Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев

ТРЕУГОЛЬНЫЕ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЕ ПИРАМИДЫ В ТРЕХМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. Треугольные пирамиды в нормированном пространстве

Верно ли, что множество вершин любого евклидова тетраэдра можно изометрически вложить во всякое трехмерное вещественное нормированное пространство? В [1] доказано, что во всякое трехмерное вещественное нормированное пространство можно изометрически вложить множество вершин любого правильного евклидова тетраэдра, а в [2] этот результат обобщен на произвольные правильные треугольные евклидовы пирамиды (и еще на некоторые пирамиды весьма специального вида). Нижеследующая теорема усиливает основной результат [1].

Теорема 1. *Во всякое трёхмерное вещественное нормированное пространство можно изометрически вложить множество вершин любого евклидова тетраэдра, отношение длин у каждой пары ребер которого* $\geqslant (\sqrt{8/3}+1)/3 < 0,878$.

Нам понадобится следующая простая

Лемма 1 ([2]). *Пусть точки A и B двумерного нормированного пространства E со строго выпуклым кругом таковы, что $|AB| = c$. Найдутся ровно две такие точки C из E (непрерывно зависящие от A, B, a и b), что $|AC| = b$ и $|BC| = a$, где a, b и c – длины сторон некоторого евклидова треугольника.*

Доказательство. Существование вышеуказанных точек следует из простых соображений непрерывности. Расположив точку C на прямой AB на расстоянии b от точки A и повернув отрезок CA на угол

Ключевые слова: треугольная пирамида, четырехугольная пирамида, нормированное пространство.

π вокруг точки A, мы убеждаемся в том, что BC принимает все значения от $|b-c|$ до $b+c$. Таким образом, в каждой полуплоскости в E относительно прямой AB имеется искомая тока C.

Докажем от противного единственность искомой точки C в каждой из ограниченных прямой AB полуплоскостей. Пусть точки C и C_1 из одной относительно прямой AB полуплоскости обладают требуемым свойством. Отложим от точки B отрезки BC' и BC_1', равные по длине и сонаправленные с отрезками AC и AC_1 соответственно. Тогда CC_1 и $C'C_1'$ – параллельные и равные по длине хорды двух концентрических кругов в E, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB, видные из центра кругов под углами, ни один из которых не содержится в другом, чего не может быть. Непрерывная зависимость вершины C от A, B, a и b следует из ее существования и единственности. □

В [3] доказано, что каждое трехмерное нормированное пространство содержит плоскость (которую мы всюду в дальнейшем обозначаем буквой P), единичный круг которой содержит некоторый эллипс E_1 и содержится в гомотетичном ему эллипсе E_2 с тем же центром и коэффициентом гомотетии $\leqslant 2/\sqrt{3}$.

Лемма 2. *Если в вышеописанной плоскости P точка A принадлежит треугольнику BCD и при этом длины отрезков AB, BC, AD и DC не превосходят 1, то длина одного из них или отрезка AC не превосходит числа $(\sqrt{8/3}+1)/3$.*

Доказательство. Продолжим отрезок CA до пересечения с BD в точке E и обозначим буквой F середину отрезка BD (рис. 1). Пусть $|AB| = k$, $|AD| = l$, $|AC| = m$, $|AE| = n$ и пусть для определенности $l \geqslant k$. Из неравенства треугольника следует, что $|BD| > k + l - 2n$, также очевидно, что $|EF| \leqslant n + (l-k)/2$, следовательно

$$|CF| \geqslant m + n - |EF| \geqslant m - (l-k)/2.$$

Ясно, что треугольник BCD содержится в единичном круге с центром в его вершине C и две его вершины вместе с двумя вершинами симметричного ему относительно точки C треугольника B_1CD_1 являются вершинами содержащегося в единичном круге параллелограмма BDB_1D_1, периметр которого составляет по меньшей мере

$$\begin{aligned} 2(k+l-2n) + 4(m-(l-k)/2) &= 4k + 4m - 4n \\ &\geqslant 4k + 4m - 4(1-m) = 4k + 8m - 4. \end{aligned}$$

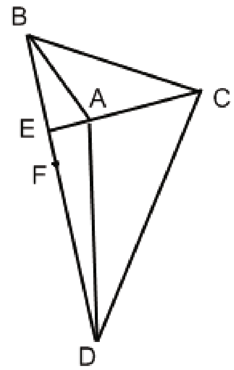

Рис. 1

Периметр содержащегося в единичном круге в плоскости P параллелограмма не менее периметра этого параллелограмма, измеренного относительно нормы в P с единичным кругом-эллипсом E_1. Очевидно, что наибольший периметр среди содержащихся в эллипсе E_2 параллелограммов относительно нормы с единичным кругом E_1 имеет тот, который переходит во вписанный квадрат посредством переводящего эллипс в круг аффинного преобразования. Этот периметр равен $8\sqrt{2/3}$, откуда вытекает неравенство $4k + 8m - 4 \leqslant 8\sqrt{2/3}$, тем более $12x - 4 \leqslant 8\sqrt{2/3}$, где x – длина наименьшего из указанных в лемме отрезков, откуда и получается требуемое неравенство. $\square$

Следствие 1. *Если длины всех сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника на плоскости P не превосходят 1, то длина одного из этих отрезков не превосходит числа $(\sqrt{8/3} + 1)/3$.*

Доказательство. Рассмотрим такую сторону AB четырехугольника, что продолжения смежных с ней сторон BC и AD не пересекаются по ту сторону относительно прямой AB, где расположен четырехугольник $ABCD$ (этим свойством обладает хотя бы одна сторона из каждой пары противоположных сторон четырехугольника). Достроив

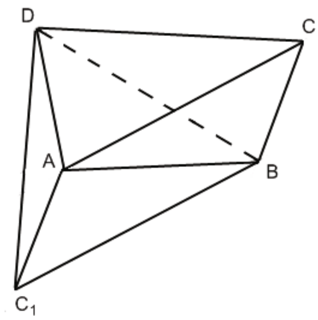

Рис. 2

треугольник ABC до параллелограмма $ACBC_1$ (рис. 2), мы попадаем в условия леммы 2, где точка A принадлежит треугольнику DBC_1. $\square$

Доказательство теоремы 1. Докажем теорему 1 в случае строго неравенства в ее условии и для пространства со строго выпуклым шаром. В остальных случаях теорема доказывается предельным переходом.

Подвергнув тетраэдр $ABCD$ гомотетии, мы считаем в дальнейшем, что длина наибольшего из его ребер равна 1, а кратчайшее ребро, которое обозначим через AB, имеет, следовательно, длину

$$> (\sqrt{8/3} + 1)/3.$$

Реализуем (согласно лемме 1) треугольники ABC и ABD в плоскости P так, чтобы вершины C и D лежали по разные стороны относительно прямой AB, и покажем, что $|CD| > 1$. Если четырехугольник $ACBD$ выпуклый, то сумма длин его диагоналей $|AB| + |CD|$ по неравенству треугольника не меньше суммы длин любых двух его противоположных сторон, а так как AB – самое короткое ребро, то отрезок CD не короче остальных пяти сторон треугольников, а значит (по следствию из леммы 2) его длина > 1. Если отрезок CD пересекает лишь продолжение AB, и, например, точка A принадлежит треугольнику BCD, то мы попадаем в условие леммы 2, что противоречит сделанным предположениям о длинах ребер тетраэдра $ABCD$.

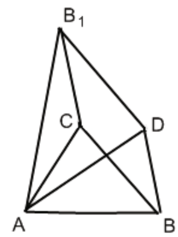

Рис. 3

Реализуем теперь (согласно лемме 1) треугольник ABD в плоскости P так, чтобы вершины C и D лежали по одну сторону относительно прямой AB (рис. 3), и покажем, что $|CD| < |AB|$. Согласно следствию из леммы 2 альтернативой этому неравенству является неравенство $|CD| > 1$. Докажем методом от противного, что последнее неравенство невозможно.

Если $|CD| > 1$, то прямые AC и BD не могут пересекаться по ту сторону от прямой AB, где лежат треугольники ABC и ABD. В противном случае достроим треугольник CBD до параллелограмма $CBDB_1$ (рис. 3). Так как точка C принадлежит треугольнику ADB_1, то $|CD| \leqslant \max(|AD|, |DB_1|)$. Противоречие.

Таким образом, прямые AC и BD могут пересекаться лишь по ту сторону от прямой AB, где не лежат треугольники ABC и ABD. Как и выше, достроив треугольник ABC до параллелограмма $ACBC_1$ (рис. 2), мы попадаем в условия леммы 2, где точка A принадлежит треугольнику DBC_1. Противоречие.

Реализуем треугольники ABC и ABD в плоскости P так, чтобы вершины C и D лежали по разные стороны относительно прямой AB и непрерывно повернем полуплоскость, содержащую треугольник ABD, вокруг прямой AB на развернутый угол, реализовав в ней во всех промежуточных положениях треугольник ABD. Выше мы доказали, что в начальный момент $|CD| > 1$, а в конечном положении $|CD| < |AB|$.

Значит, по соображениям непрерывности, в промежуточных положениях $|CD|$ принимает все значения из интервала $(|AB|, 1)$. Теорема 1 доказана. $\square$

Замечания. 1. Из доказательства видно, что если пространство содержит двумерную евклидову плоскость P, то в него можно изометрически вложить множество вершин любого евклидова тетраэдра. Действительно, при вышеописанном повороте полуплоскости из P длины отрезков $|CD|$ принимают все возможные значения длины ребра евклидова тетраэдра с гранями ABC и ABD.

2. Автору не известно, существует ли такое натуральное N, что для натурального $n > N$ во всякое вещественное нормированное n-мерное пространство можно изометрически вложить множество вершин любого евклидова тетраэдра.

§2. Четырёхугольные пирамиды в нормированном пространстве

Автору не известно, можно ли множество вершин всякой правильной евклидовой четырёхугольной пирамиды изометрически вложить во всякое трёхмерное нормированное пространство. Ниже мы приводим один результат в этом направлении. Мы будем называть "квадратом" в нормированном пространстве параллелограмм с равными сторонами и равными диагоналями. В [2] доказано, что во всяком трёхмерном нормированном пространстве существует четырёхугольная пирамида с "квадратом" в качестве основания, расположенном в заранее заданной плоскости P пространства, боковыми рёбрами равной длины и заранее заданным отношением > 1 длины бокового ребра к длине ребра основания, вершина которой расположена в заранее заданном полупространстве относительно плоскости P.

Теорема 2. *Пусть задано число $x > \sqrt{2/3}$, и пусть E – трёхмерное нормированное пространство. Тогда в E существует аффинный образ правильной четырёхугольной пирамиды, у которого боковые рёбра равны по длине, стороны основания равны по длине, а также диагонали основания равны по длине, причем отношение длины бокового ребра к длине ребра основания равно x.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для случая, когда единичный шар $B \subset E$ является гладким строго выпуклым телом.

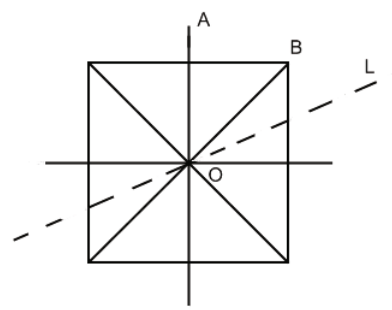

Рис. 4

Этот случай и рассматривается в дальнейшем. В остальных случаях теорема получается предельным переходом. Шнирельман [4] доказал, что во всякую регулярную плоскую жорданову кривую вписан квадрат. В [5] этот результат перенесён автором на "квадраты" на нормированной плоскости. Из [4] и [5] также следует, что таких "квадратов" для типичной кривой (то есть для открытого плотного в C^2-топологии множества кривых) имеется нечётное число, чем мы и воспользуемся ниже. Также нам понадобится

Лемма 3. *Отношение диагонали квадрата в плоскости P к его стороне не превосходит $\sqrt{8/3}$.*

Доказательство леммы. На рис. 4 изображен вписанный в единичный круг в плоскости P квадрат с тем же центром симметрии O, через который и середины сторон квадрата проведены лучи до пересечения с границей круга. Мы считаем, что рис. 4 уже подвергнут такому аффинному преобразованию, которое превратило изображенный вписанный квадрат в стандартный евклидов.

Определенные в §1 гомотетичные эллипсы E_1 и E_2 в плоскости P также имеют общий центр в точке O. Докажем, что $|OB|/|OA| \leqslant 2/\sqrt{3}$. На рис. 4 четыре исходящие из точки O отрезка имеют длину $|OA|$, а четыре отрезка, соединяющие точку O с вершинами нарисованного квадрата, имеют длину, равную $|OB|$. Подвергнем рис. 4 сжатию к некоторой проходящей через точку O оси L, переводящему гомотетичные эллипсы E_1 и E_2 в гомотетичные круги. Заметим, что радиус большего круга $\geqslant x$, где x – длина наибольшего из образов равных по длине $|OB|$ отрезков, а радиус меньшего круга $\leqslant y$, где y – длина наименьшего из образов равных по длине $|OA|$ отрезков. Значит, $x/y \leqslant 2/\sqrt{3}$, и тем более $|OB|/|OA| \leqslant 2/\sqrt{3}$, так как очевидно, что до сжатия один из отрезков длины $|OB|$ составлял с осью L (не больший прямого) угол, не больший, чем один из отрезков длины $|OA|$, и отношение длин их образов не уменьшилось. Длина диагонали вписанного квадрата равна 2 (относительно нормы), а из доказанного неравенства следует, что длина стороны квадрата не меньше, чем $\sqrt{3/2}$, что и доказывает лемму 3. $\square$

Возвращаясь к доказательству теоремы 2, рассмотрим центральное сечение шара $B \subset E$ плоскостью $P_1 \parallel P$ и параллельную P_1 опорную плоскость P_2 к шару B. Рассмотрим всевозможные пирамиды с вершинами в центре шара B, основания которых – "квадраты", вписанные в сечения $B \cap P_3$, где P_3 – параллельная P_1 и P_2 и расположенная между ними плоскость. Очевидно, что отношение длины бокового ребра к длине ребра основания для таких пирамид стремится к бесконечности, если плоскость их основания приближается к P_2 и становится по лемме 3 меньше заданного $x > \sqrt{2/3}$ при приближении их плоскости основания к P_1, так как в последнем случае пирамида вырождается в "квадрат", а вершина переходит в его центр. В ситуации общего положения множества M оснований рассматриваемых пирамид в параллельных P_1 и расположенных между P_1 и P_3 сечениях плоскостями P_4 шара B является одномерным гладким подмногообразием многообразия "квадратов", лежащих в параллельных P плоскостях, края которого – "квадраты", вписанные в $B \cap P_3$ и $B \cap P_1$. Так как в типичное сечение $B \cap P_4$ вписано нечётное число указанных квадратов, то M содержит связную компоненту M_1 – отрезок, один из концов которого – "квадрат", вписанный в $B \cap P_1$, а другой – в $B \cap P_3$. Поэтому, по соображениям непрерывности, если P_3 достаточно близка к P_2, то для некоторой из рассматриваемых пирамид с основанием из M_1 отношение длины бокового ребра к длине ребра основания равно x, что и завершает доказательство теоремы 2 в ситуации общего положения. В остальных случаях теорема доказывается предельным переходом. $\square$

Литература

1. C. Petty, *Equilateral sets in Minkovski spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 369–374.
2. В. В. Макеев, *О пирамидах в трехмерном нормированном пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 132–138.
3. В. В. Макеев, *Плоские сечения выпуклых тел и универсальные расслоения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2001), 219–233.
4. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук **10** (1944), 34–44.
5. В. В. Макеев, *Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклых компактов. II.* — Алгебра и анализ **13**, No. 5 (2001), 110–134.

Makeev V. V. Triangular and quadrangular pyramids in a three-dimensional normed space.

The main results are as follows.

Every three-dimensional real normed space contains an isometrically embedded set of vertices of a Euclidean tetrahedron whenever the ratio of lengths for each pair of edges of the tetrahedron is $\geq (\sqrt{8/3}+1)/3 < 0.878$.

Every three-dimensional normed space contains an affine image of a regular quadrangular pyramid having lateral edges of equal length, base edges of equal length, and base diagonals of equal length, having a predetermined ratio $> \sqrt{2/3}$ of the length of the lateral edge to the length of the base edge.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 31 декабря 2012 г.