Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев

О РЕШЁТЧАТЫХ УПАКОВКАХ ЗЕРКАЛЬНО ИЛИ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ВЫПУКЛОГО ТРЁХМЕРНОГО ТЕЛА

§1. О решётчатых упаковках зеркально–симметричного выпуклого трёхмерного тела

Под *выпуклым телом* K в $\mathbb{R}^n$ мы понимаем компактное выпуклое подмножество евклидова пространства с непустой внутренностью, а $V(K)$ означает его объём ($S(K)$ – площадь при $n = 2$). *Решётчатым расположением* подмножества A в $\mathbb{R}^n$ называем объединение его образов при сдвиге на векторы некоторой решётки – целочисленные линейные комбинации линейно независимых векторов $a_1, \dots, a_k$. Решётчатое расположение тел называется *упаковкой*, если тела не имеют общих внутренних точек.

Теорема 1. *Всякое трёхмерное зеркально-симметричное выпуклое тело допускает решётчатую упаковку плотности $\geqslant 8/27$, причём два базисных вектора у порождающей упаковку решётки векторов можно выбрать параллельными плоскости симметрии тела.*

Для доказательства нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, которые также будут полезны в случае центрально-симметричного выпуклого тела.

Лемма 1. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы два решётчатых расположения множеств A и B, построенных с помощью одинаковой векторной решётки, и разностное множество $A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$ измеримо, а его объём не превосходит объёма фундаментальной области решётки. Тогда можно так сдвинуть одно из решётчатых расположений, что множества из различных решётчатых расположений не будут иметь общих внутренних точек.*

Ключевые слова: решётчатая упаковка, плотность, выпуклое тело, центрально-симметричное тело, шварцевское округление.

Доказательство. Всевозможные разностные множества вида $A_i - B_j$, где A_i и B_j берутся из решётчатых расположений множеств A и B соответственно, сами образуют решётчатое расположение разностного множества $A - B$, построенного с помощью той же решётки. В силу условия на объём разностного множества, внутренности их образов не могут покрывать всё пространство, и искомый сдвиг можно осуществить на радиус-вектор точки, не покрытой внутренностями разностных множества. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано решётчатое расположение выпуклого тела K, причём объём фундаментальной области решётки составляет по меньшей мере $C_{2n}^n V(K)$. Тогда существует такой сдвиг указанного решётчатого расположения, что тела исходного расположения и расположения-образа не имеют общих внутренних точек.*

Для доказательства достаточно применить лемму 1 с учётом неравенства Роджерса–Шефарда $V(K-K) \leqslant C_{2n}^n V(K)$ ([1], гл. 2).

Лемма 3. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы решётчатые расположения выпуклого тела K и симметричного ему тела $-K$, построенные с помощью одной и той же решётки, с объёмом фундаментальной области не менее $2^n V(K)$. Тогда существует такой сдвиг одного из указанных решётчатых расположений, что тела из различных решётчатых расположений не будут иметь общих внутренних точек.*

Для доказательства достаточно применить лемму 1 с учётом того, что $V(K-(-K)) = V(2K) = 2^n V(K)$.

Рассмотрим решётчатую упаковку зеркально-симметричного выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$, где решётка порождена $n-1$ линейно независимыми векторами $a_1, \ldots, a_{n-1}$, параллельными гиперплоскости Q. Пусть P_1 и P_2 – общие опорные гиперплоскости ко всем телам упаковки, параллельные ко всем векторам решётки. Пусть Q_1 – расположенная между P_1 и Q и параллельная им гиперплоскость, сечение которой тела исходной упаковки имеет $(n-1)$-мерный объём не более $1/C_{2n-2}^{n-1}$ объёма фундаментальной области решётки (в её гиперплоскости).

Лемма 4. *В вышеуказанных условиях существует такая решётчатая упаковка тела K в $\mathbb{R}^n$, что решётка порождается векторами $a_1, \ldots, a_n$, и проекция вектора a_n на перпендикулярную всем вышеуказанным гиперплоскостям прямую имеет длину $2d - d_1$, где d – расстояние между Q и P_1, а d_1 – расстояние между Q_1 и P_1.*

Доказательство. Обозначим Q_2 симметричную Q_1 относительно Q гиперплоскость. Сдвинем исходную решётчатую упаковку так, чтобы гиперплоскость Q_2 совместилась с гиперплоскостью P_1. Будем далее называть исходную решётчатую упаковку – первой, а сдвинутую – второй. Мы должны доказать, что вторую упаковку можно так сдвинуть параллельно всем рассматриваемым гиперплоскостям, что её тела не будут иметь общих внутренних точек с телами первой упаковки.

Во всех параллельных Q_1 и расположенных между P_1 и ею гиперплоскостях рассмотрим две решётчатые упаковки выпуклых $(n-1)$-мерных тел – сечений этой гиперплоскостью тел из первой и второй решётчатой упаковки соответственно. Эти решетчатые упаковки также порождены векторами $a_1, \dots, a_{n-1}$. В силу зеркальной симметрии тела K, все ортогональные проекции его сечений гиперплоскостями из рассматриваемого семейства в Q_1 содержатся в сечении гиперплоскостью Q_1. Применяя леммы 1 и 2 к двум экземплярам решётки из сечений тела K гиперплоскостью Q_1, мы получаем утверждение леммы 4. □

Доказательство теоремы 1. Пусть Q – плоскость симметрии трёхмерного тела K. Для удобства в дальнейшем мы считаем, что максимальное удаление точек тела K от плоскости Q равно 1, p – максимальная плотность решётчатой упаковки R сечения K_1 тела K его плоскостью симметрии Q в этой плоскости ($p \geqslant 2/3$; см. [2]). Мы также считаем, что площадь фундаментальной области рассматриваемой плотнейшей решётчатой упаковки R фигуры K_1 равна 1 (следовательно $S(K_1) = p$), а t – расстояние от плоскости симметрии Q до плоскости параллельного ей и имеющего площадь $1/6$ сечения тела K ($t = 1$, если такого сечения нет). Заметим, что $t \geqslant 1/2$, так как $p \geqslant 2/3$, и площадь сечения, проходящего на расстоянии $1/2$ от плоскости Q, составляет не менее $p/4 \geqslant 1/6$.

Рассмотрим опорные плоскости P_1 и P_2 к телу K, параллельные плоскости Q, и решётчатую упаковку слоя единичной толщины между плоскостями Q и P_1, попавшими туда частями прямых цилиндров с фигурами из упаковки R в качестве основания. Эти цилиндры дают упаковку плотности p рассматриваемого единичного слоя.

Проведём шварцевское округление тела K относительно перпендикулярной основаниям цилиндра прямой ([3], с. 224). Так как результат округления – выпуклое тело, то половина его объёма составляет по меньшей мере объём прямого кругового усечённого конуса высоты t, в основании которого – круг площади p, а в верхнем основании – круг площади $1/6$, сложенный с объёмом кругового конуса высоты $1-t$ с площадью основания $1/6$. Простые вычисления показывают, что объём указанного тела равен $((6p+\sqrt{p})t+1)/18$. Применив лемму 4, мы можем слои между двумя параллельными и удалёнными на расстояние 2 плоскостями, решётчато упакованные найденными цилиндрами, вдвинуть друг в друга на $(1-t)$. Это позволяет получить решётчатую упаковку тела K плотности не менее

$$\frac{(6p+\sqrt{6p})t+1}{9(1+t)} = \frac{1}{9}\left(6p+\sqrt{6p}-\frac{6p+\sqrt{6p}-1}{1+t}\right).$$

Последнее выражение, в силу вышеуказанных ограничений, достигает минимума при $p=2/3$ и $t=1/2$, что и совпадает с оценкой в теореме. $\square$

Замечания. 1. В [2, гл. 6] доказано, что плотность упаковки в $\mathbb{R}^n$ симплексов, полученных сдвигами из некоторого симплекса (не обязательно решётчатой), не превосходит $2^n(n!)^2/(2n)!$. При $n=3$ это даёт оценку сверху $2/5$.

2. В [4, §10] доказано, что всякое трёхмерное выпуклое тело допускает решётчатую упаковку плотности $\geqslant 1/4$.

§2. О решётчатых упаковках центрально–симметричного выпуклого трёхмерного тела

Нижеследующая лемма о решётчатых упаковках центрально-симметричных выпуклых тел – аналог леммы 4 для зеркально-симметричного случая.

Рассмотрим решётчатую упаковку центрально-симметричного выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$, где решётка порождена $n-1$ линейно независимыми векторами $a_1,\dots,a_{n-1}$. Пусть P_1 и P_2 – общие опорные гиперплоскости ко всем телам упаковки, параллельные ко всем векторам решётки, а Q – параллельная им гиперплоскость, содержащая центры всех тел упаковки. Пусть Q_1 – расположенная между P_1 и Q и параллельная им гиперплоскость, сечение которой тела исходной упаковки имеет $(n-1)$-мерный объём не превышающий $(1/2)^{n-1}$ объёма фундаментальной области решётки.

Лемма 5. *В вышеуказанных условиях существует такая решётчатая упаковка тела K в $\mathbb{R}^n$, что решётка порождается векторами $a_1, \ldots, a_n$, и проекция вектора a_n на перпендикулярную всем вышеуказанным гиперплоскостям прямую имеет длину $2(d - d_1)$, где d – расстояние между Q и P_1, а d_1 – расстояние между Q_1 и P_1 (мы предполагаем, что $d_1 \leqslant d/2$).*

Доказательство. Обозначим Q_2 симметричную Q_1 относительно Q гиперплоскость. Сдвинем исходную решётчатую упаковку так, чтобы гиперплоскость Q_2 совместилась с гиперплоскостью Q_1. Будем далее называть исходную решётчатую упаковку – первой, а сдвинутую – второй. Мы должны доказать, что вторую упаковку можно так сдвинуть – параллельно всем рассматриваемым гиперплоскостям – что её тела не будут иметь общих внутренних точек с телами первой упаковки.

Выберем декартову систему координат так, чтобы последняя ось была перпендикулярна рассматриваемым гиперплоскостям. Повернем вторую решётчатую упаковку вокруг последней координатной оси на 180^0, и будем называть её третьей. Ясно, что решётчатые упаковки $(n-1)$-мерных тел – пресечений тел первой и третьей упаковки с Q_1 отличаются сдвигом, совершив который мы в дальнейшем считаем, что тела первой и третьей упаковки имеют одинаковое пересечение с Q_1.

Во всех параллельных Q_1 и проходящих от неё на расстоянии $\leqslant d_1$ гиперплоскостях рассмотрим две решётчатые упаковки выпуклых $(n-1)$-мерных тел – сечений этой гиперплоскостью тел из первой и второй решётчатой упаковки соответственно. Эти решетчатые упаковки также порождены векторами $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Рассмотрим попарные разности тел из различных решётчатых упаковок (первое тело из первой упаковки), ортогонально спроектируем их в гиперплоскость Q_1, и покажем, что все проекции будут содержаться в тех разностных множествах, которые получились изначально в Q_1.

Ясно, что рассматриваемые разностные множества равны суммам соответствующих сечений гиперплоскостью Q_1 тел первой и третьей упаковки и отличаются от них сдвигом на один и тот же вектор. Докажем, что ортогональная проекция в Q_1 суммы сечений любых двух тел из первой и третьей упаковки соответственно любой гиперплоскостью из вышеописанного семейства содержится в сумме сечений, которые получились в Q_1.

В силу периодичности это достаточно проверить для каких-либо тел из первой и третьей упаковки. Проверим это для пары тел из первой и третьей упаковок, которые имеют одинаковое пересечение с гиперплоскостью Q_1. Рассматриваемые тела зеркально симметричны относительно гиперплоскости Q_1. Ортогональная проекция в Q_1 суммы сечений двух зеркально симметричных относительно Q_1 тел гиперплоскостью из вышеописанного семейства равна сумме сечения одного из этих тел этой гиперплоскостью с его сечением гиперплоскостью, зеркальной к рассматриваемой относительно Q_1. В силу выпуклости тела, полусумма сечений тела параллельными и зеркальными относительно Q_1 гиперплоскостями содержится в сечении тела гиперплоскостью Q_1. Следовательно, сумма сечений тела зеркальными относительно Q_1 гиперплоскостями содержится в сумме сечения K_1 тела гиперплоскостью Q_1 с собой, которая гомотетична сечению с коэффициентом 2 и имеет в 2^{n-1} раз больший объём. В силу условия на объём сечения K_1 тела гиперплоскостью Q_1 внутренности решётчато расположенных тел $2K_1$ не покрывают Q_1, что и позволяет найти вектор, после сдвига на который тел второй упаковки их внутренности не пересекаются с внутренностями тел первой упаковки. Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Рассмотрим аффинно правильный шестиугольник A, вписанный в центрально-симметричную выпуклую фигуру K, и два описанных вокруг K центрально-симметричных шестиугольника B и C. Шестиугольник B ограничен опорными в вершинах A прямыми к K. Шестиугольник C ограничен опорными к фигуре K прямыми, параллельными сторонам A. Тогда одно из отношений площадей*

$$p = S(K)/S(B) \quad \text{и} \quad q = S(K)/S(C)$$

составляет по меньшей мере $\sqrt{3}/2$.

Доказательство. Рассмотрим отношение $r = S(A)/S(B)$. Легко проверить и хорошо известно, что $r \geqslant 3/4$. Так как утверждение аффинное, то мы можем и будем (совершив аффинное преобразование) считать шестиугольник A правильным с единичным радиусом вписанной окружности.

Пусть x – среднее арифметическое расстояний общего центра симметрии фигур K, A, B, C до сторон шестиугольника C. Фигура K

содержит центрально-симметричный двенадцатиугольник D, являющийся выпуклой оболочкой вершин шестиугольника A и точек касания сторон C и фигуры K. Очевидно, что $S(K) \geqslant S(D) = x * S(A)$, поэтому $p \geqslant 3x/4$.

При фиксированном x шестиугольник C имеет максимальную площадь только если он правильный. В противном случае пару симметричных самых коротких сторон C подвергнем малому параллельному сдвигу внутрь на равные расстояния, а пару симметричных самых длинных сторон C подвергнем малому параллельному сдвигу наружу на такие же равные расстояния. При этом x не меняется, а площадь C увеличивается. Таким образом, $q \geqslant 1/x$.

В силу установленных оценок $p \geqslant 3x/4$ и $q \geqslant 1/x$, $\max(p, q) \geqslant \max(3x/4, 1/x)$, $(x > 1)$. Правая часть неравенства достигает минимума при $x = \sqrt{4/3}$, и он равен $\sqrt{3}/2$. □

Теорема 2. *Всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело содержится в такой центрально-симметричной призме с тем же центром симметрии, у которой в основании лежит многоугольник с $\leqslant 6$ сторонами, а площадь параллельного ее основаниям центрального сечение тела составляет по меньшей мере $\sqrt{3}/2$ от площади основания призмы.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для гладкого строго выпуклого тела K. Этот случай и рассматривается в дальнейшем. Для остальных тел результат получается предельным переходом.

Центральное сечение K_1 тела K ориентированной плоскостью является центрально-симметричной строго выпуклой фигурой, поэтому для каждой точки A_1 границы K_1 существует единственный вписанный в K_1 и непрерывно зависящий от этой точки аффинно правильный шестиугольник A с вершиной в этой точке A_1. Пусть $A_1, \ldots, A_6$ – занумерованные против часовой стрелки вершины такого шестиугольника. Из сказанного видно, что конфигурационное пространство M рассматриваемых шестиугольников гомеоморфно группе вращений $\mathrm{SO}(3)$.

Рассмотрим для аффинно правильного шестиугольника A, вписанного в центральное ориентированное сечение K_1, два описанных вокруг K_1 центрально-симметричных шестиугольника B и C, определённых в условии леммы 6. Пусть a_1, a_2, a_3 – единичные и направленные наружу нормали к телу K в точках A_1, A_2, A_3 соответственно, а c_1, c_2, c_3 – единичные и направленные наружу нормали к телу K в точках касания соседних сторон шестиугольника C с сечением K_1, которые также занумерованы против часовой стрелки.

Мы докажем, что для некоторого центрального сечения и вписанного в него аффинно правильного шестиугольника A векторы в каждой из указанных троек будут компланарными. В таком случае по лемме 6 одна из двух шестиугольных описанных вокруг тела K центрально-симметричных призм, основания которых параллельны найденному сечению и касаются тела K, а плоскости боковых граней призм перпендикулярны к векторам a_i и к векторам c_i соответственно, удовлетворяет требованиям теоремы 2.

Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon M \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющее шестиугольнику A пару смешанных произведений вышеописанных векторов $((a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3))$. Покажем, что $f(M)$ содержит точку $(0, 0)$.

Если это не так, то рассмотрим отображение $g = f/\|f\|\colon M \to S^1$ в стандартную единичную окружность. Циклическая группа Z_2 свободно действует на конфигурационном пространстве шестиугольников M, переводя шестиугольник в центрально-симметричный ему, а также на окружности S^1, – симметриями относительно центра. По построению отображение g сохраняет вышеописанное действие группы Z_2. Рассмотрим в M путь, соединяющий две точки орбиты группы Z_2. Его образ под действием g также соединяет две точки орбиты группы Z_2. Проекции этих путей в факторпространства по действию Z_2 являются не гомотопными 0 петлями, так как накрывающие их пути размыкаются. Факторотображение g переводит первую петлю во вторую и индуцирует нетривиальный гомоморфизм фундаментальных групп факторпространств. Но фундаментальная группа первого пространства M/Z_2 имеет порядок 4, а второго – S^1/Z_2 – изоморфна Z. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Доказанные утверждения позволяют доказывать существование достаточно плотных решётчатых упаковок трёхмерного центрально-симметричного выпуклого тела. Наилучший результат в этом направлении имеется в [5], где доказано, что всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело допускает решётчатую упаковку плотности $> 0,53835$. □

Утверждение. *Всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело K допускает решётчатую упаковку плотности $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{3/4} + 1/2)/6 > 0,527$.*

Доказательство. Для удобства в дальнейшем мы считаем, что существующая в силу теоремы 2 призма имеет высоту 2, площадь основания призмы равна 1, p – площадь параллельного основанию центрального сечения тела ($p \geqslant \sqrt{3}/2$), а t – расстояние от плоскости центрального сечения до плоскости параллельного ему и имеющего площадь $1/4$ сечения тела K ($t = 1$, если такого сечения нет).

Проведём шварцевское округление тела K относительно перпендикулярной основаниям призмы прямой. Так как результат округления – выпуклое тело, то величина $V(K)/2$ не меньше, чем сумма объёма прямого кругового усечённого конуса высоты t, в основании которого – круг площади p, а в верхнем основании – круг площади $1/4$, и объёма кругового конуса высоты $(1-t)$ с площадью основания $1/4$. Применив лемму 6, мы можем слои между двумя параллельными и удалёнными на расстояние 2 плоскостями, решётчато упакованные и покрытые найденными призмами, вдвинуть друг в друга на $2(1-t)$. Это позволяет получить решётчатую упаковку тела K плотности не меньшей, чем $((2p+\sqrt{p})t+1/2)/(6t) = ((2p+\sqrt{p})+1/(2t))/6$. Последнее выражение, в силу вышеуказанных ограничений, достигает минимума при $p = \sqrt{3}/2$ и $t = 1$, что и совпадает с заявленной оценкой. $\square$

Литература

1. К. Роджерс, *Укладки и покрытия.* Мир, М., 1968.
2. I. Fáry, *Sur la densité des réseaux de domains convexes.* — Bul. Soc. Math. France **78** (1950), 152–161.
3. К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества.* Наука, М., 1985.
4. В. В. Макеев, *Некоторые экстремальные задачи для векторных расслоений.* — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 131–155.
5. E. Smith, *A new packing density bound in* 3*-space.* — Discrete Comput. Geom. **34** (2005), 537–544.

Makeev V. V. On lattice packings of mirror or centrally symmetric convex three-dimensional body.

Proved is a number of statements concerning lattice packings of mirror or centrally symmetric convex bodies. This enables one to establish the existence of sufficiently dense lattice packings of any three-dimensional convex body of such type.

The main result is as follows. Every three-dimensional mirror symmetric convex body admits a lattice packing with density $\geq 8/27$. Moreover, two

basis vectors of the lattice generating the packing can be chosen parallel to the plane of symmetry of the body.

The best result for centrally symmetric bodies was obtained by Edwin Smith (2005): every three-dimensional centrally symmetric convex body admits a lattice packing with density > 0.53835. In this paper, it is only proved that every three-dimensional centrally symmetric convex body admits a lattice packing with density $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{3/4} + 1/2)/6 > 0.527$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 28 декабря 2012 г.