Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев, М. Ю. Звагельский

ОБ АФФИННЫХ ДИАМЕТРАХ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Под выпуклым телом мы понимаем компактное выпуклое подмножество евклидова пространства, обладающее непустой внутренностью. Аффинный диаметр есть отрезок выпуклого тела с концами в параллельных опорных плоскостях.

Хорошо известно, что строго выпуклое тело имеет ровно один диаметр любого наперёд заданного направления, который от этого направления зависит непрерывно.

Аффинные диаметры выпуклого тела имеют много взаимных пересечений. Некоторые результаты и задачи об аффинных диаметрах сформулированы в [1, с. 42].

В [2] доказано, что у трёхмерного выпуклого тела найдется три взаимно перпендикулярных аффинных диаметра, пересекающихся в одной точке. Прямого переноса в старшие размерности данное утверждение не допускает. В [3] доказано, что у выпуклого тела в $\mathbb{R}^4$ найдется четыре взаимно перпендикулярных аффинных диаметра, один из которых пересекает три остальных. В [4] доказано, что для любого аффинного диаметра выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ найдется пара пересекающих его аффинных диаметров, составляющих между собой наперед заданный угол. В [5] имеется обзор работ, посвящённых аффинным диаметрам выпуклого тела.

Теорема 1. *У выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ имеются такие n взаимно перпендикулярных аффинных диаметров $d_1, \dots, d_n$, что можно каждый из диаметров сдвинуть на линейную комбинацию направляющих векторов диаметров с меньшими номерами так, что их образы будут пересекаться в их общей середине.*

Для доказательства нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Далее $F(\mathbb{R}^n)$ обозначает многообразие флагов $(L_1, \dots, L_{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$, где $L_1 \subset \dots \subset L_{n-1}$ и $\dim L_i = i$.

Ключевые слова: выпуклое тело, аффинный диаметр, флаг, векторное расслоение.

Лемма 1. *Если каждому флагу из $F(\mathbb{R}^n)$ сопоставлен упорядоченный набор из n точек в $\mathbb{R}^n$, непрерывно зависящий от этого флага, то найдётся такой флаг $(L_1, \dots, L_{n-1})$, что у сопоставленного ему набора точек $(A_1, \dots, A_n)$ вектор $\overline{A_1A_{i+1}}$ параллелен L_i для $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Доказательство. Сопоставив каждому флагу $(L_1, \dots, L_{n-1})$ набор проекций векторов $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_1A_n}$ в ортогональные дополнения $L_1^{\perp}$, …, $L_{n-1}^{\perp}$ к пространствам L_1, …, L_{n-1}) соответственно, мы получаем сечение суммы Уитни $n-1$ векторных расслоений над $F(\mathbb{R}^n)$, где в расслоении с номером i слоем над флагом $(L_1, \dots, L_{n-1})$ является ортогональное дополнение к пространству L_i.

Нам достаточно доказать, что всякое сечение указанной суммы Уитни векторных расслоений пересекается с нулевым. Для этого мы предъявим гладкое сечение этого расслоения, имеющее ровно один невырожденный ноль.

Сопоставим всем флагам из $F(\mathbb{R}^n)$ такой (один и тот же) набор точек $A_1, \dots, A_n$, что векторы $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_1A_n}$ линейно независимы. У индуцированного этим набором сечения нуль будет лишь над флагом $(L_1, \dots, L_{n-1})$, где пространство L_i есть линейная оболочка векторов $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_1A_{i+1}}$, и этот ноль – невырожденный. Лемма доказана. □

Между рассматриваемыми флагами и упорядоченными наборами из n попарно ортогональных и проходящих через нуль в $\mathbb{R}^n$ прямых $(l_1, \dots, l_n)$ имеется биективное соответствие: набору прямых $(l_1, \dots, l_n)$ сопоставим флаг $(L_1, \dots, L_{n-1})$, где L_i – аффинная оболочка $(l_1, \dots, l_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. С учётом доказанной леммы получается следствие.

Утверждение 1. *Пусть задано непрерывное отображение f многообразия Грассмана проходящих через фиксированную точку прямых в $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда среди вышеуказанных имеются такие n взаимно перпендикулярных прямых $l_1, \dots, l_n$ с направляющими векторами $e_1, \dots, e_n$ соответственно, что можно каждую из точек $f(l_1)$, …, $f(l_n)$ сдвинуть на линейную комбинацию направляющих векторов прямых с меньшими номерами так, что они совпадут.*

Доказательство теоремы 1. Для строго выпуклых тел достаточно применить утверждение 1 к отображению f, сопоставляющему прямой середину параллельного ей аффинного диаметра тела. В остальных случаях доказательство получаем предельным переходом, приближая выпуклые тела строго выпуклыми. □

Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М., 1971.
2. В. В. Макеев, *Специальные конфигурации плоскостей, связанные с выпуклым компактом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 165–174.
3. В. В. Макеев, *Об аффинных диаметрах и хордах выпуклых компактов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **299** (2003), 252–261.
4. В. В. Макеев, *О пересечениях аффинных диаметров выпуклого тела.* — Укр. геом. сб. **33** (1990), 70–73.
5. V. P. Soltan, *Affine diameters of convex bodies.* — Survey Exp. Math. **23**, No. 1 (2005), 47–63.

Makeev V. V., Zvagel'skii M. Yu. On affine diameters of a convex body.

It is proved that any convex body in $\mathbb{R}^n$ has n mutually orthogonal affine diameters $d_1, \ldots, d_n$ such that it is possible to shift each of them through a linear combination of direction vectors of the diameters with smaller numbers so that their translates will intersect at their common middle point.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: mvv57@inbox.ru

E-mail: mikhailzvagelsky@gmail.com

Поступило 31 декабря 2012 г.