Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 415, 2013 г.

Р. Н. Карасёв

О ДВУХ ГИПОТЕЗАХ МАКЕЕВА

§1. Введение

В [8] была сформулирована следующая гипотеза (задача Кнастера).

Гипотеза 1. *Пусть S^{d-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$. Пусть даны d точек $x_1, \dots, x_d \in S^{d-1}$ и непрерывная функция $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}$. Тогда найдётся вращение $\rho \in \mathrm{SO}(d)$, такое что*

$$f(\rho(x_1)) = f(\rho(x_2)) = \dots = f(\rho(x_d)).$$

В работах [6, 7] было показано, что эта гипотеза неверна для определённых функций и множеств $\{x_i\}$ в достаточно больших размерностях, в частности для $d = 61$ и всех $d \geq 67$. В этой работе мы рассматриваем усиление этой задачи для функций на S^2 ($d = 3$). Гипотеза 1 была положительно решена для $d = 3$ в [4]. В работах [3, 5, 9] было показано, что аналогичный результат верен для четырёх (не трёх) точек на сфере S^2, если они образуют прямоугольник. В [10] это усиление задачи Кнастера было доказано для четырёх точек на сфере S^2, являющихся четырьмя вершинами правильного пятиугольника.

В [10] (см. также [13, гл. I]) было замечено, что если 4 точки на S^2 обладают свойством Кнастера (то есть для них соответствующая задача типа Кнастера верна), то они обязаны лежать на одной окружности (для этого достаточно рассмотреть линейную функцию f), и была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 2. *Пусть S^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. Пусть 4 точки x_1, …, $x_4 \in S^2$ лежат на одной окружности, а $f : S^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда найдётся вращение $\rho \in \mathrm{SO}(3)$, такое что*

$$f(\rho(x_1)) = f(\rho(x_2)) = f(\rho(x_3)) = f(\rho(x_4)).$$

Ключевые слова: задача Кнастера, вписанные многоугольники, плоские кривые.

Исследование выполнено при частичной поддержке фонда “Династия”, гранта Президента РФ МД-352.2012.1 и проекта правительства РФ 11.G34.31.0053.

Для некоторых классов функций f эта гипотеза была доказана в [11, 13]. Во всей своей общности гипотеза неверна. В разделах 2 и 3 приведён контрпример для Гипотезы 2.

Другая гипотеза из работы [12] тесно связана с задачей о функциях на сфере, в частности, её можно было бы вывести из Гипотезы 2, если бы последняя была верна (см. [12, 13]).

Гипотеза 3. *Пусть C – гладкая замкнутая простая кривая в $\mathbb{R}^2$, а Q – некоторые четыре точки на окружности. Тогда существует преобразование подобия σ (с положительным детерминантом), такое что $\sigma(Q) \subset C$.*

Для этой гипотезы можно сформулировать следующее частичное продвижение.

Теорема 1. *Пусть C – гладкая замкнутая простая кривая в $\mathbb{R}^2$, а $Q = \{a, b, c, d\}$ – некоторые четыре точки на окружности. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1) *существует преобразование подобия σ (с положительным детерминантом), такое что $\sigma(Q) \subset C$,*

2) *существуют два разных преобразования подобия σ_1, σ_2, такие что*

$$\sigma_1(d) = \sigma_2(d), \quad \forall i\ \sigma_i(a), \sigma_i(b), \sigma_i(c) \in C.$$

Также можно доказать инфинитезимальную версию Гипотезы 3 для выпуклых кривых и инфинитезимальных четырёхугольников с тремя совпадающими вершинами. Три совпадающие вершины дают ограничение на касательную и кривизну в точке их совпадения.

Определение 1. Пусть C – C^2-гладкая кривая, и пусть $p \in C$. Окружность ω, касательная к C в p, с кривизной, равной кривизне C в точке p, называется *соприкасающейся окружностью* для C в p. Окружность ω может оказаться прямой линией, если кривизна равна нулю.

Теорема 2. *Пусть C – C^2-гладкая замкнутая выпуклая кривая в $\mathbb{R}^2$, пусть $\alpha \in (0, 2\pi)$ – некоторый угол. Найдутся две точки $a, b \in C$, лежащие на соприкасающейся окружности ω для C в точке a, такие что ориентированная против часовой стрелки дуга $[ab]$ имеет угловую меру α.*

Инфинитезимальная версия, в которой совпадают две точки из четырёх с соответствующим условием на касательные, также кажется правдоподобной (как минимум для выпуклых кривых), однако доказать её пока не удалось.

Автор благодарит рецензента за многочисленные ценные замечания.

§2. Четырёхугольник и инфинитезимальный вариант Гипотезы 2

Рассмотрим четырёхугольник $Q(a,b)$, заданный следующим образом.

$$Q(a,b) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

полностью находится на экваторе S^2, точки x_1, x_4 противоположны, x_2 и x_3 лежат с разных сторон от x_1, $\operatorname{dist}(x_1, x_2) = a$ и $\operatorname{dist}(x_1, x_3) = b$.

Мы собираемся доказать, что для достаточно малых a, b утверждение Гипотезы 2 не выполняется для четырёхугольника $Q(a,b)$. Предположим противное и рассмотрим некоторую функцию f класса C^∞. Переходя к пределу $a, b \to +0$, используем соображения компактности и найдём предельные точки $x_1 \to y_1$, $x_4 \to y_4$.

В пределе получается равенство $f(y_1)=f(y_4)$. Очевидно, $x_2, x_3 \to y_1$, и для f в некоторой окрестности y_1 возможны следующие альтернативы.

(1) $df(y_1) \neq 0$. В этом случае в точке y_1 линия уровня

$$f(x) = f(y_1)$$

должна иметь нулевую кривизну, следовательно комбинация

$$C(f) = f''_{ss} f'^2_t - 2 f''_{st} f'_s f'_t + f''_{tt} f'^2_s$$

должна быть равна нулю в y_1 для некоторых координат s, t, данных экспоненциальным отображением ортогональных координат в касательной плоскости TS^2 в точке y_1;

(2) $df(y_1) = 0$. В этом случае квадратичная форма с матрицей

$$\partial^2 f = \begin{pmatrix} f''_{ss} & f''_{st} \\ f''_{st} & f''_{tt} \end{pmatrix}$$

не должна быть положительно или отрицательно определённой.

Мы будет строить контрпример следующим образом. Сначала найдём C^∞-гладкую чётную функцию g на S^2 и нечётную гладкую простую кривую $L \subset S^2$ (нечётную как отображение $S^1 \to S^2$), такие что для любой точки $y \in L$ будет $C(g)(y) \neq 0$ (а значит и $dg(y) \neq 0$ для $y \in L$). Затем рассмотрим гладкую нечётную функцию h, множество нулей которой совпадает с L (в нашем примере L получится деформацией экватора сферы, а h можно получить соответствующей деформацией координатной функции z). Положим

$$f = g + h^3.$$

Для такой функции f точки y_1, y_4 (введённые ранее) должны лежать на L, так как

$$f(y_1) - f(y_4) = h^3(y_1) - h^3(y_4) = 2h^3(y_1).$$

При этом

$$C(f)(y_1) = C(g)(y_1) \neq 0,$$

так как h возведена в куб и не влияет на первые и вторые производные f и g на L. В таком случае, инфинитезимальный (предельный) случай Гипотезы 2 не верен для f, и сама гипотеза не верна при достаточно малых $a, b > 0$.

Заметим, что метод разложения f на чётную и нечётную часть использовался для получения контрпримеров к обобщённой гипотезе Кнастера для отображений $f : S^n \to \mathbb{R}^m$ в работе [2].

§3. Построение чётной функции

Функцию g будем строить следующим образом. Сначала возьмём $g_0 = Ax^2 + By^2 + Dz^2$, где $A > B > D > 0$. Линию L_0 определим как экватор $\{(x, y, z) \in S^2 : z = 0\}$. Легко видеть, что $C(g_0) < 0$ на L_0, кроме четырёх точек $(\pm 1, 0, 0)$ и $(0, \pm 1, 0)$. Можно изменить L_0 в малой окрестности $(\pm 1, 0, 0)$ так, что изменённая линия L_0 не будет проходить через $(\pm 1, 0, 0)$. Для такой изменённой кривой L_0 неравенство $C(g_0) < 0$ выполняется в окрестности этих точек, так как они являются невырожденными максимумами g_0.

Несколько сложнее исключить точки $(0, \pm 1, 0)$. В координатах $(s, t) = (x, z)$ функция g_0 с точностью до аффинного преобразования имеет вид

$$g_0 = s^2 - t^2,$$

а кривая L_0 задана уравнением $\{t = 0\}$. Координаты (s, t), вообще говоря, нельзя использовать для вычисления $C(g)$ при $(s, t) \neq (0, 0)$, но можно сделать следующее замечание. Для достаточно малой окрестности $(0,0)$ разность между $C(g)$ (в правильных координатах) и комбинацией $g''_{ss}{g'_t}^2 - 2g''_{st}g'_sg'_t + g''_{tt}{g'_s}^2$ может быть сделана произвольно малой. Поэтому далее мы используем последнее выражение в качестве $C(g)$ в окрестности $(0,0)$.

Мы будем менять g_0 и L_0 одновременно в малой окрестности $(s,t) = (0,0)$. Возьмём некоторое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$g(s,t) = s^2 - (t - \phi(s))^2,$$

где C^∞-гладкая функция $\phi(s)$ неотрицательна, равна нулю для $|s| > 2\varepsilon$, положительна для $|s| < 2\varepsilon$, строго выпукла на $[-2\varepsilon, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, строго вогнута на $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Прямыми вычислениями находим

$$\frac{1}{8}C(g) = (\phi(s) - t)^2 - (\phi(s) - t)^3\phi''(s) - s^2.$$

Рассмотрим теперь другую C^∞-гладкую функцию $\psi(s)$, равную нулю для $|s| > \varepsilon/2$ и положительную для $|s| < \varepsilon/2$. Пусть линия L_0 превращается в кривую

$$L = \{(s,t) : t = \phi(s) + \psi(s)\}.$$

На этой кривой

$$\frac{1}{8}C(g)(s) = \psi(s)^2 + \psi(s)^3\phi''(s) - s^2.$$

На той части L, где $|s| > \varepsilon/2$, очевидно $C(g) < 0$. На той части L, где $|s| \le \varepsilon/2$ и $|\psi(s)| < |s|$, неравенство $C(g) < 0$ также верно. На части, где $|\psi(s)| \ge |s|$, оно может быть неверно, но оно станет верным, если умножить $\phi(s)$ на достаточно большую константу, оставляя $\psi(s)$ той же самой. Если функции $\phi(s)$ и $\psi(s)$ стали слишком большими, мы совершаем гомотетию с достаточно малым коэффициентом и делаем их достаточно малыми.

Наша конструкция изменила L_0 в малой окрестности $(0,0)$ в координатах (s,t). Соответствующее изменение g_0 сделано для достаточно малых по модулю значений координаты s, но эти изменения не нужно распространять на большие значения координаты t, так как кривая L осталась в области достаточно малых значений $|t|$. Следовательно, возвращаясь на сферу, можно считать, что g_0 и L_0 изменились только в достаточно малой окрестности $(0, \pm 1, 0)$. Ясно также, что изменения можно осуществлять симметрично относительно отражения $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$, так что конечная функция g остаётся чётной, а кривая L остаётся нечётной. Таким образом мы получаем функцию и кривую с требуемыми свойствами.

§4. Доказательства теорем

Доказательство Теоремы 1. Отождествим плоскость $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, а преобразования подобия с положительным детерминантом, соответственно, – с $\mathbb{C}$-линейными преобразованиями. Далее под "преобразованием подобия" понимается преобразование подобия с положительным детерминантом.

Выберем гладкий параметр на C в виде отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ периода 1. Изучим многообразие троек $a', b', c' \in C$, таких что

$$\triangle a'b'c' \sim \triangle abc.$$

Рассмотрим число $r = \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{C}$. Пусть точка a' параметризована $t \in \mathbb{R}$, а b' параметризована $t+s$, где $s \in (0,1)$. Рассмотрим соответствующее пространство пар параметров $X = \mathbb{R} \times I \setminus \mathbb{R} \times \partial I$, где $I = [0,1]$ – отрезок. Условие

$$c' = r(b'-a') + a' \in C$$

определяет подмножество $Z \subset X$. Из соображений общего положения, кривая C малым (в C^1-метрике) шевелением может быть изменена так, что Z станет гладкой кривой в X. Можно пояснить это так: для общей (напр. алгебраической) кривой D условие $r(b'-a') + a' \in D$ и его первый дифференциал являются тремя независимыми условиями, следовательно для общей кривой D они одновременно не могут выполняться и Z не будет иметь особенностей. Легко видеть, что утверждение теоремы позволяет переход к пределу в C^1-метрике (см. также конец доказательства), поэтому такое шевеление допустимо.

Найдём гомологическое пересечение Z с отрезком $\{t\} \times I$, пусть $f(t) = a'$. Для общего t это пересечение трансверсально и соответствует трансверсальному пересечению C с кривой

$$a' + r(C - a')$$

в точке, отличной от a'. Так как полный индекс пересечения двух гладких кривых на плоскости равен нулю, то пересечение $Z \cap \{t\} \times I$ имеет индекс 1. Отсюда следует, что кривая Z должна иметь неограниченную компоненту, так как всякая ограниченная компонента Z_b

имеет индекс $Z_b \cap \{t\} \times I$ равный нулю. Обозначим соответствующую неограниченную компоненту Z за Y. Заметим, что Z – замкнутое периодическое подмножество X, следовательно неограниченность Y понимается как неограниченность соответствующих параметров t, напротив, параметр s при этом всегда находится в некотором отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Покажем, что множество Y должно быть периодичным, то есть переходить в себя при преобразовании $T\colon (t,s) \mapsto (t+1, s)$. Ясно, что $T(Y)$ – это некоторая компонента кривой Z, то же верно для кривых $T^k(Y),\ k \in \mathbb{Z}$. Так как всякое пересечение $Z \cap \{t\} \times I$ конечно, то для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$ множества $T^k(Y) \cap \{t\} \times I$ и $T^l(Y) \cap \{t\} \times I$ совпадут. Так как Y – это связная компонента Z, то $T^{k-l}(Y) = Y$. Отсюда следует, что кривая Y делит полосу X на две открытые части, – условно говоря, "верхнюю" X_+ и "нижнюю" X_- (по координате s). Для равенства $T(Y) = Y$ достаточно, чтобы множества Y и $T(Y)$ пересекались. Предположим противное; тогда $T(Y)$ лежит либо полностью в X_+, либо полностью в X_-; без ограничения общности будем считать, что в X_-. Тогда $T^2(Y)$ лежит "ниже" $T(Y)$, а значит тоже лежит в X_-, и, рассуждая аналогичным образом далее, получаем, что $T^{k-l}(Y) = Y$ лежит полностью в X_-. Полученное противоречие показывает, что $T(Y) = Y$.

Теперь параметризуем гладкую кривую Y функциями $t(u), s(u)$ так, чтобы выполнялись условия

$$t(u+1) = t(u) + 1, \quad s(u+1) = s(u).$$

Таким образом мы получили параметризацию некоторых троек $a'(u), b'(u), c'(u) \in C$, подобных $\triangle abc$, причём при возрастании параметра на 1 точки $a'(u), b'(u), c'(u)$ делают полный оборот вдоль C, хотя при этом они могут двигаться вперёд и назад по C. Положим $q = \dfrac{d-a}{b-a}$ и

$$d'(u) = a'(u) + q(b'(u) - a'(u)).$$

Если точка $d'(u)$ находится на C, то выполняется первая альтернатива теоремы. Вычислим площади кривых, пробегаемых точками $a'(u)$, $b'(u)$, $c'(u)$, $d'(u)$, по формуле Грина (с точностью до множителя $i/2$, который мы для краткости опускаем)

$$S_a = \int_0^1 a'(u) d\overline{a'(u)}, \quad S_b = \int_0^1 b'(u) d\overline{b'(u)},$$

$$S_c = \int_0^1 c'(u) d\overline{c'(u)}, \quad S_d = \int_0^1 d'(u) d\overline{d'(u)}.$$

Пусть o – центр описанной окружности четырёхугольника $abcd$, $o(u)$ – центр описанной окружности $a'(u), b'(u), c'(u), d'(u)$. Положим

$$\alpha(u) = \frac{b'(u) - a'(u)}{b - a},\ r_a = a - o,\ r_b = b - o,\ r_c = c - o,\ r_d = d - o.$$

Перепишем интегралы

$$\begin{aligned} S_a = \int_0^1 a'(u) d\overline{a'(u)} &= \int_0^1 (o(u) + \alpha(u) r_a) d\overline{(o(u) + \alpha(u) r_a)} \\ &= \int_0^1 o(u) d\overline{o(u)} + r_a \int_0^1 \alpha(u) d\overline{o(u)} \\ &+ \overline{r_a} \int_0^1 o(u) d\overline{\alpha(u)} + r_a \overline{r_a} \int_0^1 \alpha(u) d\overline{\alpha(u)}, \end{aligned}$$

и аналогично для S_b, S_c, S_d, заменив r_a на r_b, r_c, r_d соответственно. Заметим, что зависимость результата от $\rho = r_a, r_b, r_c, r_d$ имеет вид

$$S(\rho) = A + 2 \operatorname{Re} B\rho + D|\rho|^2,$$

и для $\rho = r_a, r_b, r_c$ (три раза при одинаковом значении $|\rho|^2$) мы получаем $S(\rho) = S_C$ – площадь C по формуле Грина. Следовательно, $B = 0$ и S_d (площадь по формуле Грина) также равна S_C.

Если кривая $d'(u)$ не имеет самопересечений, то её площадь в обычном смысле равна S_C, и либо $d'(u)$ пересекает C (и теорема доказана), либо области, ограниченные $d'(u)$ и C, не пересекаются. Последний случай невозможен, поскольку в этом случае вектор $d'(u) - a'(u)$ совершал бы оборот на 0 при возрастании u на 1, но число вращения $d'(u) - a'(u)$ равно числу вращения $b'(u) - a'(u)$, то есть равно 2π.

Если кривая $d'(u)$ имеет самопересечения, то выполняется вторая альтернатива теоремы. Вспомним теперь, что мы пошевелили кривую C, и при переходе к пределу (к исходной C) самопересечение $d'(u)$ может выродиться, то есть длины "петелек" на кривой $\{d'(u)\}$ устремятся к нулю. Но в этом случае площадь петелек также будет стремиться к нулю, и рассуждение с площадями из предыдущего абзаца показывает, что есть точки $d'(u)$, не лежащие на C, но достаточно близкие (в зависимости от размера "петелек") к C. В пределе из соображений компактности мы получим точку d' на кривой C, и первая альтернатива теоремы будет выполнятся и в этом случае. $\square$

Доказательство Теоремы 2. Пусть C ограничивает замкнутую область R. Обозначим через $\overline{R}$ замыкание дополнения этой области ($\overline{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{int} R$).

Рассмотрим точку $a \in C$ и соприкасающуюся окружность $\omega(a)$ в точке a, определим $b(a)$ как точку на ω, для которой дуга $[ab(a)]$ имеет угловую меру α. Известная теорема (см., например, [1]) утверждает, что существуют соприкасающиеся окружности для C, лежащие целиком в R, и существуют соприкасающиеся окружности, лежащие целиком в $\overline{R}$. Более того, окружностей каждого типа (внутренняя и внешняя) как минимум две. Когда точка a движется по C, точка $b(a)$ меняется непрерывно, иногда оказываясь в R, и иногда – в $\overline{R}$. Следовательно, для некоторого a (в действительности, не менее четырёх раз) $b(a)$ лежит на C. $\square$

Литература

1. R. C. Bose, *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed oval.* — Math. Ann. **35** (1932), 16–24.
2. W. Chen, *Counterexamples to Knaster's conjecture.* — Topology **37**, No. 2 (1998), 401–405.
3. F. J. Dyson, *Continuous functions defined on spheres.* — Ann. of Math. **54** (1951), 534–536.
4. E. E. Floyd, *Real valued mappings of spheres.* — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 1957–1959.
5. H. B. Griffiths, *The topology of square pegs in round holes.* — Proc. London Math. Soc. **62**, No. 3 (1991), 647–672.
6. A. Hinrichs, C. Richter, *The Knaster problem: More counterexamples.* — Isr. J. Math. **145**, No. 1 (2005), 311–324.
7. B. S. Kashin, S. J. Szarek, *The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **336**, No. 11 (2003), 931–936.

8. B. Knaster, *Problem 4*. — Colloq. Math. **30** (1947), 30–31.
9. G. R. Livesay, *On a theorem of F. J. Dyson*. — Ann. of Math. **59** (1954), 227–229.
10. В. В. Макеев, *Задача Кнастера и почти сферические сечения*. — Мат. сборник **180**, No. 3 (1989), 424–431.
11. В. В. Макеев, *Решение задачи Кнастера для многочленов второй степени на двумерной сфере*. — Мат. заметки **53**, No. 1 (1993), 147–148.
12. В. В. Макеев, *О четырехугольниках, вписанных в замкнутую кривую*. — Мат. заметки **57**, No. 1 (1995), 129–132.
13. В. В. Макеев, *Универсально вписанные и описанные многогранники. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук*. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет (2003).

Karasev R. N. On two conjectures of Makeev.

A counterexample is constructed to the conjecture of Makeev about Knaster 4-tuples on the sphere S^2. A partial progress is obtained concerning another conjecture of Makeev about quadrangles inscribed in a smooth simple closed curve in the plane.

Московский
физико-технический институт,
Институтский пер. 9,
Долгопрудный 141700;
Институт проблем передачи информации РАН,
Большой каретный пер. 19, 127994 Москва;
Лаборатория дискретной
и выпуклой геометрии, Ярославский
государственный университет,
ул. Советская 14, Ярославль 150000, Россия
E-mail: r_n_karasev@mail.ru

Поступило 1 сентября 2010 г.