Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

В. В. Макеев

О МНОГОУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ВЫПУКЛУЮ ФИГУРУ

Ниже под выпуклой фигурой мы понимаем компактное выпуклое подмножество плоскости с непустой внутренностью. Мы говорим, что выпуклый многоугольник вписан в выпуклую фигуру (описан вокруг нее), если его вершины принадлежат границе этой фигуры (его стороны являются опорными для этой фигуры).

Квадрат – первый из четырехугольников, про который было доказано, что он может быть вписан в любую выпуклую фигуру. В [4] имеется описание истории этой теоремы (несколько позже Шнирельман [1] доказал, что квадрат может быть вписан во всякую C^2-гладкую жорданову кривую на плоскости). Автор неоднократно высказывал предположение, что во всякую регулярную жорданову кривую вписан подобный образ вписанного в окружность четырёхугольника. В [9] это утверждение доказано лишь для овалов с четырьмя вершинами, а также доказано, что на звёздной регулярной жордановой кривой лежат четыре вершины правильного пятиугольника.

Многие авторы доказывали, что во всякую строго выпуклую фигуру можно вписать положительно гомотетичный образ наперёд заданного треугольника (в [11] доказано более общее утверждение во всех размерностях).

В [6–7] доказано, что во всякую выпуклую фигуру можно вписать аффинный образ правильного пятиугольника с вершиной в наперёд заданной граничной точке фигуры, а в [8] то же доказано для произвольного выпуклого пятиугольника, сумма каждых двух соседних углов которого больше развёрнутого.

В [2] доказано, что во всякую выпуклую фигуру вписан аффинный образ правильного шестиугольника, а в [13, 14] это доказано для произвольного выпуклого центрально-симметричного шестиугольника.

В [7] доказано, что во всякую центрально-симметричную выпуклую фигуру вписан аффинный образ правильного восьмиугольника, а в [12] то же доказано про центрально-симметричный восьмиугольник с вершинами в вершинах правильного десятиугольника.

Ключевые слова: выпуклая фигура, вписанный многоугольник.

Теорема 1. *Во всякую гладкую выпуклую фигуру K вписаны либо четыре различных зеркально-симметричных выпуклых пятиугольника с равными сторонами, либо правильный пятиугольник.*

Доказательство. Пусть M – открытое подмножество пятикратного произведения $(\partial K)^5$ ориентированной границы фигуры K на себя, состоящее из следующих друг за другом пятёрок различных точек границы фигуры K. Рассмотрим гладкое отображение пространства M в $\mathbb{R}^5$, сопоставляющее упорядоченной пятёрке точек упорядоченный набор длин отрезков, соединяющих пары соседних точек (пятая точка соединяется с первой). Легко проверить, что в ситуации общего положения (то есть для открытого плотного в C^2-топологии множества гладких фигур K) рассматриваемое отображение трансверсально к прямой l в $\mathbb{R}^5$, состоящей из точек с равными координатами, и в этом случае прообраз L прямой l является одномерным гладким компактным подмногообразием в M.

Компактность L следует из того, что для гладкой фигуры K точки из рассматриваемых пятёрок не могут неограниченно сближаться. Ориентируем M, $\mathbb{R}^5$ и l, после чего L также получает ориентацию (и в дальнейшем предполагается ориентированным).

Рассмотрим отображение $p : L \to \partial K$, сопоставляющее пятёрке точек первую из них. Так как гладкие фигуры гладко деформируемы друг в друга, то в ситуации общего положения корректно определён класс сингулярного бордизма отображения p и тем более его степень. Рассмотрение круга в качестве фигуры K показывает, что эта степень равна ± 1. То, что круг – фигура общего положения, следует из того, что для вписанного в окружность правильного пятиугольника можно с ненулевой скоростью нарушать условие равенства длины любой из его сторон равным длинам остальных.

Циклическая группа Z_5 свободно действует на многообразиях M и L циклическими перестановками точек из пятёрок. Покажем, что в ситуации общего положения многообразие L имеет Z_5-инвариантную компоненту, сужение проекции p на которую имеет ненулевую степень. Действительно, если компонента L не Z_5-инвариантна, то степень сужения p на её орбиту делится на 5, а так как степень отображения p равна 1, то существует Z_5-инвариантная компонента.

Рассмотрим пятиугольник из найденной выше Z_5-инвариантной компоненты многообразия L и выпишем пять разностей соседних углов этого пятиугольника по окружности в порядке их расположения на границе K. В рассматриваемом цикле из пяти чисел имеется не менее четырёх перемен знака, если они не все равны 0 и тогда пятиугольник правильный, так как в противном случае углы пятиугольника имеют лишь два промежутка монотонности, и при изгибании в него правильного пятиугольника получаем противоречие с известной леммой Коши о деформации выпуклого многоугольника (многогранного угла [15, с.78]). Теперь утверждение теоремы 1 в ситуации общего положения следует из соображений непрерывности при деформации пятиугольника внутри рассматриваемой компоненты в пятиугольник с циклически переставленными вершинами (и из того факта, что при наличии у рассматриваемых пятиугольников двух осей симметрии они становятся правильными). Для остальных гладких выпуклых фигур теорема доказывается предельным переходом. $\square$

Пусть S – семейство выпуклых шестиугольников с вершинами в вершинах двух отрицательно гомотетичных правильных треугольников с общим центром.

Теорема 2. *Во всякую гладкую выпуклую фигуру K вписаны либо некоторый шестиугольник класса S, либо два пятиугольника с вершинами в вершинах шестиугольников класса S, причём у одного из шестиугольников шестая вершина лежит внутри фигуры, а у другого – снаружи.*

Доказательство. Пусть фигура K строго выпукла. Хорошо известно, что в гладкую строго выпуклую фигуру может быть вписана единственная положительно гомотетичная копия заданного треугольника. Для всякого ориентированного правильного треугольника ABC с единичной стороной и центром в фиксированной точке O плоскости впишем в фигуру K положительно гомотетичную копию T этого треугольника, и сопоставим треугольнику упорядоченную тройку длин отрезков, которые фигура K высекает на лучах, исходящих из середин сторон треугольника T, перпендикулярных к этим сторонам и направленных наружу.

Мы определили непрерывное отображение $f\colon \mathrm{SO}(2) \to \mathbb{R}^3$, по построению сохраняющее действие циклической группы Z_3, которая действует на $\mathrm{SO}(2)$ поворотами на угол $2\pi/3$, а на $\mathbb{R}^3$ – циклическими перестановками координат.

Если образ $f(\mathrm{SO}(2))$ задевает прямую l, заданную уравнениями $x = y = z$, то в фигуру K вписан некоторый шестиугольник класса S. Поэтому далее мы предполагаем, что образ $f(\mathrm{SO}(2))$ лежит в дополнении к l.

Пусть g – ретракция дополнения к l на единичную окружность S^1 в плоскости $x+y+z=0$ с центром в точке $(0,0,0)$, являющуюся композицией ортогональной проекции в эту плоскость (которая переводит точку с координатами (x,y,z) в точку с координатами $(x-t,y-t,z-t)$, где $t = (x+y+z)/3$) с последующей проекцией на окружность S^1 вдоль исходящих из точки $(0,0,0)$ лучей. По построению композиция $h = g \circ f\colon \mathrm{SO}(2) \to S^1$ сохраняет вышеописанное действие группы Z_3, причём на S^1 группа Z_3 также действует поворотами на угол $2\pi/3$.

Покажем, что степень отображения h равна $\pm 1 \bmod 3$. Действительно, образ при отображении h кратчайшей дуги в $\mathrm{SO}(2)$, соединяющей две точки орбиты действия группы Z_3, соединяет две соответствующие точки окружности S^1, поэтому его поднятие в универсальное накрывающее S^1 (вещественную прямую) имеет концы на расстоянии $2\pi k \pm 2\pi/3$ (k – целое число). Объединение образов рассмотренной выше дуги под действием группы Z_3 составляют образующую фундаментальной группы $\mathrm{SO}(2)$, поэтому поднятие её h-образа в универсальном накрывающем S^1 имеет концы на расстоянии $6\pi k \pm 2\pi$, что и требовалось.

Таким образом, отображение h сюръективно и прообразы точек $(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3})$ и $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})$ дают такие положения правильного треугольника, что после вписывания их положительно гомотетичных образов в фигуру K и рассмотрения трёх концов отрезков, которые фигура K высекает на лучах, исходящих из середин сторон этих образов, перпендикулярных к их сторонам и направленных наружу, мы получаем требуемое.

Результат теоремы 2 переносится на произвольные гладкие выпуклые фигуры путем приближения их строго выпуклыми и совершения предельного перехода. $\square$

Замечание. У всех вышеупомянутых результатов о вписанных многоугольниках для выпуклой фигуры имеются аналоги об описанных многоугольниках для выпуклой фигуры, которые, как правило, легче доказывать.

Так, например, аналогом теоремы 1 может служить утверждение о том, что вокруг выпуклой фигуры описан зеркально-симметричный выпуклый пятиугольник с равными углами.

Аналогом теоремы 2 может служить утверждение о том, что вокруг выпуклой фигуры описаны либо некоторый шестиугольник, являющийся пересечением двух отрицательно гомотетичных правильных треугольников с общим центром, либо два пятиугольника, прямые сторон которых совпадают с прямыми сторон шестиугольников вышеупомянутого вида, причём у одного из шестиугольников шестая сторона не имеет с фигурой общих точек, а у другого – пересекает внутренность фигуры.

Литература

1. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук **10** (1944), 34–44.
2. A. S. Besicovitch, *Measure of asymmetry of convex curves.* — J. London. Math. Soc. **23** (1945), 237–240.
3. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры.* Гостехиздат, М., 1951.
4. H. G. Eggleston, *Figures inscribed in convex sets.* — Amer. Math. Monthly **65** (1958), 76–80.
5. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М., 1971.
6. W. Böhme, *Ein Satz über ebene konvexe Figuren.* — Math.-Phys. Semesterber. **6** (1958), 153–156.
7. B. Grünbaum, *Affine-regular polygons inscribed in plane convex sets.* — Riveon Lematimatika **13** (1959), 20–24.
8. В. В. Макеев, *О пятиугольниках, вписанных в замкнутую выпуклую кривую.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 184–190.
9. В. В. Макеев, *О четырёхугольниках, вписанных в замкнутую кривую, и её вершинах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **299** (2003), 241–251.
10. В. В. Макеев, *О четырёхугольниках, вписанных в замкнутую кривую.* — Мат. заметки **57**, No. 1 (1995), 129–132.
11. М. Л. Громов, *О симплексах, вписанных в гиперповерхности.* — Мат. заметки **5**, No. 1 (1969), 81–89.
12. В. В. Макеев, Н. Ю. Нецветаев, *О вписанных и описанных многогранниках для центрально-симметричного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **415** (2013), 54–61.
13. V. V. Makeev, *Applications of topology to some problems in combinatorial geometry.* In: Mathematics in St. Petersburg, Amer. Math. Soc. Transl., Ser 2, vol. 174, Amer. Math. Soc., Providence, 1996, pp. 223–228.
14. В. В. Макеев, *Аффинно–вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 286–298.

15. Л. А. Люстерник, *Выпуклые фигуры и многогранники.* ГТТИ, М., 1956.

Makeev V. V. On polygons inscribed into a convex figure.

The paper contains a survey of results about the possibility to inscribe convex polygons of particular types into a plane convex figure. It is proved that if K is a smooth convex figure, then K is circumscribed either about four different reflection-symmetric convex equilateral pentagons or about a regular pentagon.

Let S be a family of convex hexagons whose vertices are the vertices of two negatively homothetic equilateral triangles with common center. It is proved that if K is a smooth convex figure, then K is circumscribed either about a hexagon in S or about two pentagons with vertices at the vertices of two hexagons in S. In the latter case, the sixth vertex of one of the hexagons lies outside K, while the sixth vertex of anther one lies inside K.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 20 февраля 2013 г.