Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова

ВЕРШИННО ОСНАЩЕННЫЕ ГРАФЫ

§1. Предварительный материал

В этой статье под *графом* мы будем понимать *конечный связный топологический граф*, то есть конечное связное клеточное пространство размерности не больше единицы. *Вершинами* графа называются его нульмерные клетки, *ребрами* графа – одномерные клетки.

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит циклов (то есть простых замкнутых кривых). *Подграфом* графа называется его клеточное подпространство. *Деревом графа* называется его подграф, являющийся деревом. Дерево графа называется *максимальным*, если оно содержит нульмерный остов графа.

Хорошо известно, что *если граф связен, то существует подграф этого графа, являющийся максимальным деревом.* (Простые примеры показывают, что такой подграф, вообще говоря, не единственный.)

Если в графе фиксировано какое-нибудь максимальное дерево, то ребра графа, принадлежащие этому дереву, мы будем называть *ветвями*, остальные ребра – *хордами.*

§2. Формулировка задачи

Предположим, что задан какой-нибудь граф. Возьмем набор попарно непересекающихся замкнутых двумерных дисков, по одному диску для каждой вершины графа, диски ориентированы, и выберем какое-нибудь биективное отображение множества дисков этого набора на множество вершин графа. В каждом диске зафиксируем какое-нибудь подпространство, являющееся объединением (попарно различных) радиусов, по одному радиусу для каждого конца каждого ребра, конец ребра совпадает с соответствующей этому диску вершиной графа. Выберем какие-нибудь гомеоморфные отображения этих подпространств дисков на замкнутые окрестности соответствующих

Ключевые слова: ветвь, хорда, центр, хордовая диаграмма.

вершин графа, центры дисков отображаются в вершины, образы подпространств попарно не пересекаются. *Вершинным оснащением* исходного графа мы будем называть топологическое пространство, полученное приклеиванием к графу всех дисков по упомянутым гомеоморфизмам, *оснащенными вершинами* – приклеенные (ориентированные) диски.

Ясно, что *вершинное оснащение графа определено однозначно с точностью до гомеоморфизма, неподвижного на вершинах графа и отображающего каждое ребро графа в себя.* Ясно также, что *для каждой вершины графа ее оснащение определено однозначно (с точностью до гомеоморфизма, неподвижного на нульмерном остове графа и отображающего ребра графа в себя) циклической последовательностью полуребер, растущих из нее.*

Рассмотрим (четырехчленные) последовательности, составленные из графа, его вершинного оснащения, максимального дерева графа и точки, содержащейся в пересечении хорд графа с границами оснащенных вершин графа. (Чтобы охватить случай графов, не содержащих хорд, мы не будем исключать из рассмотрения случай, когда точка принадлежит пустому множеству.) Назовем две такие последовательности *гомеоморфными*, если существуют отображение графа первой последовательности в граф второй последовательности, являющееся клеточной эквивалентностью, и продолжающее его отображение вершинного оснащения графа первой последовательности в вершинное оснащение графа второй последовательности, являющееся гомеоморфизмом и сохраняющее ориентации оснащенных вершин, такие что первое (а значит, и второе) отображение переводит дерево первой последовательности в дерево второй последовательности и отмеченную точку в отмеченную точку. Ясно, что *гомеоморфность таких последовательностей есть отношение эквивалентности.*

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество классов гомеоморфных последовательностей, составленных из графа, его вершинного оснащения, максимального дерева графа и точки, содержащейся в пересечении хорд графа с границами оснащенных вершин графа.

Задача, которой посвящена настоящая работа, – вычислить множество $\mathcal{A}$.

§3. Цель работы

Через D мы будем обозначать круг, расположенный в плоскости $\mathbb{R}^2$, с центром в нуле и радиуса единица, через S – окружность, являющуюся границей круга D. Мы будем считать, что эти круг и окружность снабжены стандартными ориентациями. Далее, для любого натурального числа k и любого целого неотрицательного числа $i < k$ через $w_{k,i}$ мы будем обозначать точку $(\cos \frac{2\pi i}{k}, \sin \frac{2\pi i}{k}) \in \mathbb{R}^2$. Ясно, что, все точки $w_{k,i}$ принадлежат окружности S, а потому и кругу D.

Под *степенью* вершины графа мы будем понимать число *полуребер* графа, растущих из нее. Если степень вершины равна единице, то эту вершину мы будем называть *висячей*.

Пусть k – какое-нибудь целое неотрицательное число и C – дерево, имеющее не менее k висячих вершин. Назовем дерево C *центром индекса* k, если оно является (стратифицированным) топологическим подмногообразием круга D, (какие-то) k его висячих вершин совпадают с точками $w_{k,0}, w_{k,1}, \ldots, w_{k,k-1}$, остальные его вершины и все его ребра содержатся во внутренности круга D.

Назовем два центра (одного индекса) *гомеоморфными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм круга D на себя, гомеоморфизм неподвижен на окружности S, переводящий первый центр на второй. Ясно, что *для центров гомеоморфность есть отношение эквивалентности.*

Пусть l – какое-нибудь целое неотрицательное число. *Хордовой диаграммой индекса* l называется топологическое пространство, полученное приклеиванием к окружности S совокупности l попарно не пересекающихся экземпляров отрезка I, каждый отрезок приклеивается к окружности S своими концами, приклеивается в точках $w_{2l,i}$ (где $0 \leqslant i < 2l$), разные концы приклеиваются к разным точкам, отрезки попарно не пересекаются.

Заметим (хотя это нам не понадобится), что, как показывает простая прямая проверка, *число хордовых диаграмм индекса* l *равно* $(2l-1)!!$.

Рассмотрим множество пар, составленных из центров индекса $2l$ и хордовых диаграмм индекса l (для $l = 0, 1, 2, \ldots$). Назовем две такие пары *изоморфными*, если их центры гомеоморфны и хордовые диаграммы совпадают. Ясно, что *для таких пар изоморфность есть отношение эквивалентности.*

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество классов изоморфных пар, составленных из центров индекса $2l$ и хордовых диаграмм индекса l, где $l = 0, 1, 2, \dots$.

Главная цель этой работы – построить редукцию задачи вычисления множества $\mathcal{A}$ к задаче вычисления множества $\mathcal{B}$.

Заметим, что, как показывает прямая простая проверка, *два центра гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует изотопия диска D, неподвижная на его границе, переводящая первый центр во второй.* Это замечание показывает, что если в определении изоморфности пар, составленных из центров индекса $2l$ и хордовых диаграмм индекса l, заменить слово "гомеоморфны" словом "изотопны", то множество классов изоморфных в новом смысле таких пар совпадает с множеством $\mathcal{B}$. Это новое определение множества $\mathcal{B}$ в настоящей статье не понадобится; оно оказывается полезным при изучении вложений вершинно оснащенных графов в пространство $\mathbb{R}^3$; ср. [1], Теорема B.

§4. Основные результаты

Определим отображение

$$\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

следующим образом.

Пусть a – элемент множества $\mathcal{A}$.

Возьмем какую-нибудь четырехчленную последовательность (Γ, Δ, T, w_0), принадлежащую классу a; здесь через Γ обозначен граф, через Δ – вершинное оснащение этого графа, через T – максимальное дерево графа Γ, через w_0 – точка, принадлежащая графу Γ и содержащаяся в пересечении хорд графа с границами оснащенных вершин.

Обозначим через δ подпространство пространства Δ, являющееся объединением оснащенных вершин графа, и назовем *усеченными ветвями* замыкания компонент связности пространства $T \setminus \delta$. Ясно, что *каждая усеченная ветвь содержится в (неусеченной) ветви и эта (неусеченная) ветвь единственна.*

Теперь построим вспомогательное топологическое пространство D'. Возьмем набор ориентированных ленточек, по одной ленточке для каждой ветви графа Γ. Рассмотрим топологическое пространство δ и приклеим к нему эти ленточки, так чтобы средняя линия каждой ленточки отождествилась с какой-нибудь усеченной ветвью, боковые стороны ленточек отождествились с дугами, содержащимися в краях оснащенных вершин, дуги попарно не пересекаются и не пересекаются с хордами графа, ориентации ленточек и оснащенных вершин задают противоположные ориентации линий, по которым они склеены. Получим топологическое пространство; это пространство и есть D'.

Ясно, что топологическое пространство D' является ориентированным двумерным многообразием с краем и что оно гомеоморфно кругу D. Обозначим через k число хорд графа Γ. Ясно, далее, что край многообразия D' пересекает объединение всех хорд графа Γ по $2k$ точкам (поскольку, как нетрудно видеть, для каждой хорды таких точек пересечения две). Заметим, что одна из этих точек – точка w_0. Ясно, наконец, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм

$$h_1 : D' \to D,$$

отображающий точку w_0 в точку $w_{2k,0}$ и остальные точки пересечения границ оснащенных вершин графа с хордами в точки

$$w_{2k,1}, w_{2k,2}, \ldots, w_{2k,2k-1}.$$

Рассмотрим граф Γ и разобьем каждую хорду графа точками пересечения этой хорды с оснащенными вершинами графа. Полученный граф обозначим через Γ'. Ясно, что топологическое пространство $\Gamma' \cap D'$ является графом и что граф $h_1(\Gamma' \cap D')$ является центром индекса $2k$.

Обозначим через E' топологическое пространство, являющееся объединением многообразия $\partial D'$ и всех усеченных ветвей. Нетрудно видеть, что существует хордовая диаграмма E индекса k и гомеоморфизм

$$h_2 : E' \to E,$$

такой что $h_2(x) = h_1(x)$ при $x \in \partial D'$.

Мы определим элемент $\alpha(a)$ множества $\mathcal{B}$ как класс пары

$$(h_1(\Gamma' \cap D'), E).$$

Теорема. *Отображение α определено корректно и является биекцией.*

Первое очевидно. Для доказательства второго достаточно построить отображение

$$\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{A},$$

такое, что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ и $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$.

Возьмем элемент b из множества $\mathcal{B}$. Пусть k – целое неотрицательное число и пусть C и E – центр индекса $2k$ и хордовая диаграмма индекса k соответственно, такие что пара (C, E) представляет класс b. Рассмотрим топологическое пространство, полученное приклеиванием к дереву C набора k отрезков хордовой диаграммы E. Ясно, что это пространство имеет структуру графа; укрупним разбиение этого графа вдоль вершин, являющихся точками склеек центра и отрезков, и обозначим полученный граф через Γ. Нетрудно видеть, что граф Γ обладает стандартным вершинным оснащением и стандартным максимальным деревом; обозначим их через Δ и T соответственно. Наконец, заметим, что точка $w_{2k,0}$ очевидным образом определяет точку из множества, являющегося пересечением хорд графа Γ с границами оснащенных вершин; обозначим эту точку через $\widetilde{w}$. Мы определим элемент $\beta(b)$ как класс последовательности $(\Gamma, \Delta, T, \widetilde{w})$.

То, что это определение отображения β корректно и что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ и $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$, – очевидно.

Литература

1. В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова, *Зацепления вершинно оснащенных графов.* — Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Вып. 2 (2012), 57–60.

Nezhinskij V. M., Maslova Yu. V. Graphs with framed vertices.

We reduce the topology classification problem of finite graphs with framed vertices to a topology classification problem of plane trees.

С.-Петербургский
государственный университет;
Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nezhin@pdmi.ras.ru

Поступило 1 сентября 2012 г.

ООО “Август”,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: yuliapetrova@mail.ru