i,j) \in h,$$

то это значит, что эквивалентность h нейтральна.

Каждой эквивалентности h на I соответствует симплициальный подотряд $V(h) \subseteq T^m$ (диагональ):

$$V(h)_q = \{\,(t_1, \ldots, t_m) \in T_q^m : t_i = t_j \text{ для всех } (i,j) \in h\,\}.$$

Пусть

$$W = \bigcup_{h \in E} V(h) \subseteq T^m.$$

Имеем отображения $a = (a_1, \ldots, a_m)\colon |K| \to |T|^m$ и $\widetilde{a} = d^{-1} \circ a\colon |K| \to |T^m|$, где $d\colon |T^m| \to |T|^m$ – каноническое биективное отображение. Для $x \in |K|$ имеем $\widetilde{a}(x) \in |V(c(x))|$. Поэтому $\operatorname{im} \widetilde{a} \subseteq |W|$. Используя лемму 8.1, находим такие компактный симплициальный отряд L, изотипию $e\colon L \to K$ и симплициальный архизм $b = (b_1, \ldots, b_m)\colon L \to T^m$, что $\operatorname{im} b \subseteq W$ и $\widetilde{a} \circ |e| \sim |b|$. Положим

$$B = \sum_{i=1}^{m} v_i \lfloor b_i \rfloor.$$

Имеем $a_i \circ |e| \sim |b_i|$. Поэтому $H_0(|T|^{|e|})(^{|K|}_{|T|}\nu(A)) = \|^{L}_{T}\nu(B)\|$. Покажем, что $^{K}_{T}\mu_r(B) = 0$. Для $k = (k_1, \ldots, k_r) \in K_q^r$ $(q \in \mathbf{N})$ имеем

$$^{K}_{T}\mu_r(B)(\lfloor k \rfloor) = \sum_{i=1}^{m} v_i \lfloor b_i^r(k) \rfloor.$$

Возьмём $s = 1, \ldots, r$. Так как $\operatorname{im} b \subseteq W$, то есть такое $h_s \in E$, что $b(k_s) \in V(h_s)$. Поэтому функция $i \mapsto b_i(k_s)$ подчинена эквивалентности h_s (т. е. постоянна на её классах). Так как

$$b_i^r(k) = (b_i(k_1), \ldots, b_i(k_r)),$$

то функция $i \mapsto b_i^r(k)$ подчинена эквивалентности $h = h_1 \cap \ldots \cap h_r$. Так как эквивалентность h нейтральна, получаем $^{K}_{T}\mu_r(B)(\lfloor k \rfloor) = 0$. $\square$

§9. Включение $\ker {}^{X}_{Y}\mu_r \subseteq \ker {}^{X}_{Y}\nu$ при больших r

9.1. Лемма. *Пусть даны пространства $X, Y, \widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, причём $X \simeq \widetilde{X}$ и $Y \simeq \widetilde{Y}$. Тогда для любого $r \in \mathbf{N}$ есть равносильность*

$$\ker {}^{X}_{Y}\mu_r \subseteq \ker {}^{X}_{Y}\nu \iff \ker {}^{\widetilde{X}}_{\widetilde{Y}}\mu_r \subseteq \ker {}^{\widetilde{X}}_{\widetilde{Y}}\nu.$$

Доказательство. Есть гомотопические эквивалентности $k\colon X \to \widetilde{X}$ и $h\colon \widetilde{Y} \to Y$. Имеем коммутативную диаграмму $\mathcal{R}$-модулей и $\mathcal{R}$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C_0(\widetilde{X}^r), C_0(\widetilde{Y}^r)) \arrow[d] & C_0(\widetilde{Y}^{\widetilde{X}}) \arrow[l, "{}^{\widetilde{X}}_{\widetilde{Y}}\mu_r"'] \arrow[r, "{}^{\widetilde{X}}_{\widetilde{Y}}\nu"] \arrow[d, "C_0(h^k)"] & H_0(\widetilde{Y}^{\widetilde{X}}) \arrow[d, "H_0(h^k)"] \\
\mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) & C_0(Y^X) \arrow[l, "{}^{X}_{Y}\mu_r"'] \arrow[r, "{}^{X}_{Y}\nu"] & H_0(Y^X),
\end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки индуцированы отображениями k и h. Так как $H_0(h^k)$ – изоморфизм, получаем импликацию $\Rightarrow$. Импликация $\Leftarrow$ получается так же. $\square$

Пусть дано простое число p. Пусть $\mathcal{R} = \mathbf{Z}_p$.

9.2. *Пусть даны компактное клеточное пространство X и связное клеточное пространство Y конечной высоты с p-конечными гомотопическими группами. Тогда для любого достаточно большого $r \in \mathbf{N}$ в диаграмме*

$$\mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) \xleftarrow{{}^{X}_{Y}\mu_r} C_0(Y^X) \xrightarrow{{}^{X}_{Y}\nu} H_0(Y^X)$$

имеем $\ker {}^{X}_{Y}\mu_r \subseteq \ker {}^{X}_{Y}\nu$.

Доказательство. По лемме 6.1, для некоторого $s \in \mathbf{N}$ есть постепенный симплициальный отряд T с $|T| \simeq Y$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль U и s-гармоничное корасслоение $d\colon T \to U$. Имеем $X \simeq |K|$ для некоторого компактного симплициального отряда K. Очевидно, $(U^K)_0$ – конечный $\mathbf{Z}_p$-модуль. По лемме 3.1, $C_0^{]t+1}(U^K) = 0$ для некоторого $t \in \mathbf{N}$. Возьмём $r \geqslant st$ и покажем, что в диаграмме

$$\mathrm{Hom}(C_0(|K|^r), C_0(|T|^r)) \xleftarrow{{}^{|K|}_{|T|}\mu_r} C_0(|T|^{|K|}) \xrightarrow{{}^{|K|}_{|T|}\nu} H_0(|T|^{|K|})$$

имеем $\ker {}^{|K|}_{|T|}\mu_r \subseteq \ker {}^{|K|}_{|T|}\nu$. Этого достаточно, по лемме 9.1.

Возьмём элемент $A \in \ker {}^{|K|}_{|T|}\mu_r$ и покажем, что $A \in \ker {}^{|K|}_{|T|}\nu$. По лемме 8.2, есть компактный симплициальный отряд L, изотипия $e\colon L \to K$ и такой элемент $B \in \ker {}^{L}_{T}\mu_r$, что

$$H_0(|T|^{|e|})({}^{|K|}_{|T|}\nu(A)) = \|{}^{L}_{T}\nu(B)\|.$$

Так как $|e|$ – гомотопическая эквивалентность, то $H_0(|T|^{|e|})$ – изоморфизм. Поэтому достаточно показать, что ${}^{L}_{T}\nu(B) = 0$.

Пусть симплициальный отряд M – (приведённый) цилиндр симплициального архизма e. Имеем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "i"'] & & L \arrow[ll, "e"'] \arrow[dl, "j"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

где i и j – канонические корасслоения. По определению цилиндра, i – изотипия. Так как e – изотипия, то j – тоже изотипия. Так как d s-гармонично, то есть коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} T^L \arrow[r, "x"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "d^L"'] & T^M \arrow[r, "T^j"'] \arrow[d, "d^M"] & T^L \\ U^L \arrow[r, dashed, "y"] & U^M, & \end{tikzcd}$$

где x – симплициальный архизм и y – s-плавный квазисимплициальный архизм. Имеем коммутативную диаграмму $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} & B & B_1 & B_2 \\ \mathrm{Hom}_0(C_*(L^r), C_*(T^r)) \arrow[d] & C_0(T^L) \arrow[l, "{}^{L}_{T}\mu_r"'] \arrow[r, "C_0(x)"] \arrow[d, "C_0(d^L)"] & C_0(T^M) \arrow[r, "C_0(T^i)"] \arrow[d, "C_0(d^M)"] & C_0(T^K) \arrow[d, "C_0(d^K)"] \\ \mathrm{Hom}_0(C_*(L^r), C_*(U^r)) & C_0(U^L) \arrow[l, "{}^{L}_{U}\mu_r"'] \arrow[r, "C_0(y)"] & C_0(U^M) \arrow[r, "C_0(U^i)"] & C_0(U^K), \\ & B' & B'_1 & B'_2 \end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки индуцированы корасслоением d; $B_1, \ldots, B'_2$ – образы элемента B в соответствующих модулях. Так как ${}^{L}_{T}\mu_r(B) = 0$, то ${}^{L}_{U}\mu_r(B') = 0$. По следствию 7.2, $B' \in C_0^{]r+1}(U^L)$. Так как $r \geqslant st$, а архизм y_0 s-плавен, то, по следствию 3.4, $B'_1 \in C_0^{]t+1}(U^M)$. Так как $(U^i)_0$ – гомоморфизм, то $B'_2 \in C_0^{]t+1}(U^K)$. Но $C_0^{]t+1}(U^K) = 0$. Значит, $B'_2 = 0$. Так как d – корасслоение, то $C_0(d^K)$ – мономорфизм. Значит, $B_2 = 0$.

Имеем коммутативную диаграмму $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\underset{B}{C_0(T^L)} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "C_0(x)"'] & & \overset{B}{C_0(T^L)} \arrow[rr, "{}^L_T\nu"] & & H_0(T^L) \\
& \underset{B_1}{C_0(T^M)} \arrow[ur, "C_0(T^j)"] \arrow[rr, "{}^M_T\nu"] \arrow[dr, "C_0(T^i)"'] & & H_0(T^M) \arrow[ur, "H_0(T^j)"] \arrow[dr, "H_0(T^i)"] & \\
& & \underset{B_2}{C_0(T^K)} \arrow[rr, "{}^K_T\nu"] & & H_0(T^K). \arrow[uu, "H_0(T^e)"']
\end{tikzcd}$$

Так как $B_2 = 0$, то ${}^L_T\nu(B) = 0$. □

Можно рассмотреть фильтрацию комплекса $C_*(Y^X)$ ядрами $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов

$$C_q(Y^X) \xrightarrow{i_q} C_0(Y^{\Delta^q_+\wedge X}) \xrightarrow{{}^{\Delta^q_+\wedge X}_{Y}\mu_r} \mathrm{Hom}(C_0((\Delta^q_+\wedge X)^r), C_0(Y^r)),$$

где i_q – очевидные изоморфизмы. Интересно, сходится ли эта фильтрация.

§10. Вывод теоремы 1.2 из утверждения 9.2

10.1. Лемма. *Пусть даны пространства X, Y, $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, отображения $k\colon X \to \widetilde{X}$ и $h\colon \widetilde{Y} \to Y$, абелева группа V и инвариант $f\colon [X,Y] \to V$. Рассмотрим инвариант $\widetilde{f}\colon [\widetilde{X},\widetilde{Y}] \to V$, $\widetilde{u} \mapsto f(h\circ\widetilde{u}\circ k)$. Тогда $\operatorname{Deg}\widetilde{f} \leqslant \operatorname{Deg} f$.*

Доказательство. Возьмём $r \in \mathbf{N}$. Отображения k и h индуцируют гомоморфизм

$$t\colon \mathrm{Hom}(C_0(\widetilde{X}^r), C_0(\widetilde{Y}^r)) \to \mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)).$$

Имеем $t(C_0(\widetilde{a}^r)) = C_0((h\circ\widetilde{a}\circ k)^r)$, $\widetilde{a} \in \widetilde{Y}^{\widetilde{X}}$. Пусть $\operatorname{Deg} f \leqslant r$. Есть такой гомоморфизм $l\colon \mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) \to V$, что $f([a]) = l(C_0(a^r))$, $a \in Y^X$. Введём гомоморфизм $\widetilde{l} = l\circ t\colon \mathrm{Hom}(C_0(\widetilde{X}^r), C_0(\widetilde{Y}^r)) \to V$. Для $\widetilde{a} \in \widetilde{Y}^{\widetilde{X}}$ имеем $\widetilde{f}([\widetilde{a}]) = f([h\circ\widetilde{a}\circ k]) = l(C_0((h\circ\widetilde{a}\circ k)^r)) = l(t(C_0(\widetilde{a}^r))) = \widetilde{l}(C_0(\widetilde{a}^r))$. Таким образом, $\operatorname{Deg}\widetilde{f} \leqslant r$. □

Доказательство теоремы 1.2. Сперва пусть Y имеет конечную высоту. Достаточно показать, что "универсальный" инвариант

$$F\colon [X,Y] \to H_0(Y^X;\mathbf{Z}_p),\ u \mapsto \lfloor u \rfloor,$$

имеет конечную степень. Для $r \in \mathbf{N}$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_0(X^r;\mathbf{Z}),C_0(Y^r;\mathbf{Z})) \arrow[d, "m'"'] & C_0(Y^X;\mathbf{Z}) \arrow[l, "{}^X_Y\widetilde{\mu}_r"'] \arrow[d, "m"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(C_0(X^r;\mathbf{Z}_p),C_0(Y^r;\mathbf{Z}_p)) & C_0(Y^X;\mathbf{Z}_p) \arrow[l, "{}^X_Y\mu_r"'] \arrow[r, "{}^X_Y\nu"] & H_0(Y^X;\mathbf{Z}_p),
\end{tikzcd}$$

где m и m' – гомоморфизмы приведения по модулю p; волна над μ в верхней строке означает "над $\mathbf{Z}$". По утверждению 9.2, при достаточно больших r имеем $\ker {}^X_Y\mu_r \subseteq \ker {}^X_Y\nu$. Тогда есть такой $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $t\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(C_0(X^r;\mathbf{Z}_p),C_0(Y^r;\mathbf{Z}_p)) \to H_0(Y^X;\mathbf{Z}_p)$, что $t \circ {}^X_Y\mu_r = {}^X_Y\nu$. Для $a \in Y^X$ имеем $F([a]) = ({}^X_Y\nu \circ m)(\lfloor a \rfloor) = (t \circ m' \circ {}^X_Y\widetilde{\mu}_r)(\lfloor a \rfloor) = (t \circ m')(C_0(a^r;\mathbf{Z}))$. Таким образом, $\operatorname{Deg} F \leqslant r$.

Общий случай сводится к рассмотренному. Есть связное клеточное пространство $\bar{Y}$ конечной высоты с p-конечными гомотопическими группами и $(\dim X+1)$-связное отображение $h\colon Y \to \bar{Y}$ ($\bar{Y}$ получается из Y "заклеиванием" старших гомотопических групп). Индуцированная функция $h_{\#}\colon [X,Y] \to [X,\bar{Y}]$ биективна. Введём инвариант $\bar{f} = f \circ h_{\#}^{-1}\colon [X,\bar{Y}] \to \mathbf{Z}_p$. По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} f \leqslant \operatorname{Deg} \bar{f}$. По доказанному выше, $\operatorname{Deg} \bar{f} < \infty$. □

§11. Вывод теоремы 1.1 из теоремы 1.2

11.1. Лемма [6, Ch. VI, Proposition 8.6]. *Пусть даны связное компактное клеточное пространство X, нильпотентное связное клеточное пространство Y с конечно порождёнными гомотопическими группами и различные классы $u_1, u_2 \in [X,Y]$. Тогда для некоторого простого числа p существуют такие связное клеточное пространство $\bar{Y}$ с p-конечными гомотопическими группами и отображение $h\colon Y \to \bar{Y}$, что $h \circ u_1 \neq h \circ u_2$ в $[X,\bar{Y}]$.*

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 11.1, для некоторого простого числа p есть такие связное клеточное пространство $\bar{Y}$ с p-конечными гомотопическими группами и отображение $h\colon Y \to \bar{Y}$, что классы $\bar{u}_i = h \circ u_i$, $i=1,2$, различны. Есть такой инвариант $\bar{f}\colon [X,\bar{Y}] \to \mathbf{Z}_p$, что $\bar{f}(\bar{u}_1) \neq \bar{f}(\bar{u}_2)$. По теореме 1.2, $\operatorname{Deg} \bar{f} < \infty$. Введём инвариант

$f = \bar{f} \circ h_\#\colon [X,Y] \to \mathbf{Z}_p$. По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} f < \infty$. Имеем $f(u_1) = \bar{f}(\bar{u}_1) \neq \bar{f}(\bar{u}_2) = f(u_2)$. □

§12. Свойства инвариантов конечной степени

Пусть $\mathcal{E} = \{0,1\} \subseteq \mathbf{Z}$. Для $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{E}^n$ пусть $|e| = e_1 + \ldots + e_n$.

Пусть дан букет пространств $W = T_1 \vee \ldots \vee T_n$. Пусть $\mathrm{in}_k^W : T_k \to W$ – включения. Для $e \in \mathcal{E}^n$ пусть $M_e^W = m_1 \vee \ldots \vee m_n \colon W \to W$, где $m_k \colon T_k \to T_k$ – отображение тождественное, если $e_k = 1$, и постоянное иначе.

12.1. Лемма. *Пусть даны пространства X и Y, абелева группа V, инвариант $f\colon [X,Y] \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$, букет пространств $W = T_1 \vee \ldots \vee T_{r+1}$ и отображения $k\colon X \to W$ и $h\colon W \to Y$. Тогда*

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Доказательство. Введём инвариант $\widetilde{f}\colon [W,W] \to V$, $\widetilde{u} \mapsto f(h \circ \widetilde{u} \circ k)$. Нужно показать, что

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} \widetilde{f}([M_e^W]) = 0.$$

По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} \widetilde{f} \leqslant r$, т. е. есть такой гомоморфизм

$$l\colon \operatorname{Hom}(C_0(W^r), C_0(W^r)) \to V,$$

что $\widetilde{f}([\widetilde{a}]) = l(C_0(\widetilde{a}^r))$ для любого $\widetilde{a} \in W^W$ (здесь и ниже $\mathcal{R} = \mathbf{Z}$). Поэтому достаточно показать, что

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} C_0((M_e^W)^r) = 0.$$

Возьмём точку $w = (w_1, \ldots, w_r) \in W^r$. Есть такое $s \in \{1, \ldots, r+1\}$, что $\{w_1, \ldots, w_r\} \cap T_s \subseteq \{w_0\}$, где $w_0 \in W$ – вершина букета. Точка $(M_e^W)^r(w) \in W^r$ не зависит от s-й компоненты набора e. Так как $C_0((M_e^W)^r)(\lfloor w \rfloor) = \lfloor (M_e^W)^r(w) \rfloor$, то отсюда следует, что

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} C_0((M_e^W)^r)(\lfloor w \rfloor) = 0,$$

что и нужно. □

Отображения $S^n \to Y$. В этом пункте мы используем мультипликативную запись для гомотопических групп.

12.2. Лемма. *Пусть даны число $n \geqslant 1$, пространство Y, абелева группа V и инвариант $f\colon \pi_n(Y) \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$. Тогда f r-плавен.*

Доказательство. Возьмём элементы $u_1, \ldots, u_{r+1} \in \pi_n(Y)$. Нужно показать, что ${}^+f((1-\lfloor u_1 \rfloor)\ldots(1-\lfloor u_{r+1}\rfloor)) = 0$. Введём букет $W = S^n \vee \ldots \vee S^n$, $r+1$ слагаемых. Пусть $k\colon S^n \to W$ – отображение с $[k] = [\mathrm{in}_1^W]\ldots[\mathrm{in}_{r+1}^W]$ в $\pi_n(W)$ и $h\colon W \to Y$ – отображение с $[h \circ \mathrm{in}_s^W] = u_s$ в $\pi_n(Y)$. По лемме 12.1,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Это и есть нужное соотношение, так как $[h \circ M_e^W \circ k] = u_1^{e_1} \ldots u_{r+1}^{e_{r+1}}$ в $\pi_n(Y)$. □

Умножение Уайтхеда обозначаем знаком $*$.

12.3. Лемма. *Пусть даны числа $m, n \geqslant 1$, пространство Y и инвариант $f\colon \pi_{m+n-1}(Y) \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$. Тогда функция $b\colon \pi_m(Y) \times \pi_n(Y) \to V$, $(u,v) \mapsto f(u * v)$, r-плавна.*

Доказательство. Пусть $r > 0$ (иначе утверждение тривиально). Возьмём элементы $u_1, \ldots, u_p \in \pi_m(Y)$ и $v_1, \ldots, v_q \in \pi_n(Y)$, где $p, q \geqslant 0$ и $p + q = r + 1$. По лемме 3.10, достаточно показать, что ${}^+b((1-\lfloor \widehat{u}_1 \rfloor)\ldots(1-\lfloor \widehat{u}_p \rfloor)(1-\lfloor \widehat{v}_1 \rfloor)\ldots(1-\lfloor \widehat{v}_q \rfloor)) = 0$, где $\widehat{u}_s = (u_s, 1) \in \pi_m(Y) \times \pi_n(Y)$ и $\widehat{v}_s = (1, v_s) \in \pi_m(Y) \times \pi_n(Y)$. Введём букет $W = S^m \vee \ldots \vee S^m \vee S^n \vee \ldots \vee S^n$, p раз S^m и q раз S^n. Пусть $k\colon S^{m+n-1} \to W$ – отображение с $[k] = ([\mathrm{in}_1^W]\ldots[\mathrm{in}_p^W]) * ([\mathrm{in}_{p+1}^W]\ldots[\mathrm{in}_{r+1}^W])$ в $\pi_{m+n-1}(W)$ и $h\colon W \to Y$ – отображение с $[h \circ \mathrm{in}_s^W] = u_s$ в $\pi_m(Y)$ для $s = 1, \ldots, p$ и $[h \circ \mathrm{in}_{p+t}^W] = v_t$ в $\pi_n(Y)$ для $t = 1, \ldots, q$. По лемме 12.1,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Это и есть нужное соотношение, так как $[h \circ M_e^W \circ k] = (u_1^{e_1} \ldots u_p^{e_p}) * (v_1^{e_{p+1}} \ldots v_q^{e_{r+1}})$ в $\pi_{m+n-1}(Y)$ и, следовательно,

$$f([h \circ M_e^W \circ k]) = b(u_1^{e_1} \ldots u_p^{e_p}, v_1^{e_{p+1}} \ldots v_q^{e_{r+1}}) = b(\widehat{u}_1^{e_1} \ldots \widehat{u}_p^{e_p} \widehat{v}_1^{e_{p+1}} \ldots \widehat{v}_q^{e_{r+1}}).$$

□

Отображения $S^{n-1} \times S^n \to S^n_{(\mathbf{Q})}$. В этом пункте доказываются утверждения 1.5 – 1.7 и используются объекты, введённые в соответствующем пункте § 1. Для элементов $u \in \pi_p(Y)$ и $v \in \pi_q(Y)$ класс $(u, v) \in [S^p \vee S^q, Y]$ определяется очевидным образом.

Пусть $x\colon S^n \vee S^{2n-1} \to S^n \times S^{2n-1}$ – каноническое вложение букета в произведение. Рассмотрим отображение $(\mathrm{pr}_2, c)\colon S^{n-1} \times S^n \to S^n \times S^{2n-1}$, где $\mathrm{pr}_2\colon S^{n-1} \times S^n \to S^n$ – проекция, а $c\colon S^{n-1} \times S^n \to S^{2n-1}$ – отображение, введённое в § 1. Существует (и единственно с точностью до гомотопии) такое отображение $b\colon S^{n-1} \times S^n \to S^n \vee S^{2n-1}$, что $x \circ b \sim (\mathrm{pr}_2, c)$. Для $p, q \in \mathbf{Z}$ введём классы

$$v(p,q)\colon S^{n-1} \times S^n \xrightarrow{\quad b \quad} S^n \vee S^{2n-1} \overset{(pi,qj)}{\rightsquigarrow} S^n$$

(волнистая стрелка изображает гомотопический класс) и $\bar{v}(p, q) = l \circ v(p, q) \in [S^{n-1} \times S^n, S^n_{\mathbf{Q}}]$. Очевидно, $v(0, q) = u(q)$ и $\bar{v}(0, q) = \bar{u}(q)$. Имеем $v(p, q) = v(p, 0)$ при $p \mid q$ (доказательство опускается) и $\bar{v}(p, q) = \bar{v}(p, 0)$ при $p \neq 0$ [5, Example 4.6].

Доказательство утверждения 1.5 Возьмём $q \in \mathbf{Z}$. Введём букет $W = S^n \vee \ldots \vee S^n \vee S^{2n-1}$, r раз S^n. Пусть $d\colon S^n \vee S^{2n-1} \to W$ – отображение с $[d] = ([\mathrm{in}_1^W] + \ldots + [\mathrm{in}_r^W], [\mathrm{in}_{r+1}^W])$. Пусть $k = d \circ b\colon S^{n-1} \times S^n \to W$. Пусть $h\colon W \to S^n$ – отображение с $[h] = (i, \ldots, i, qj)$. По лемме 12.1,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Так как $[h \circ M_e^W \circ k] = v(e_1 + \ldots + e_r, e_{r+1} q)$, имеем

$$\sum_{e' \in \mathcal{E}^r} (-1)^{|e'|} \sum_{e'' \in \mathcal{E}} (-1)^{e''} f(v(|e'|, e'' q)) = 0.$$

Пусть $r! \mid q$. При $e' \neq (0, \ldots, 0)$ внутренняя сумма равна нулю, так как тогда $|e'| \mid q$ и, следовательно, класс $v(|e'|, e'' q)$ не зависит от e''. Остаётся $f(v(0, 0)) - f(v(0, q)) = 0$, т. е. $f(u(q)) = f(u(0))$. □

Доказательство утверждения 1.6. Пусть $\operatorname{Deg} f \leqslant r \in \mathbf{N}$. Возьмём $q \in \mathbf{Z}$. Как в доказательстве утверждения 1.5, получаем

$$\sum_{e' \in \mathcal{E}^r} (-1)^{|e'|} \sum_{e'' \in \mathcal{E}} (-1)^{e''} f(\bar{v}(|e'|, e'' q)) = 0.$$

При $e' \neq (0, \ldots, 0)$ класс $\bar{v}(|e'|, e'' q)$ не зависит от e''. Как в доказательстве утверждения 1.5, получаем $f(\bar{u}(q)) = f(\bar{u}(0))$. □

Доказательство утверждения 1.7. Пусть $\operatorname{Deg} f \leqslant r \in \mathbf{N}$. Введём инвариант $\widetilde{f}\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Q}$, $\widetilde{u} \mapsto f(\widetilde{u} \circ c)$. По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} \widetilde{f} \leqslant r$. По лемме 12.2, $\widetilde{f}$ плавен. Введём функцию $F\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $q \mapsto f(u(q))$. Имеем $F(q) = \widetilde{f}(qj)$. Поэтому F плавна, т. е., по лемме 3.11, задаётся многочленом. По утверждению 1.5, $F(q) = F(0)$ при $r! \mid q$. Значит, F постоянна. □

Литература

1. М. Н. Гусаров, *Об n-эквивалентности узлов и инвариантах конечной степени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **208** (1993), 152–173.
2. А. Дуади, *Комплексы Эйленберга–Маклейна.* — Математика **5**, No. 2 (1961), 11–19.
3. С. С. Подкорытов, *Об отображениях сферы в односвязное пространство.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **329** (2005), 159–194.
4. С. С. Подкорытов, *Порядок гомотопического инварианта в стабильном случае.* — Мат. сб. **202**, No. 8 (2011), 95–116.
5. M. Arkowitz, G. Lupton, *On finiteness of subgroups of self-homotopy equivalences.* — Contemp. Math. **181** (1995), 1–25.
6. A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations.* — Lect. Notes Math. **304**, Springer–Verlag (1972).
7. A. Dress, *Operations in representation rings.* — Proc. Symp. Pure Math. **XXI** (1971), 39–45.
8. A. Hatcher, *Algebraic topology.* Camb. Univ. Press, Cambridge, 2002.
9. M. Hovey, *Model categories.* Math. Surveys Monographs, vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
10. J. F. Jardine, *Simplicial approximation.* — Theory Appl. Categ. **12**, No. 2 (2004), 34–72.
11. I. B. S. Passi, *Group rings and their augmentation ideals.* Lect. Notes Math., vol. 715, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.
12. B. E. Shipley, *Convergence of the homology spectral sequence of a cosimplicial space.* — Amer. J. Math. **118**, No. 1 (1996), 179–207.

Podkorytov S. S. On homotopy invariants of finite degree.

Let X and Y be pointed topological spaces and let V be an abelian group. By definition, a homotopy invariant $f\colon [X,Y] \to V$ has *degree* at most r if there exists a homomorphism $l\colon \operatorname{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) \to V$ such that $f([a]) = l(C_0(a^r))$ for all maps $a\colon X \to Y$. Here $C_0(a^r)\colon C_0(X^r) \to C_0(Y^r)$ is the homomorphism of the groups of unreduced zero-dimensional singular chains induced by the rth Cartesian power of a. Suppose that X is a connected compact CW-complex and Y is a nilpotent connected CW-complex with finitely generated homotopy groups. Then finite-degree homotopy invariants taking values in cyclic groups of prime orders distinguish homotopy classes of maps $X \to Y$. Several similar statements are shown to be false.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ssp@pdmi.ras.ru

Поступило 27 ноября 2012 г.