Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев, И. В. Макеев

О ЛИНЕЙНЫХ ФРОНТАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Выпуклым многогранником мы называем пересечение конечного числа замкнутых полупространств евклидова пространства, которое ограничено и имеет непустую внутренность.

Пусть каждая из гиперплоскостей граней старшей размерности многогранника в $\mathbb{R}^n$ параллельно перемещается внутрь многогранника с постоянной неотрицательной скоростью, причём не все скорости нулевые. В каждый момент времени граница уменьшающегося многогранника называется линейным фронтом. В результате исходный многогранник оказывается разбитым на регионы – части, заметаемые гранями старшей размерности в процессе распространения линейного фронта. Легко видеть, что эти регионы – выпуклые многогранники, которые зависят лишь от отношения скоростей граней.

Пусть многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ имеет m граней старшей размерности, обозначаемых через $f_1, \dots, f_m$, пусть v_i – скорость грани f_i, а $\operatorname{reg}(f_i)$ – регион, ею заметаемый. В [1] доказано, что при $n = 2$ для любого упорядоченного набора из m неотрицательных, одновременно не обращающихся в 0 чисел существует такой набор скоростей сторон заданного многоугольника M, что набор площадей регионов $(S(\operatorname{reg}(f_i)), \dots, S(\operatorname{reg}(f_m)))$ пропорционален выбранному набору чисел. Доказательства в [1] основаны на вариационных соображениях. Ниже топологическими средствами мы получаем в $\mathbb{R}^n$ значительно более общее утверждение, для доказательства которого вариационные соображения не пригодны.

Теорема. *Пусть F – неотрицательный непрерывный относительно метрики Хаусдорфа функционал на компактных выпуклых подмножествах $\mathbb{R}^n$, причём $F(K) = 0$ если и только если $\dim(K) < n$. Тогда для любого упорядоченного набора из m неотрицательных, одновременно не обращающихся в 0 чисел существует такой набор скоростей граней многогранника M с m гранями старшей размерности,*

Ключевые слова: линейный фронт, выпуклый многогранник, взвешенный скелет.

что набор чисел $(F(\mathrm{reg}(f_1)), \ldots, F(\mathrm{reg}(f_m)))$ *пропорционален выбранному набору чисел.*

Доказательство. Определим непрерывное отображение в себя стандартного симплекса в $\mathbb{R}^m$, заданного ограничениями $x_1 + \cdots + x_m = 1$ и $x_i \geqslant 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Для точки симплекса с координатами $(x_1, \ldots, x_m)$ рассмотрим равномерное параллельное перемещение гиперплоскостей граней старшей размерности многогранника M, при котором гиперплоскость грани f_i движется внутрь многогранника со скоростью x_i. Образом точки $(x_1, \ldots, x_m)$ мы полагаем точку

$$(F(\mathrm{reg}(f_1))/s, \ldots, F(\mathrm{reg}(f_m))/s),$$

где $s = F(\mathrm{reg}(f_1)) + \cdots + F(\mathrm{reg}(f_m))$.

Ясно, что если некоторая координата точки симплекса нулевая, то она нулевая и у её образа, так как соответствующая гиперплоскость грани симплекса неподвижна. Из сказанного следует, что рассматриваемое отображение переводит каждую грань симплекса в себя. Очевидно, что в процессе линейной гомотопии, соединяющей построенное отображение с тождественным, граница симплекса всегда переходит в границу. Следовательно, сужение отображения на границу симплекса имеет степень 1, а значит отображение сюръективно. Теорема доказана. □

Замечание. Имеется много естественных с геометрической точки зрения функционалов F (кроме вышеуказанного объёма): наименьшая ширина, наибольший объём шара или эллипсоида, содержащегося в выпуклом компакте, разность площади поверхности и удвоенной максимальной площади гиперплоской ортогональной проекции и т.д.

Литература

1. F. Aurenhammer, *Weighted skeletons and fixed-share decomposition.* — Comput. Geom. **40** (2008), 93–101.

Makeev V. V., Makeev I. V. On linear wavefronts of convex polyhedra.

By a convex polyhedron we mean the intersection of a finite number of closed half-spaces in a Euclidean space whenever this intersection is bounded and has non-empty interior.

Let each hyperplane of the hyperfaces $f_1, \ldots, f_m$ of a polyhedron M in $\mathbb{R}^n$ move inwards M in a self-parallel fashion at a non-negative constant

speed (we assume that at least one face has non-zero speed). We thus obtain a "shrinking" polyhedron. Let $\mathrm{reg}(f_1), \dots, \mathrm{reg}(f_m)$ be the parts of M (with disjoint interiors) that the faces $f_1, \dots, f_m$ sweep during the "shrinking" process.

The main result is as follows. Let F be a functional on the class of convex compact subsets in $\mathbb{R}^n$. We assume that F is nonnegative and continuous (with respect to the Hausdorff metric), and, furthermore, $F(K) = 0$ if and only if $\dim(K) < n$. Then for every m-tuple $(x_1, \dots, x_m)$ of nonnegative reals with non-zero sum there exists an m-tuple of "speeds" for the faces $f_1, \dots, f_m$ such that the m-tuple $(F(\mathrm{reg}(f_1)), \dots, F(\mathrm{reg}(f_m)))$ is proportional to $(x_1, \dots, x_m)$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 29 декабря 2012 г.

СПбГУ ИТМО,
Кронверкский пр. 49, лит. А,
197101 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: miv57@inbox.ru