Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

А. В. Малютин

О ГРУППАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ДЕНДРОНАХ

Введение

Фон Нейман [24] показал, что аменабельные группы не содержат свободных неабелевых подгрупп. Гипотеза фон Неймана[1] предполагает, что группа аменабельна тогда и только тогда, когда она не содержит свободных неабелевых подгрупп. В общем случае эта гипотеза не выполняется: перечень контрпримеров, первыми из которых были сконструированные А. Ю. Ольшанским монстры Тарского, можно найти в [26]. Тем не менее дихотомия гипотезы фон Неймана справедлива для многих важных классов групп. Например, она выполняется для групп, удовлетворяющих альтернативе Титса. В число последних входят конечно порожденные линейные группы, гиперболические группы, группы классов отображений компактных поверхностей, группы внешних автоморфизмов свободных групп конечного ранга и проч. (см., например, перечни в [6, 16, 27]).

Как известно, группа аменабельна тогда и только тогда, когда у всякого ее непрерывного действия на компактном пространстве имеется инвариантная регулярная борелевская вероятностная мера[2]. Таким образом, всякий контрпример к гипотезе фон Неймана на некоторых компактных пространствах действует без инвариантных мер. Компактные пространства, на которых ни одно такое действие не может быть реализовано, мы называем *пространствами фон Неймана*.

Ключевые слова: дендрон, дендрит, дерево, $\mathbb{R}$-дерево, преддерево, древовидное пространство, аменабельность, инвариантная мера, гипотеза фон Неймана, альтернатива Титса, свободная неабелева подгруппа, сильная проксимальность.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 11-01-00677-а и 13-01-12422-офи-м) и гранта Президента РФ МД-5118.2011.1.

[1]Возможно, сам Джон фон Нейман этой гипотезы не высказывал. Подробнее см. обсуждение в [26].

[2]Этот критерий аменабельности восходит к работам Боголюбова; см. [2,4,5]. Он выполняется для дискретных и, более общо, локально компактных групп (см. [2]). Часто указанное свойство используется в качестве определения аменабельности и в случае произвольной топологической группы. Отметим, что в случае счетной дискретной группы достаточно ограничиться метрическими компактами и даже, как показано в [12], одним компактом: канторовым множеством.

Иначе говоря, компактное пространство X называется *фон-неймановским*[3], если всякая группа, действующая на X гомеоморфизмами, либо содержит свободную неабелеву подгруппу, либо своим действием сохраняет некоторую (регулярную борелевскую вероятностную) меру на X.

Канторово множество не является фон-неймановским[4]. Любой конечный компакт, замкнутый интервал и, вообще, компактное пространство, в котором найдется конечное подмножество, инвариантное по отношению ко всем гомеоморфизмам пространства, тривиальным образом является фон-неймановским. Гипотеза Гиза, доказанная Г. А. Маргулисом в [20], утверждает, что окружность является пространством фон Неймана[5]. Из известных результатов теории Басса–Серра следует (ниже мы остановимся на соответствующих результатах чуть подробнее), что пополнение локально конечного симплициального дерева его концами также является фон-неймановским пространством.

Замкнутый интервал, конечное симплициальное дерево, пополнение бесконечного локально конечного симплициального дерева пространством его концов – простейшие примеры *дендронов*. Оказывается, все дендроны являются пространствами фон Неймана. Это следует из представленной ниже теоремы 2.1.

§1. Дендроны и другие древовидные структуры

Напомним, что *дендроном* называют непустое связное компактное хаусдорфово[6] топологическое пространство (*континуум*), в котором любые две различные точки *разделены* третьей (говорят, что подмножества A и B топологического пространства X *разделены* подмножеством $C \subset X$, если $X \setminus C = P \cup Q$, где P и Q – дизъюнктные открытые подмножества пространства $X \setminus C$ такие, что $A \subset P$ и $B \subset Q$).

---

[3]Фон-неймановость пространства, конечно, не означает, что группа его автоморфизмов не содержит контрпримеров к гипотезе фон Неймана.

[4]Это следует из вышеупомянутого критерия аменабельности с канторовым множеством для счетных групп [12] в силу существования счетных контрпримеров к гипотезе фон Неймана.

[5]Отсюда, конечно, следует, что конечные наборы окружностей и, более общо, компактные пространства с инвариантными по отношению ко всем гомеоморфизмам конечными наборами окружностей также являются фон-неймановскими.

[6]Требование хаусдорфовости в данном определении, вообще говоря, избыточно, – хаусдорфовость автоматически следует из остальных перечисленных свойств.

Метризуемые дендроны называют *дендритами*. Перечень (включающий несколько десятков) эквивалентных определений дендритов и их свойства см., например, в [9] и приведенной там литературе по *теории континуума*. Напомним также, что пространство является дендритом тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно компактному $\mathbb{R}$-дереву[7].

Дендроны (в отличие от объектов из более широких классов топологических пространств с древовидной структурой – таких как древовидные пространства или арбороиды) лишены топологических патологий: они локально связны ([22, следствие 2.10]), глобально и локально дугообразно связны ([23, теорема 6]), причем для любых двух точек дендрона найдется единственная *дуга*[8] с концами в этих точках (см., например, [23, теорема 6]), и т.п.

В определенном смысле, дендроны можно понимать скорее как алгебро-комбинаторные, нежели топологические, объекты: топология дендрона полностью определяется его комбинаторной структурой, – скажем, набором его дуг или, что то же самое, тернарным отношением "точки x и y разделены точкой z", определенным на множестве троек точек дендрона (подробнее см. [18] и, в частности, [18, раздел 6.2(3)], [22, следствие 2.2]).

Дендрон можно получить из произвольного дерева, $\mathbb{R}$-дерева, Λ-*дерева* или, еще более общо, *преддерева* (см. определения в [7] и [10]), определенным образом пополнив его, а затем введя (или уменьшив, при необходимости, имеющуюся) топологию. Имеется канонический способ такого пополнения до дендрона, причем автоморфизмы исходного дерева ($\mathbb{R}$-дерева, Λ-дерева, преддерева) продолжаются до автоморфизмов дендрона.

Опишем такое пополнение на примере $\mathbb{R}$-дерева. Пусть T – произвольное $\mathbb{R}$-дерево, а $\widehat{T}$ – топологическое пространство, получающееся

---

[7] $\mathbb{R}$-дерево можно определить как 0-гиперболическое геодезическое метрическое пространство, т.е. геодезическое метрическое пространство, в каждом геодезическом треугольнике которого каждая из сторон содержится в объединении двух других сторон. См. также определения в [7] и [10].

[8] *Дугой* называют *упорядочиваемый* континуум. Топологическое пространство X называют *упорядочиваемым*, если на нем существует линейный порядок $<$ такой, что множества вида $\{x \in X : x < p\}$ и $\{x \in X : p < x\}$, где $p \in X$, порождают топологию пространства X. Сепарабельные (или, что то же самое, метризуемые) дуги, т.е. дуги, гомеоморфные интервалам вещественной прямой, называют также *интервалами*.

из T в результате метрического пополнения и стандартной процедуры добавления *концов* (эта процедура описана, например, в [18]). В случае, если T – локально конечное симплициальное $\mathbb{R}$-дерево, пространство $\widehat{T}$ компактно и является дендроном. В общем же случае пространство $\widehat{T}$ может оказаться не компактным, однако превращается в дендрон при уменьшении топологии: нужно перейти к топологии, порожденной компонентами связности пространств вида $\widehat{T} \setminus \{x\}$, $x \in \widehat{T}$ (подробнее см. [18]). Отметим, что тождественное отображение исходного $\mathbb{R}$-дерева в получившийся дендрон непрерывно, но не обязательно является топологическим вложением (т.е. гомеоморфизмом на образ), так что описанная процедура в общем случае не является компактификацией.

Справедливость утверждений, на которых базируется вышеописанная конструкция перехода от $\mathbb{R}$-дерева к дендрону, следует из результатов работы [18]. Другой способ описания того же перехода дан в работе [7] (см. раздел 7 и предложение 7.1 в частности). См. также [21]. Как указано в [7], конструкция перехода восходит к работе Ворда [30].

§2. Основные результаты

Перейдем к изложению основных результатов заметки.

2.1. Теорема. *Пусть группа G действует на дендроне D гомеоморфизмами. Тогда либо в D найдется G-инвариантное подмножество, состоящее из одной или двух точек, либо G содержит свободную неабелеву подгруппу.*

Как известно (см. [11,27], [10, глава 3, предложение 3.7]), если группа G действует на дереве, $\mathbb{R}$-дереве или, более общо, Λ-дереве T *изометриями*, то либо G содержит свободную неабелеву подгруппу, либо в пополнении[9] $\widehat{T}$ найдется G-инвариантное подмножество, состоящее из одной или двух точек.

Из теоремы 2.1 следует, что условие изометричности действия здесь не является существенным и может быть отброшено. Например, в случае $\mathbb{R}$-дерева теорема 2.1 дает

2.2. Следствие. *Пусть группа G действует на $\mathbb{R}$-дереве T гомеоморфизмами (либо, более общо, структурными автоморфизмами, т.е. биекциями, переводящими интервалы в интервалы). Тогда либо*

[9] При построении пополнения Λ-дерева кроме концов может потребоваться добавление так называемых *открытых сечений* (см. [10]).

в пополнении $\widehat{T}$ найдется G-инвариантное подмножество, состоящее из одной или двух точек, либо G содержит свободную неабелеву подгруппу.

Техника, используемая в доказательстве теоремы 2.1, позволяет получить еще один результат – близкий к теореме 2.1, но не следующий из нее напрямую – о *сильной проксимальности* действий групп на дендронах (теорема 2.3).

Напомним определение сильной проксимальности. Пространство всех регулярных борелевских вероятностных мер на топологическом пространстве X будем обозначать через $\mathcal{P}(X)$. На $\mathcal{P}(X)$ рассматривается слабая* топология (в двойственности по отношению к пространству ограниченных непрерывных функций на X). Действие группы G на компактном хаусдорфовом пространстве X называют *сильно проксимальным*, если для всякой меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ в G найдется сеть[10] g_α такая, что предел $\lim g_\alpha(\mu)$ является мерой Дирака, т.е. мерой, сосредоточенной в одной точке (см. [13–15], [3]).

Если действие G на компактном пространстве X не имеет глобальных неподвижных точек и сильно проксимально, то в $\mathcal{P}(X)$, очевидно, не имеется G-инвариантных мер (тем самым, G неаменабельна). Как показано в [14], локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда у нее не имеется минимального сильно проксимального действия на невырожденном компактном хаусдорфовом пространстве.

Оказывается, произвольное действие группы на дендроне либо сохраняет некоторую меру, либо сильно проксимально.

2.3. Теорема. *Пусть группа G действует на дендроне D гомеоморфизмами. Тогда либо в D найдется G-инвариантное подмножество, состоящее из одной или двух точек, либо действие сильно проксимально, так что на D не имеется G-инвариантных (регулярных борелевских вероятностных) мер.*

Мы предлагаем заинтересованному читателю сравнить представленную ниже схему доказательства теоремы 2.3 с техникой [29], где доказывается, что минимальное действие группы на невырожденном дендрите не обладает инвариантными мерами.

Отметим, что теоремы 2.1 и 2.3 не следуют друг из друга напрямую. Действительно, с одной стороны, группа может действовать на

[10]Подробнее о сетях в аспекте топологической динамики см., например, [3, приложение I].

компактном пространстве сильно проксимально и минимально и не содержать при этом свободных подгрупп (для этого группа должна являться контрпримером к гипотезе фон Неймана, но, как следует из вышеупомянутого результата из [14], любой такой контрпример обладает действием указанного вида). С другой стороны, свободная неабелева группа может действовать на компактном пространстве эффективно и минимально, но сохраняя меру (и, следовательно, не сильно проксимально), – подобный пример несложно сконструировать для сферы или тора и меры Лебега.

§3. Вспомогательные определения и леммы

Вспомогательные определения. Связное замкнутое непустое подмножество дендрона будем называть *подконтинуумом* (подконтинуум дендрона является, таким образом, дендроном). Действие группы G на дендроне D назовем *квазиминимальным*, если в D не имеется собственных G-инвариантных подконтинуумов. Подмножество B дендрона D называется *ветвью*, если B является компонентой связности пространства вида $D \setminus \{r\}$, где $r \in D$. Точку r будем называть *источником* ветви B. Нетрудно показать, что каждая ветвь имеет единственный источник (см. лемму 5.10 в [18]). Если пространство $D \setminus \{r\}$ связно, ветвь $B = D \setminus \{r\}$ будем называть *вырожденной*. *Степенью* точки $x \in D$ называют количество компонент связности пространства $D \setminus \{x\}$. Точки степени 1 называют *концевыми*.

3.1. Лемма. *Если в некотором наборе подконтинуумов дендрона не имеется двух непересекающихся подконтинуумов, то пересечение всех подконтинуумов набора является подконтинуумом.*

Схема доказательства. Пересечение подконтинуумов из произвольного набора либо пусто, либо является подконтинуумом (см., например, [22, следствие 2.15(3)]). Остается показать, что в условиях леммы пересечение непусто. Имеется несколько различных путей доказательства этого известного факта. Например, можно воспользоваться тем, что дополнения ветвей дендрона образуют *бинарное*[11] семейство ([22, лемма 2.7]), а любой подконтинуум представим в виде пересечения элементов этого семейства ([22, следствие 2.14]), откуда

[11] Семейство $\mathcal{L}$ подмножеств некоторого множества называется *бинарным*, если во всяком подсемействе $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ с $\cap\mathcal{M} = \varnothing$ найдется пара непересекающихся элементов.

вытекает, что подконтинуумы дендрона также образуют бинарное семейство. □

3.2. Лемма. *Если действие группы на дендроне не имеет орбит мощности $\leqslant 2$, то все его орбиты бесконечны.*

Схема доказательства. Доказательство может быть построено на основе рассуждения из [28], используемого там в доказательстве предложения I.2.10 и его следствия. □

3.3. Лемма. *Если действие группы G на дендроне D не имеет глобальных неподвижных точек, то в D имеется единственный квазиминимальный подконтинуум (т.е. G-инвариантный подконтинуум, индуцированное действие группы G на котором квазиминимально).*

Схема доказательства. Заметим, что в условиях леммы любые два G-инвариантных подконтинуума имеют непустое пересечение (поскольку в противном случае у действия имелись бы как минимум две неподвижные точки, – в каждом из дизъюнктных G-инвариантных подконтинуумов). Отсюда в силу леммы 3.1 следует, что пересечение всех непустых G-инвариантных подконтинуумов есть подконтинуум. Этот подконтинуум и является единственным квазиминимальным. □

3.4. Лемма. *Пусть B – ветвь в дендроне D, а $r \in D$ – ее источник. Тогда множества $D \setminus B$ и $B \cup \{r\}$ являются подконтинуумами.*

Схема доказательства. Утверждение выводится из результатов работы [18] (см., в первую очередь, [18, лемма 5.10]). □

3.5. Лемма. *Пусть A и B – ветви в дендроне D с источниками a и b соответственно. Тогда*:

1. $(a \in B) \wedge (b \in A) \;\Leftrightarrow\; A \cup B = D$.
2. $(a \in B) \wedge (b \notin A) \;\Leftrightarrow\; A \subsetneq B$.
3. $(a \notin B) \wedge (b \notin A) \wedge (A \neq B) \;\Leftrightarrow\; (A \cap B = \varnothing) \wedge (A \cup B \neq D)$.

Схема доказательства. Утверждение выводится из результатов работы [18] (см., в первую очередь, [18, лемма 5.12]). □

3.6. Лемма. *Если действие группы на дендроне квазиминимально, то орбита любой точки пересекает все ветви дендрона.*

Схема доказательства. Строя доказательство от противного, предположим, что найдется точка $x \in D$ и ветвь $E \subset D$, не пересекающая орбиту $G(x)$. Тогда, каков бы ни был элемент $g \in G$, ветвь $g(E)$ также не пересекается с $G(x)$. Дополнение $K := D \setminus E$ является подконтинуумом (лемма 3.4). Множество

$$D \setminus \bigcup_{g \in G} g(E) = \bigcap_{g \in G} g(D \setminus E)$$

является G-инвариантным собственным подконтинуумом в силу леммы 3.1. Это противоречит предположению о квазиминимальности действия. $\square$

§4. Ключевая лемма

4.1. Лемма. *Пусть группа G действует на дендроне D квазиминимально. Пусть E и B – пара невырожденных ветвей в D. Тогда*:

1. $\exists a \in G : E \subsetneq a(B)$,
2. $\exists b \in G : E \supsetneq b(B)$,
3. $\exists c \in G : E \cap c(B) = \varnothing$,
4. $\exists d \in G : E \cup d(B) = D$.

Схема доказательства. Рассмотрим сначала случай $E = B$. Источник ветви $B(= E)$ будем обозначать через r. Приведенные ниже схемы доказательств утверждений 1–4 для случая $E = B$ снабжены метками $1_=$–$4_=$ соответственно.

$1_=$, $2_=$. Покажем, что $\exists a \in G : B \subsetneq a(B)$.

В силу леммы 3.6 найдется $g \in G$ такой, что $g(r) \in B$, а также $h \in G$ такой, что $h(r) \notin B \cup \{r\}$ (поскольку B невырождена, ее источник r не является концевой точкой дендрона D, так что множество $D \setminus (B \cup \{r\})$ непусто; по определению оно разбивается на ветви; применив к любой из них лемму 3.6, получаем существование элемента h с требуемым свойством).

В случае, если $g(B) \subset B$, полагаем $a := g^{-1}$ (здесь $B \neq a(B)$, поскольку из условия $g(r) \in B$ следует, что $g(r) \neq r$ и значит $g(B) \neq B$).

В случае, когда $B \subset h(B)$, полагаем $a := h$ (здесь $B \neq a(B)$, поскольку из условия $h(r) \notin B \cup \{r\}$ следует, что $h(r) \neq r$ и значит $h(B) \neq B$).

Если $g(B) \not\subset B$ и $B \not\subset h(B)$, то из условия $g(B) \not\subset B$, привлекая лемму 3.5, получаем, что $g(B) \cup B = D$, а из условия $B \not\subset h(B)$, – с помощью той же леммы, – что $h(B) \cap B = \varnothing$. Следовательно, $h(B) \subsetneq g(B)$. Полагаем $a := h^{-1}g$.

$3_=$. Покажем, что $\exists c \in G : B \cap c(B) = \varnothing$.

Если такого c не найдется, то все ветви вида $g(B)$ попарно пересекаются. Тогда и все подконтинуумы (см. лемму 3.4) вида $g(B \cup \{r\})$ попарно пересекаются. Пересечение всех этих подконтинуумов есть подконтинуум (лемма 3.1), который, очевидно, G-инвариантен и не совпадает с D (поскольку предполагается, что ветвь B невырождена). Существование такого подконтинуума противоречит предположению о квазиминимальности действия.

$4_=$. Покажем, что $\exists d \in G : B \cup d(B) = D$.

Если такого d не существует, то по лемме 3.5 любые две ветви из орбиты ветви B либо не пересекаются, либо вложены одна в другую. Тогда пересечение дополнений всех этих ветвей образует G-инвариантный (так как рассматривается вся орбита ветви) подконтинуум (см. леммы 3.1 и 3.4). Существование такого подконтинуума противоречит предположению о квазиминимальности действия.

Теперь рассмотрим случай $B \neq E$.

Поскольку одно из утверждений 1, 2, 3, 4 выполняется в силу леммы 3.5, нам достаточно доказать их равносильность. Достаточно показать, например, что $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 3$. Пусть $E \subsetneq a(B)$. В силу $3_=$ имеется $t \in G$ такой, что $B \cap t(B) = \varnothing$, так что $aB \cap at(B) = \varnothing$. При этих условиях имеем $E \cap at(B) = \varnothing$.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть $E \cap c(B) = \varnothing$. В силу $4_=$ имеется $t \in G$ такой, что $B \cup t(B) = D$, так что $c(B) \cup ct(B) = D$. Кроме того, в силу $1_=$ найдется $s \in G$ такой, что $ct(B) \subsetneq s(B)$. При этих условиях имеем $E \subsetneq s(B)$.

Схожим образом получаем $2 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$. $\square$

§5. Схемы доказательств основных результатов

Схема доказательства теоремы 2.1. Предположим, что у действия не имеется орбит мощности $\leqslant 2$ (так что все орбиты, по лемме 3.2, бесконечны), и покажем, что в этом случае G содержит свободную неабелеву подгруппу. В силу леммы 3.3, в исходном дендроне D имеется единственный квазиминимальный подконтинуум K. По построению, действие G на K не имеет конечных орбит и квазиминимально. Отсюда легко следует, что в K найдется четверка попарно непересекающихся ветвей U_1, U_2, U_3, U_4. В силу леммы 4.1 найдутся такие элементы g и h в G, что $g(K \setminus U_1) \subset U_2$ и $h(K \setminus U_3) \subset U_4$. Поскольку $g(U_2) \subsetneq U_2$ и $h(U_4) \subsetneq U_4$, элементы g и h имеют бесконечный порядок. Обозначив $A := U_1 \cup U_2$ и $B := U_3 \cup U_4$, получаем, что $g^{\pm 1}(B) \subset A$ и $h^{\pm 1}(A) \subset B$. Из этого вытекает, что g и h порождают свободную неабелеву подгруппу (см., например, [17, глава III, §12], а также [19, замечание 6(2)]; это – так называемая пинг-понг лемма Клейна). □

Схема доказательства теоремы 2.3. Предположим, что у действия не имеется орбит мощности $\leqslant 2$ (так что все орбиты, по лемме 3.2, бесконечны), и покажем, что в этом случае действие сильно проксимально. В силу леммы 3.3, в D имеется единственный квазиминимальный подконтинуум. Обозначим этот подконтинуум через K, а множество его неконцевых точек – через K_0.

Пусть μ – произвольная мера из $\mathcal{P}(D)$.

5.1. Утверждение. *В дендроне D найдется последовательность ветвей B_i, $i \in \mathbb{N}$, у которой $\mu(B_i) \geqslant 1 - 1/i$ при всех $i \in \mathbb{N}$, а источники всех ветвей B_i лежат в K_0.*

(Для доказательства утверждения 5.1 можно взять счетный набор $\mathcal{V}$ дизъюнктных ветвей в D с источниками в K_0. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ в $\mathcal{V}$ найдется ветвь V_i с $\mu(V_i) < 1/i$. В качестве B_i нужно выбрать ветвь с источником в $V_i \cap K_0$ и такую, что $V_i \cup B_i = D$.)

5.2. Утверждение. *В дендроне D найдется сеть ветвей E_α, $\alpha \in A$, сходящаяся к некоторой точке $x \in D$ и такая, что источники всех ветвей E_α лежат в K_0.*

(Для доказательства утверждения 5.2 возьмем произвольную концевую точку $x \in K \setminus K_0$ подконтинуума K и некоторую точку $y \in K \setminus \{x\}$. Из того, что на дендроне K имеется квазиминимальное действие некоторой группы, следует, что множество точек степени $\geqslant 3$ на соединяющей точки y и x дуге $[y, x]$ непусто, бесконечно, и может быть организовано в сеть r_α, сходящуюся к x. В качестве E_α можно выбрать любую из тех ветвей с источником r_α, которые не содержат ни x, ни y. Заметим, что в случае, когда точка x является концевой и для дендрона D, в качестве E_α можно выбрать ту ветвь с источником r_α, которая содержит x.)

Пусть B_i и E_α – последовательность и сеть, соответственно, удовлетворяющие требованиям утверждений 5.1 и 5.2. В силу леммы 4.1

для произвольных i и α найдется элемент $g_{i\alpha}$ такой, что $g_{i\alpha}(B_i \cap K) \subset E_\alpha \cap K$. При этом, как нетрудно убедиться,

$$g_{i\alpha}(B_i) \subset E_\alpha.$$

Рассмотрим направленное множество $\mathbb{N} \times A$ с порядком

$$(i, \alpha) \leqslant (j, \beta) \ \Leftrightarrow\ (i \leqslant j) \wedge (\alpha \leqslant_A \beta).$$

Ясно, что для сети $g_{i\alpha}$ над $\mathbb{N} \times A$ имеем $\lim g_{i\alpha}(\mu) = \delta_x$, что и завершает доказательство теоремы. □

Благодарности. Я сердечно благодарен Алексею Осипову за высказанные им ценные замечания к предварительному варианту заметки.

Литература

1. S. A. Adeleke, P. M. Neumann, *Relations related to betweenness: their structure and automorphisms*. Memoirs Amer. Math. Soc. **623**, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.
2. Д. В. Аносов, *О вкладе Н. Н. Боголюбова в теорию динамических систем.* — УМН **49**, No. 5(299) (1994), 5–20.
3. J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*. North-Holland Math. Stud., 153, North-Holland, 1988.
4. П. де ля Арп, Р. И. Григорчук, Т. Чекерини-Сильберстайн, *Аменабельность и парадоксальные разбиения для псевдогрупп и дискретных метрических пространств.* В кн.: Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, 224, Наука, М., 1999, сс. 68–111.
5. М. М. Боголюбов, *Про деякі ергодичні властивості суцільних групп претворень.* — Наукві записки КДУ ім. Т. Г. Шевченко. Фізико-матем. збірник **4**, No. 3 (1939), 45–53.
6. В. В. Беняш-Кривец, Хуа Сюин, *Группы с периодическими попарными соотношениями.* РИВШ, Минск, 2010.
7. B. H. Bowditch, *Treelike structures arising from continua and convergence groups*. Memoirs Amer. Math. Soc. **662**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
8. B. H. Bowditch, J. Crisp, *Archimedean actions on median pretrees.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **130** (2001), 383–400.
9. J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Dendrites.* — Aportaciones Mat. Comun. **22** (1998), 227–253.
10. I. M. Chiswell, *Introduction to Λ-trees*. World Scientific Publishing Co., 2001.
11. M. Culler, J. Morgan, *Group actions on $\mathbb{R}$-trees.* — Proc. London Math. Soc. **55**, No. 3 (1987), 571–604.

12. T. Giordano, P. de la Harpe, *Moyennabilité des groupes dénombrables et actions sur les espaces de Cantor.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **324**, No. 11 (1997), 1255–1258.
13. S. Glasner, *Topological dynamics and group theory.* — Trans. Amer. Math. Soc., **187** (1974), 327–334.
14. S. Glasner, *Compressibility properties in topological dynamics.* — Am. J. Math. **97** (1975), 148–171.
15. S. Glasner, *Proximal flows.* Lect. Notes Math. **517**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.
16. N. Kopteva, G. Williams, *The Tits alternative for non-spherical Pride groups.* — Bull. Lond. Math. Soc. **40**, No. 1 (2008), 57–64.
17. R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial group theory.* Springer-Verlag, Berlin ect., 1977.
18. А. В. Малютин, *Преддеревья и топология теней.* Препринт ПОМИ 23 (2012).
19. А. В. Малютин, *Классификация действий групп на прямой и окружности.* — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 156–182.
20. G. A. Margulis, *Free subgroups of the homeomorphism group of the circle.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **331**, No. 9 (2000), 669–674.
21. J. C. Mayer, J. Nikiel, L. G. Oversteegen, *Universal spaces for* $\mathbb{R}$*-trees.* — Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 411–432.
22. J. van Mill, E. Wattel, *Dendrons.* In: “Topology and order structures”, Part 1, Math. Centre Tracts, vol. **142**, Math. Centrum, Amsterdam, 1981, pp. 59–81.
23. T. B. Muenzenberger, R. E. Smithson, L. E. Ward, Jr., *Characterizations of arboroids and dendritic spaces.* — Pacific J. Math. **102** (1982), 107–121.
24. J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses.* — Fund. Math. **13** (1929), 73–116.
25. А. Ю. Ольшанский, *К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе.* — УМН, **35**, No. 4(214) (1980), 199–200.
26. A. Yu. Ol’shanskii, M. V. Sapir, *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups.* — Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **96** (2002) (2003), 43–169.
27. I. Pays, A. Valette, *Sous-groupes libres dans les groupes d’automorphismes d’arbres.* — Enseign. Math. **37** (1991), 151–174.
28. J.-P. Serre, *Trees.* Springer, New York, 1980.
29. E. Shi, S. Wang, L. Zhou, *Minimal group actions on dendrites.* — Proc. Amer. Math. Soc. **138**, No. 1 (2010), 217–223.
30. L. E. Ward, Jr., *On dendritic sets.* — Duke Math J., **25** (1958), 505–513.
31. L. E. Ward, Jr., *Axioms for cutpoints.* In: General Topology and Modern Analysis (Proc. Conf., Univ. California, Riverside, Calif., 1980), Academic Press, New York, 1981, pp. 327–336.

Malyutin A. V. Groups acting on dendrons.

A dendron is a continuum (a non-empty connected compact Hausdorff space) in which every two distinct points have a separation point. We prove that if a group G acts on a dendron D by homeomorphisms, then either D

contains a G-invariant subset consisting of one or two points, or G contains a free non-commutative subgroup and, furthermore, the action is strongly proximal.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru

Поступило 6 мая 2013 г.