Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев, Н. Ю. Нецветаев

О ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

Всюду в дальнейшем *выпуклой фигурой* (*телом* в размерности > 2) мы будем называть компактное выпуклое подмножество плоскости (пространства) с непустой внутренностью, символ αK означает гомотетичную копию фигуры (тела) K с коэффициентом α.

Следуя [1], определим на фактормножестве множества F плоских выпуклых фигур (множества T выпуклых тел в старших размерностях) по действию группы подобных преобразований подобно-инвариантную метрику, положив

$$d(\{K_1\},\{K_2\}) = \inf\{\ln(b/a)\},$$

где $\{K_1\}$, $\{K_2\}$ – классы эквивалентности фигур K_1 и K_2, а a и b – положительные числа, для которых существует подобное преобразование A такое, что $aA(K_1) \subset K_2 \subset bA(K_1)$.

Обозначим через D_2 некоторый плоский единичный круг, а для $x > 0$ обозначим через F_x множество таких плоских выпуклых фигур K, что $d(\{D_2\}, \{K\}) \geqslant x$. Будем также рассматривать на множествах F и T обычную метрику Хаусдорфа [1], относительно которой пространства T и F и инвариантное относительно подобий замкнутое подпространство F_x не компактны.

Заметим, что на пространстве F и всех его подпространствах F_x слева действует группа $\mathrm{SO}(2)$ поворотов вокруг начала координат.

Теорема 1. *Не существует непрерывного* $\mathrm{SO}(2)$*-эквивариантного отображения* $F_x \to F_y$*, если* $y > \ln(\sec(\pi/n)) \geqslant x$ *для натурального* $n > 2$.

Доказательство. Пусть такое отображение f существует. Тогда образ $f(A_n)$ правильного n-угольника A_n с центром в начале координат из F_x – выпуклая фигура из F_y, переходящая в себя при повороте на угол π/n. При этом повороте в себя переходит и описанный вокруг $f(A_n)$ круг минимального радиуса. Так как на границе этого круга лежит точка фигуры $f(A_n)$, то на его границе лежит вся орбита этой точки под действием циклической группы поворотов вокруг центра

Ключевые слова: выпуклая фигура, выпуклое тело, ортогональная группа, векторное расслоение, многообразие Грассмана.

круга на кратные $2\pi/n$ углы. Таким образом, фигура $f(A_n)$ содержится в круге и содержит вписанный в круг правильный n-угольник, что противоречит тому, что эта фигура из F_y. Теорема 1 доказана. $\square$

Замечания. Авторам не известны ответы на следующие вопросы. Существует ли такая монотонно убывающая к 0 последовательность положительных чисел x_n, что (непрерывное) SO(2)-эквивариантное отображение $F_x \to F_y$ существует тогда и только тогда, когда x и y принадлежат некоторому промежутку $(x_{n+1}, x_n]$. Верна ли

Гипотеза. Непрерывное SO(2)-эквивариантное отображение $F_x \to F_y$ существует тогда и только тогда, когда x и y принадлежат некоторому промежутку $(\ln(\sec(\pi/(n+1))), \ln(\sec(\pi/n))]$ при $n > 2$.

Заметим, что при любых $y > x > \ln 2$ непрерывное SO(2)-эквивариантное отображение $F_x \to F_y$ существует. Действительно, в этом случае содержащийся в фигуре из F_x эллипс наибольшей площади не является кругом, так как фигура содержится в гомотетичном эллипсе с коэффициентом 2. Чтобы получить требуемое отображение, достаточно все фигуры из F_x подвергнуть сжатию к большой оси вышеназванных эллипсов с (одинаковым) достаточно малым коэффициентом.

Обозначим через F_1 подпространство в F, полученное удалением из него кругов. Существует ли непрерывное и SO(2)-эквивариантное отображение $F_x \to M$ в подпространство M многоугольников из F?

Обратимся к многомерному случаю. Теперь T – пространство выпуклых тел в $\mathbb{R}^k$, а T^s – его замкнутое подпространство из центрально-симметричных тел. Пусть T_x означает замкнутое подмножество в T, расстояние d от классов которого до T^s составляет по меньшей мере $x > 0$.

Теорема 2. *Для всякого $y > 0$ найдется такое $x > 0$, для которого не существует непрерывного* SO(k)*-эквивариантного отображения $T_x \to T_y$.*

Доказательство. Пусть $\gamma_k^n : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ – тавтологическое k-мерное векторное расслоение со структурной ортогональной группой SO(k) над многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ ориентированных k-мерных проходящих через точку 0 в $\mathbb{R}^n$ плоскостей, где слоем над k-плоскостью является она же, рассматриваемая как k-мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Наряду с расслоениями $\gamma_k^n : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим ассоциированные с ними расслоения γ, γ_1 со слоями T, T_y соответственно (и того же вида функциями перехода). В [3, теорема 6] доказано, что для любого $y > 0$ существует такое натуральное число N, что для $n > N$ расслоение γ_1 не имеет непрерывного сечения. Рассмотрим сечение расслоения γ, не задевающее в слоях подпространство T^s. Пусть $x > 0$ таково, что значение сечения удалено от T^s не менее, чем на x. Докажем, что не существует $\mathrm{SO}(k)$-эквивариантного отображения $T_x \to T_y$.

Обозначим γ_2 ассоциированное с γ_k^n расслоение со слоем T_x. Если бы указанное отображение существовало, то оно индуцировало бы морфизм над $G_k(\mathbb{R}^n)$ расслоения γ_2 в γ_1 и непрерывное сечение расслоения γ_1, что противоречит сделанному выше предположению. Теорема 2 доказана. □

В заключение скажем несколько слов о пространстве многогранников. Пусть $M_k(n)$ – пространство k-мерных выпуклых многогранников с не более чем n гранями старшей размерности (вершинами), а M_k – пространство всех k-мерных выпуклых многогранников.

Теорема 3. *Не существует непрерывного* $\mathrm{SO}(k)$*-эквивариантного отображения* $M_k(n+k) \to M_k(n)$.

Доказательство. Рассмотрим расслоение
$$\gamma_k^{n+k-1} : E_k(\mathbb{R}^{n+k-1}) \to G_k(\mathbb{R}^{n+k-1})$$
и ассоциированные с ним расслоения γ, γ_1, γ_2 со слоями M_k, $M_k(n+k)$, $M_k(n)$ соответственно (и теми же функциями перехода). У расслоения γ_1 имеется непрерывное сечение s. Для его построения достаточно рассмотреть проходящие через точку 0 в $\mathbb{R}^{n+k-1}$ k-мерные сечения такого $(n+k-1)$-мерного симплекса, для которого точка 0 – внутренняя (все они имеют не более $(n+k)$ граней старшей размерности).

Если бы указанное в формулировке теоремы отображение существовало, то оно индуцировало бы непрерывное сечение расслоения γ_2. Однако, как следует из [2, §9], у всякого непрерывного сечения расслоения γ многогранник в некотором его слое имеет не менее $n+1$ граней старшей размерности. Теорема 3 доказана. □

Замечания. 1. Верно ли, что не существует $\mathrm{SO}(k)$-эквивариантного отображения $M_k(n+1) \to M_k(n)$? Для многоугольников на плоскости и трёхмерных многогранников это очевидно. Действительно, в

$M_2(n+1)$ имеется правильный $(n+1)$-угольник, группу самосовмещений которого не может иметь многоугольник из $M_2(n)$. В трёхмерном случае достаточно рассмотреть правильную n-угольную пирамиду. Она переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$, чего не может быть для многогранника с меньшим числом граней.

2. Верно ли, что в $M_k(n+1)$ всегда есть многогранник с такой группой симметрий, какой не бывает у многогранников из $M_k(n)$? Обозначим T_1 подпространство k-мерных выпуклых тел в T, полученное удалением из него тел, имеющих бесконечную группу самосовмещений. Существует ли непрерывное и $\mathrm{SO}(k)$-эквивариантного отображение $T_1 \to M$ в подпространство M многогранников из T_1? Аналогичные вопросы можно ставить, заменив группу подобий и ортогональную группу, например, на группу аффинных преобразований.

Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М., 1971.
2. В. В. Макеев, *Некоторые экстремальные задачи для векторных расслоений.* — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 131–155.
3. В. В. Макеев, *О некоторых комбинаторно-геометрических задачах для векторных расслоений.* — Алгебра и анализ **14**, No. 6 (2002), 169–191.

Makeev V. V., Netsvetaev N. Yu. On the space of convex figures.

Let T be the set of convex bodies in $\mathbb{R}^k$, and let $\mathcal{T}$ be the set of classes of similar bodies in T. We write F for T in the case $k=2$. Define a metric d on $\mathcal{T}$ by setting for classes $\{K_1\}$, $\{K_2\}$ (from $\mathcal{T}$, of convex bodies K_1, K_2) $d(\{K_1\},\{K_2\}) = \inf\{\ln(b/a)\}$, where a and b are positive reals such that there is a similarity transformation A with $aA(K_1) \subset K_2 \subset bA(K_1)$. Let D_2 be a planar unit disk. If $x > 0$, we denote by F_x the set of the planar convex figures K in F with $d(\{D_2\},\{K\}) \geq x$. We also equip the sets T and F with the usual Hausdorff metric.

We prove that if $y > \ln(\sec(\pi/n)) \geq x$ for some integer $n > 2$, then no mapping $F_x \to F_y$ is SO(2)-equivariant.

Let $M_k(n)$ be the space of k-dimensional convex polyhedra with at most n hyperfaces (vertices), and let M_k denote the space of k-dimensional convex polyhedra. We prove that there are no SO(2)-equivariant continuous mappings $M_k(n+k) \to M_k(n)$.

Let T^s be the closed subspace of T formed by centrally symmetric bodies. Let T_x denote the closed subspace of T formed by the bodies K with

$d(T^s, \{K\}) \geq x > 0$. We prove that for every $y > 0$ there exists an $x > 0$ such that no mapping $T_x \to T_y$ is SO(2)-equivariant.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru
E-mail: netsvetaevnikita@gmail.com

Поступило 31 декабря 2012 г.