Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев, М. Ю. Никанорова

О ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Под площадью поверхности многогранника в нормированном пространстве мы понимаем сумму площадей его граней, делённых на площади центральных сечений единичного шара, параллельных этим граням. Затем функционал площади поверхности распространяется на выпуклые тела.

Пусть c_n – такое наименьшее число, что всякое центрально-симметричное выпуклое тело K в $\mathbb{R}^n$ содержится в параллелепипеде объёма не более $c_n V(K)$, где $V(K)$ – объём тела K. В [1] доказано, что $c_2 = 4/3$, а в [2] доказано, что $c_3 < 3,2082$.

Лемма 1. *Площадь поверхности параллелепипеда наименьшего объёма, содержащего единичный шар в n-мерном нормированном пространстве, не превосходит $2nc_{n-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед наименьшего объема, содержащий единичный шар K. Хорошо известно, что параллелепипед наименьшего объёма, содержащий центрально-симметричное выпуклое тело, имеет с ним общие точки в центрах своих граней.

Ясно, что центральное гиперплоское сечение тела K, параллельное грани рассматриваемого параллелепипеда, высекает на параллелепипеде параллелепипед на единицу меньшей размерности и равный грани исходного параллелепипеда, которой параллельно сечение. Этот параллелепипед является параллелепипедом наименьшего объёма, содержащим это сечение. Если бы существовал параллелепипед меньшего объёма, содержащий рассматриваемое сечение, то через его грани старшей размерности можно было бы провести опорные гиперплоскости к телу K, которые, вместе с двумя гиперплоскостями граней исходного параллелепипеда, которым параллельно сечение, ограничивали бы параллелепипед меньшего объёма, чем исходный.

Из сказанного следует, что площадь любой грани исходного параллелепипеда наименьшего объёма не превосходит c_{n-1}, откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Ключевые слова: площадь в нормированном пространстве, выпуклое тело, параллелепипед.

Теорема 1. *Площадь поверхности параллелепипеда наименьшего объёма, содержащего единичный шар K в трёхмерном нормированном пространстве, не превосходит* 8.

Доказательство. Теорема 1 вытекает из леммы и того, что $c_2 = 4/3$. □

Следствие 1. *Площадь поверхности единичного шара в трёхмерном нормированном пространстве не превосходит* 8.

Доказательство вытекает из монотонности функционала площади поверхности.

Замечания. 1. Для получения неулучшаемой оценки 4 для периметра круга диаметра 1 в двумерном нормированном пространстве различные авторы рассматривали описанный вокруг круга параллелограмм наименьшей площади.

2. Если в трёхмерном пространстве норма евклидова, то есть шар стандартный, то описанный параллелепипед наименьшего объёма есть куб, и площадь его поверхности равна $24/\pi > 7,6394$.

3. С учётом приведённой выше оценки для c_3 мы получаем, что площадь поверхности параллелепипеда наименьшего объёма, описанного вокруг шара единичного диаметра в четырёхмерном нормированном пространстве, а значит и самого шара, не превосходят $8 \times 3,2082 = 25,6656$.

Литература

1. И. К. Бабенко, *Асимптотический объём торов и геометрия выпуклых тел.* — Мат. заметки **44**, No. 2 (1988), 177–190.
2. В. В. Макеев, *О параллелепипедах и центрально-симметричных шестиугольных призмах, описанных вокруг трёхмерного центрально-симметричного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **372** (2009), 103–107.

Makeev V. V., Nikanorova M. Yu. Estimating the surface area of spheres in normed spaces.

The surface area of a polyhedron in a normed space is defined as the sum of the areas of its faces, each divided by the area of the central section of the unit ball, parallel to the face. This functional naturally extends to convex bodies.

In the paper, it is proved, in particular, that the surface area of the unit sphere in any three-dimensional normed space does not exceed 8.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru
E-mail: mashanikanorova@yandex.ru

Поступило 31 декабря 2012 г.